

# 西森モデルに基づく風紋・砂丘のセルオートマトン

寺田莉士 | 九州大学 理学部 地球惑星科学科 4 年

2024 年 2 月 14 日 \*

## 1 はじめに

風食作用における砂粒子の運動の素過程は以下の 3 種類に分けられる。

Creep (表面這行)	砂粒子が地面と接しながら転がる・滑る
Saltation (飛行)	砂粒子が弾みながら移動する
Suspension (浮遊)	砂粒子が空中を漂い続ける

本モデルでは、Creep と Saltation の 2 つの素過程がそれぞれ独立であるという仮定の下、単純な式として落とし込み、数値シミュレーション内で風紋または砂丘が再現できるか試験する。

また、西森・大内 (1993) [1] に沿って本文書は進め、筆者の解釈・途中計算も付け加える。よって、区別するために、前述の論文に登場する式は以下のように頭に「N-」をつける。

$$L = L_0 + bh_n(x, y) \quad (\text{N-1})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

## 2 風紋のモデル

この数値シミュレーションでは、各セルに高さ  $h$  を振ったセルオートマトンを用いる。つまり、砂粒子 1 つ 1 つを追っていくのではなく、セル上の砂柱を一塊に見て、それらの相互作用を追っていく。

また、先ほどは風紋と砂丘を並列して並べていたが、風紋は cm のスケールであるのに対し、砂丘は km のスケールである。よって、用いる式が違うので、まずは風紋の式から見ていく。

---

\* 最終修正日 2026.3.3

## 2.1 風紋の Saltation の式

1 節にある通り, Saltation は砂粒子が風により飛び上がり, いくらか離れた位置に着地する運動である。よって, 砂粒子の飛距離を  $L$  とすると, 以下のような式が立てられる。

$$L = L_0 + bh_n(x, y) \quad (\text{N-1})$$

ここで,  $L_0$  と  $b$  はそれぞれ平均飛距離と風速に依存する定数である。また,  $h_n(x, y)$  は位置  $(x, y)$  における  $n$  ステップでの砂の高さである。

そして, 離陸点では砂の高さが  $q$  減り, 着地点では  $q$  増えるということを考えると,  $h_n(x, y)$  に対して, 以下のような式が立てられる。

$$\begin{aligned} h_{n'}(x, y) &= h_n(x, y) - q \\ h_{n'}(x + L(h_n(x, y)), y) &= h_n(x + L(h_n(x, y)), y) + q \end{aligned} \quad (\text{N-2})$$

ここで,  $n'$  は Creep の式の 1 つ手前のステップということである。言い換えれば,  $n'$  は  $n$  と  $n + 1$  の間の中間ステップということである。

## 2.2 Creep の式

先述の通り, Creep は砂粒子の転がり・滑りのことであるが, 風による効果は Saltation の式に含まれている。よって, この Creep の式では, 重力の作用で砂山が崩れる運動を表現する。

$$h_{n+1}(x, y) = h_{n'}(x, y) + D \left( \frac{1}{6} \sum_{NN} h_{n'}(x, y) + \frac{1}{12} \sum_{NNN} h_{n'}(x, y) - h_{n'}(x, y) \right) \quad (\text{N-3})$$

ここで,  $\sum_{NN}$  は最近接セルの和,  $\sum_{NNN}$  は第 2 近接セルの和を表す [図 1]。また,  $D$  は転がりやすさを表す定数である。

西森・大内 (1993) [1] において, Creep に関する式は (N-3) 式しか記載されていない。よって, 「拡散と同一形 [1]」より, 拡散方程式から (N-3) 式を導出する。

関数  $h_n(x, y)$  に関して, 2 次元の拡散方程式は,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

( $\kappa > 0$ ): 拡散係数)

