

線形解析による砂のフラックスのモデルの比較

寺田莉士 | 九州大学大学院 理学府 地球惑星科学専攻 修士課程 1 年

2026 年 3 月 3 日 *

1 はじめに

砂粒子で構成された地形の高さ $h(t, x)$ と砂の体積フラックス $q(t, x)$ の間には, 以下の連続の式が成り立つ。

$$\phi_b \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (1)$$

(ϕ_b : 地形内の砂粒子の充填率)

この式を解ける形にするには, q を h で表す必要があり, その方式について様々なモデルが存在する。本文書では, 2 種類のモデルを取り上げる。そのモデル式を取り入れた (1) 式を線形解析の範囲で解くことで, モデルの比較を行っていく。

今回は, Charru et al.(2013) [1] に示されているモデルと, 西森・大内 (1993) [2] に示されているモデルを取り扱う。便宜上, 前者のモデルを Charru モデル, 後者のモデル西森モデルと呼ぶことにする。

2 Charru モデル

Charru モデルは, 系の状態を表す物理量をベースに線形解析で地形の波長を説明することを目標に作られた。ここで, Charru モデルで考える 3 つの効果を列挙する。

地形の表面における流体の剪断応力 地形の勾配 Saturation Length

2.1 地形の表面における流体の剪断応力

地形の表面における流体の剪断応力 τ_b と Saturated Flux q_{sat} の間には, 正の相関が存在する。

* 最終修正日 2026.3.3

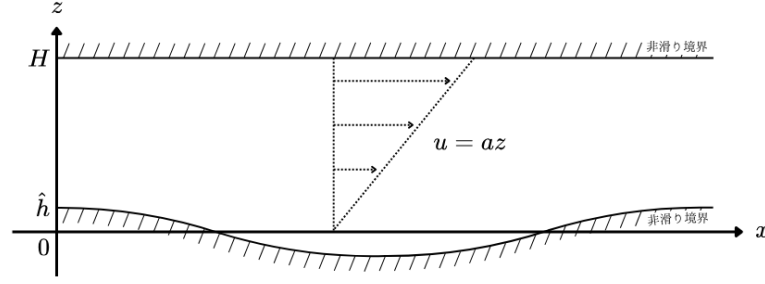


図1 速度の基準状態

ここで, q_{sat} とは平らな地形上を定常流が流れた場合における q である。

2.1.1 地形の表面における流体の剪断応力の解析

まずは, 層流の場合を考える。

流れ方向を x , 鉛直上方向を z とし, 一定の速度で動く平板 [$z = H$] と波打った地形 [$z = \hat{h}e^{ikx}$] の間を流れる定常な非圧縮流体を考える [図 1]。速度を $\mathbf{v} = (u, w)^T$, 圧力を p とすると, 基礎方程式は以下のようなになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu(\nabla^2\mathbf{v}) \quad (3)$$

(ρ : 流体の密度 ν : 動粘性率)

境界条件は以下の通りである。

$$\mathbf{v}|_{z=H} = (aH, 0)^T \quad \mathbf{v}|_{z=\hat{h}e^{ikx}} = \mathbf{0} \quad (4)$$

(a : 定数)

これより (2)(3) 式を線形化する。速度と圧力を $u \simeq az + \hat{u}(z)e^{ikx}$, $w \simeq \hat{w}(z)e^{ikx}$, $p \simeq p_0 + \hat{p}(z)e^{ikx}$ [p_0 : 定数] のような基準状態と摂動の和で置くことにすると [図 1],

$$ik\hat{u} + \frac{d\hat{w}}{dz} \simeq 0 \quad (5)$$

$$ikaz\hat{u} + a\hat{w} \simeq -i\frac{k}{\rho}\hat{p} + \nu\left(-k^2\hat{u} + \frac{d^2\hat{u}}{dz^2}\right) \quad (6)$$

$$ikaz\hat{w} \simeq -\frac{1}{\rho}\frac{d\hat{p}}{dz} + \nu\left(-k^2\hat{w} + \frac{d^2\hat{w}}{dz^2}\right) \quad (7)$$