のように書ける。 $h_n(x, y)$  を  $h_{i,j}^n$  と置き換え, また,

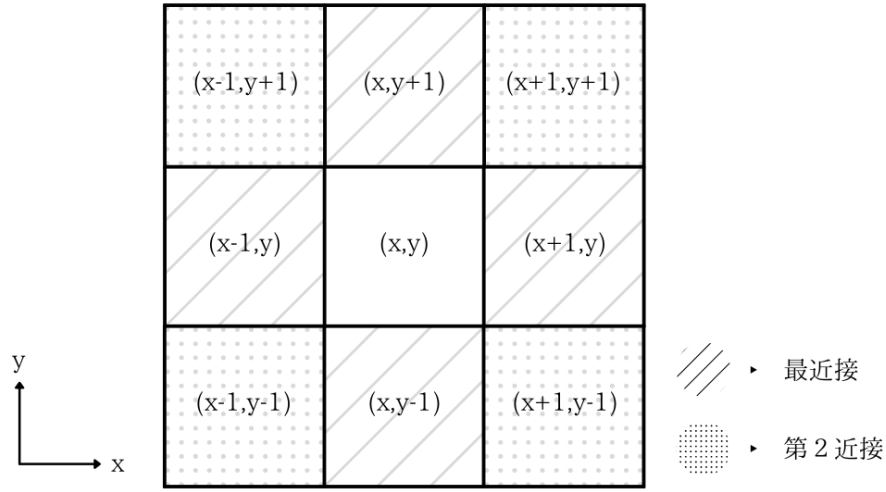


図1 最近接と第2近接

$$\frac{\partial h_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 h_{i,j}^n}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta r)^2}{12} \frac{\partial^4 h^n}{\partial x^4} \Big|_{i,j} + O((\Delta r)^4) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 h_{i,j}^n}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta r)^2}{12} \frac{\partial^4 h^n}{\partial y^4} \Big|_{i,j} + O((\Delta r)^4) \quad (4)$$

(Δr : セル間隔 Δt : 時間間隔)

として, (1) 式に代入すると,

$$h_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{4\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2}\right) h_{i,j}^n + \frac{\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \sum_{NN} h_{i,j}^n - \frac{\kappa\Delta t}{12} (\Delta r)^2 \left( \frac{\partial^4 h^n}{\partial x^4} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^4 h^n}{\partial y^4} \Big|_{i,j} \right) + O((\Delta r)^4 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (5)$$

となる。

次に,  $xy$  軸を  $-45^\circ$  回転させた  $x'y'$  軸を考える [図2]。このときの拡散方程式は (1) 式と同様に,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} \right) \quad (6)$$

と書けるので, この式に (2) 式と,

$$\frac{\partial^2 h_{i,j}^n}{\partial x'^2} = \frac{h_{i+1,j-1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j+1}^n}{2(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta r)^2}{6} \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \Big|_{i,j} + O((\Delta r)^4) \quad (7)$$

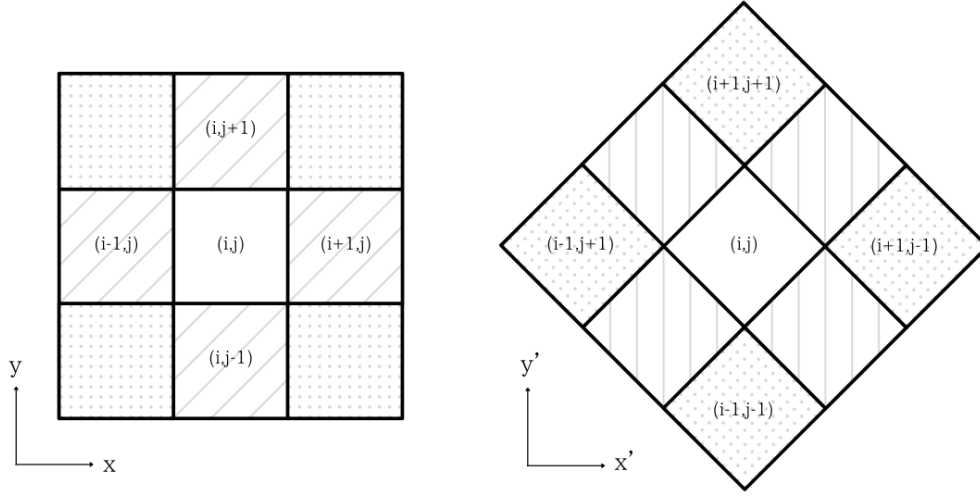


図 2 最近接と第 2 近接において差分の対象となるセル

$$\frac{\partial^2 h_{i,j}^n}{\partial y'^2} = \frac{h_{i+1,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j-1}^n}{2(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta r)^2}{6} \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} + O((\Delta r)^4) \quad (8)$$

を代入すると,

$$h_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{2\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2}\right) h_{i,j}^n + \frac{\kappa\Delta t}{2(\Delta r)^2} \sum_{NNN} h_{i,j}^n - \frac{\kappa\Delta t}{6} (\Delta r)^2 \left( \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} \right) + O((\Delta r)^4 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (9)$$

のようになる。

定数  $A, B$  を用いて,  $A \times (5)$  式  $+ B \times (9)$  式を行うと,

$$(A+B)h_{i,j}^{n+1} = \left( A+B - \frac{2(2A+B)\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \right) h_{i,j}^n + \frac{A\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \sum_{NN} h_{i,j}^n + \frac{B\kappa\Delta t}{2(\Delta r)^2} \sum_{NNN} h_{i,j}^n - \frac{\kappa\Delta t}{12} (\Delta r)^2 \left( A \left( \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} \right) + 2B \left( \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} \right) \right) + O((\Delta r)^4 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (10)$$

のようになり, この式の  $(\Delta r)^2$  の項が消えるかを調べる。

$(x, y)$  と  $(x', y')$  について,  $x = (x' + y')/\sqrt{2}$ ,  $y = (-x' + y')/\sqrt{2}$  が成り立つので [図 3],

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4}{\partial x'^4} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 6 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 4 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \\ \frac{\partial^4}{\partial y'^4} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 6 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)\end{aligned}$$

である。よって、(10) 式は、

$$\begin{aligned}(A+B)h_{i,j}^{n+1} &= \left( A+B - \frac{2(2A+B)\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \right) h_{i,j}^n + \frac{A\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \sum_{NN} h_{i,j}^n + \frac{B\kappa\Delta t}{2(\Delta r)^2} \sum_{NNN} h_{i,j}^n \\ &\quad - \frac{\kappa\Delta t}{12} (\Delta r)^2 \left( (A+B) \left( \frac{\partial^4 h^n}{\partial x^4} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^4 h^n}{\partial y^4} \Big|_{i,j} \right) + 6B \frac{\partial^4 h^n}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j} \right) \\ &\quad + O((\Delta r)^4 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (11)\end{aligned}$$

のように書き換えられる。よって、 $B \neq 0$  では  $(\Delta r)^2$  の項は消去できない。

$A = B = 1/2$  を選ぶと (11) 式は、

$$h_{i,j}^{n+1} = \left( 1 - \frac{3\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \right) h_{i,j}^n + \frac{\kappa\Delta t}{2(\Delta r)^2} \sum_{NN} h_{i,j}^n + \frac{\kappa\Delta t}{4(\Delta r)^2} \sum_{NNN} h_{i,j}^n + O((\Delta r)^2 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (12)$$