のようになる。(6) 式を z で微分したものと, (7) 式を $-ik$ 倍したものを足し合わせると,

$$ikaz \left(\frac{d\hat{u}}{dz} - ik\hat{w} \right) \simeq \nu \left[-k^2 \left(\frac{d\hat{u}}{dz} - ik\hat{w} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d\hat{u}}{dz} - ik\hat{w} \right) \right]$$

が得られる。なお、途中で (5) 式を用いた。 $\hat{\omega}_y(z) = d\hat{u}/dz - ik\hat{w}$ を置くと*1,

$$\frac{d^2\hat{\omega}_y}{dz^2} - k^2\hat{\omega}_y \simeq i\delta_i^{-3}z\hat{\omega}_y \quad (8)$$

のようになる。ここで、 $\delta_i = (\nu/ka)^{\frac{1}{3}}$ と置いた。 $Z(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}(\delta_i^{-1}z - i(k\delta_i)^2)$ で座標変換すると,

$$\frac{d^2\hat{\omega}_y}{dZ^2} \simeq Z\hat{\omega}_y \quad (9)$$

のようになる。(9) 式の解は、第 1 種エアリー関数と第 2 種エアリー関数を使って、

$$\hat{\omega}_y \simeq C_1\text{Ai}(Z) + C_2\text{Bi}(Z) \quad (10)$$

(C_1, C_2 : 定数)

となる。 $d\hat{\psi}/dz = \hat{u}$ かつ $-ik\hat{\psi} = \hat{w}$ を満たす $\hat{\psi}$ を置くと*2,

$$\frac{d^2\hat{\psi}}{dz^2} - k^2\hat{\psi} \simeq \hat{\omega}_y \quad (11)$$

が成り立っている*3。(11) 式の解は、

$$\hat{\psi} \simeq \frac{1}{2k} \left[e^{kz} \int_0^z [C_1\text{Ai}(Z(z')) + C_2\text{Bi}(Z(z'))] e^{-kz'} dz' - e^{-kz} \int_0^z [C_1\text{Ai}(Z(z')) + C_2\text{Bi}(Z(z'))] e^{kz'} dz' \right] + C_3e^{kz} + C_4e^{-kz} \quad (12)$$

(C_3, C_4 : 定数)

となる。

境界条件より、 C_1, C_2, C_3, C_4 を決定する。ただし、線形な問題を考えているため、(4) 式の $z = \hat{h}e^{ikx}$ の式も以下のように線形化して用いる。

$$(\hat{u}, \hat{w})^T \Big|_{z=0} \simeq (-a\hat{h}, 0)^T \quad (13)$$

*1 $\hat{\omega}_ye^{ikx} = \partial(\hat{u}e^{ikx})/\partial z - \partial(\hat{w}e^{ikx})/\partial x$ より得られる。

*2 $\partial(\hat{\psi}e^{ikx})/\partial z = \hat{u}e^{ikx}$ かつ $-\partial(\hat{\psi}e^{ikx})/\partial x = \hat{w}e^{ikx}$ より得られる。

*3 二次元かつ非圧縮な流れにおいて、渦度と流れ関数をそれぞれ ω_y と ψ と置くと、 $\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial z^2 = \omega_y$ が成り立つ。

これら境界条件より,

$$C_1 \simeq -a\hat{h} \frac{B_+ - B_-}{A_+B_- - A_-B_+} \quad C_2 \simeq a\hat{h} \frac{A_+ - A_-}{A_+B_- - A_-B_+} \quad C_3 \simeq -\frac{a\hat{h}}{2k} \quad C_4 \simeq \frac{a\hat{h}}{2k} \quad (14)$$

と分かる。ここで,

$$A_{\pm} = \int_0^H \text{Ai}(Z(z')) e^{\pm kz'} dz' \quad B_{\pm} = \int_0^H \text{Bi}(Z(z')) e^{\pm kz'} dz'$$