となる。ここで、 $D = 3\kappa\Delta t/(\Delta r)^2$  と置くと、(N-3) 式になる。

また、(5)(9)(12) 式において  $h_{i,j}^n$  の係数は 0 以上と考えると、

$$0 < D \leq \frac{3}{4} \quad (13)$$

である。

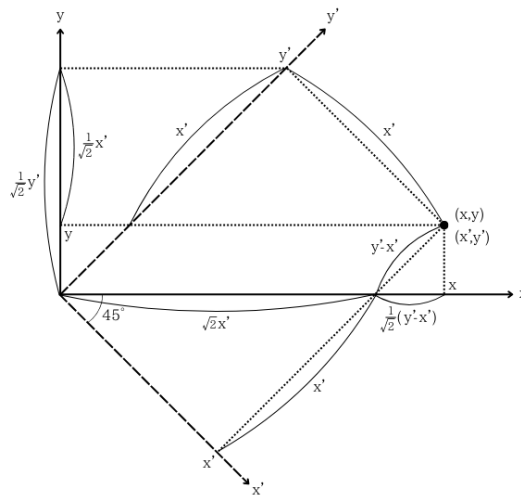


図3  $(x, y)$  と  $(x', y')$  の関係

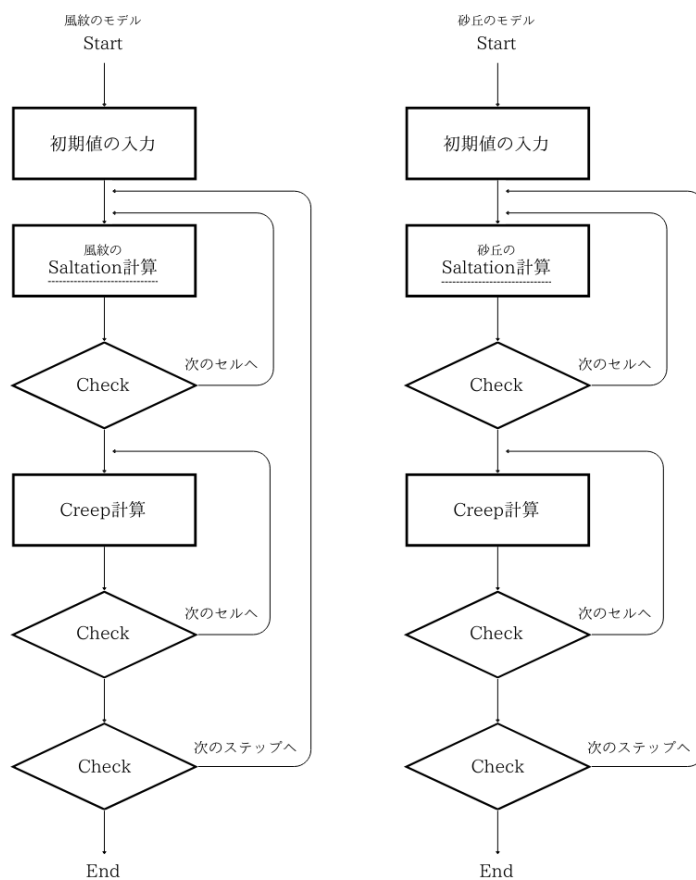


図4 風紋(左)と砂丘(右)のフローチャート

### 2.3 風紋の計算フローチャート

フローチャートは図4左である。ここで、初期条件と境界条件は以下の通りである。

- 初期条件  $h_0(x, y)$  には 0 以上 1 未満な一様乱数を与える。
- 境界条件  $h_n(x, y)$  は  $x, y$  方向ともに周期境界とする。
- 境界条件 (N-2) 式において  $q > h_n(x, y)$  のとき,  $q = h_n(x, y)$  とする。

### 2.4 風紋の計算結果

計算の結果, 図5のように風紋の形成が確認できた。表1はこの計算のパラメーターである。

$L_0$	$b$	$q$	$D$
5	2	0.1	0.2

表1 風紋のモデルの計算におけるパラメーター

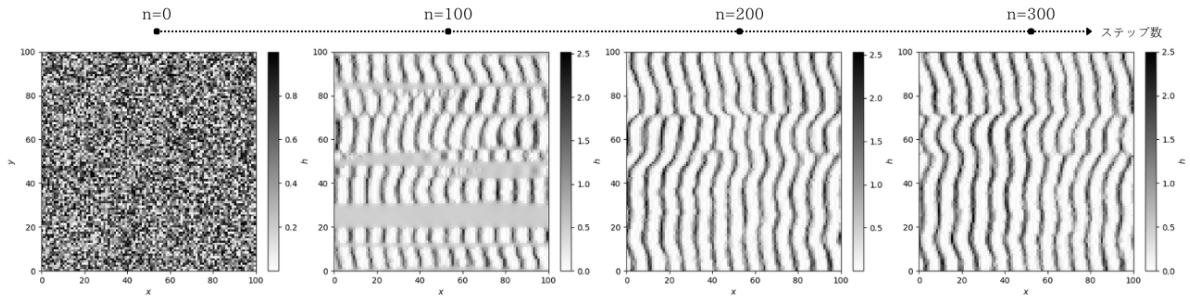


図 5 風紋のモデルの計算結果

### 3 砂丘のモデル

砂丘の式を見ていく。ここで、Creep の式は風紋と同様に (N-3) 式を用いる。

#### 3.1 砂丘の Saltation の式

砂丘のスケールでは、勾配が飛距離に強く影響を与え、風上側では飛距離が伸びずに、風下側では遠くまで移動すると考える。また、高さの移動量も勾配の影響を受け、上り坂では Saltation が活発であると考えられる。よって、

$$L = L_0 - \alpha \tanh(\nabla_x h(x)) \quad (\text{N-13})$$

$$q = q_0 + \beta \tanh(\nabla_x h(x)) \quad (\text{N-14})$$

$$\begin{aligned} h_{n'}(x, y) &= h_n(x, y) - q(x, y) \\ h_{n'}(x + L(h_n(x, y)), y) &= h_n(x + L(h_n(x, y)), y) + q(x, y) \end{aligned} \quad (\text{N-15})$$

となる。ここで、 $q_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  は定数である。また、筆者の解釈ではあるが、 $\tanh$  は  $\nabla_x h$  を  $-1$  から  $1$  の範囲で作用させるために用いていると考える。

#### 3.2 砂丘の計算フローチャート

フローチャートは図 4 右である。初期条件と境界条件は風紋と同様である。

#### 3.3 砂丘の計算結果

計算の結果、図 6 のようにバルハン砂丘の形成が確認できた。表 2 はこの計算のパラメーターである。

$L_0$	$\alpha$	$q_0$	$\beta$	$D$
5	5	0.1	0.1	0.2

表 2 砂丘のモデルの計算におけるパラメーター

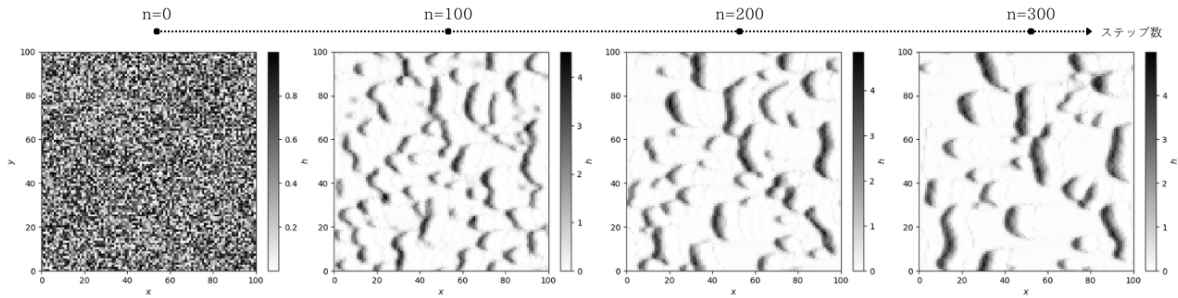


図 6 砂丘のモデルの計算結果

## 4 終わりに

西森・大内 (1993) [1] の示すシンプルなモデルで、風紋と砂丘の形成を再現できた。

## 参考文献

- [1] 西森拓・大内則幸 (1993) 「飛砂による地形の動力学 - 風紋と砂丘 - 」, 物性研究 61 巻 1 号, 32-43.