である。

Charru・Hinch(2000) [3] によれば, (12)(14) 式で決まった $\hat{\psi}$ の振る舞いは 3 つに大別される [図 2]。 $k\delta_i < 1$ かつ $kH > 1$ の場合が「inviscid regime [3]」、 $k\delta_i > 1$ かつ $kH > 1$ の場合が「deep viscous regime [3]」、 $k\delta_i > kH$ かつ $kH < 1$ の場合が「shallow viscous regime [3]」である。

3 つの領域それぞれにおける τ_b の漸近的な解を求める。 τ_b の定義は以下の通りである。

$$\tau_b = \rho\nu \left(\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\hat{h}e^{ikx}} + \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{z=\hat{h}e^{ikx}} \right) \quad (15)$$

線形な問題を考えているため, (15) 式も線形化して考える。 τ_b を $\tau_b \simeq \tau_{b0} + \hat{\tau}_b e^{ikx}$ [$\tau_{b0} = \rho\nu a$] のような基準状態と摂動の和で置くことにすると,

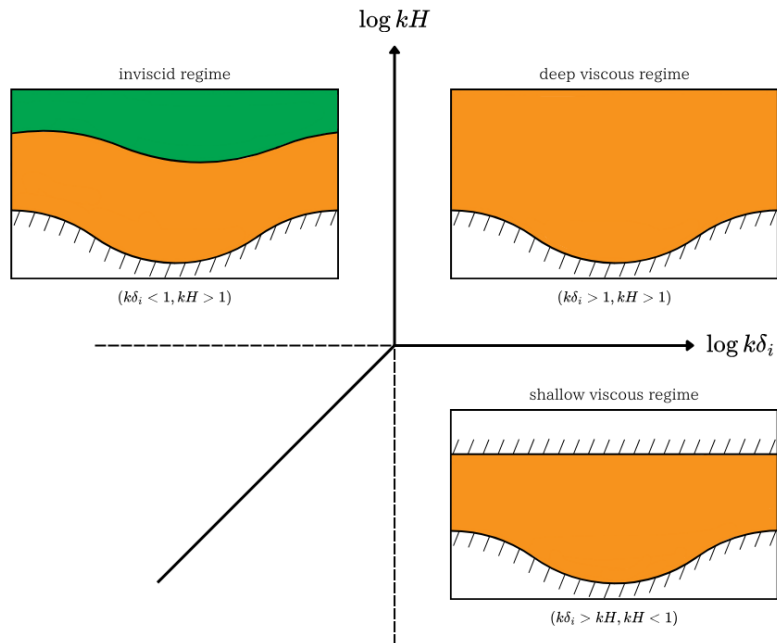


図 2 $k\delta_i$ と kH による流れの場合分け

$$\hat{\tau}_b \simeq \rho\nu \hat{\omega}_y|_{z=0} \quad (16)$$

のようになる。

shallow viscous regime における漸近的な解を求める。 $k\delta_i \ll 1$ として $Z(z) \simeq e^{i\frac{\pi}{6}\delta_i^{-1}z}$ とし、 $H \ll 1$ としてエアリー関数を直線で近似すると、

$$\hat{\tau}_b \simeq 4\tau_{b0} \frac{\hat{h}}{H} \quad (17)$$

を得る。ここで、 $\hat{\tau}_b \simeq \tau_{b0}(A + iB)k\hat{h}$ のように置くと、

$$A + iB = \frac{4}{kH} \quad (18)$$

のようになる。

deep viscous regime における漸近的な解を Charru et al.(2013) [1] より引用する。

$$A + iB = 2 + i\frac{1}{2}(k\delta_i)^{-3} \quad (19)$$

inviscid regime における漸近的な解を Charru et al.(2013) [1] より引用する。

$$A + iB = e^{i\frac{\pi}{6}} \gamma_L (k\delta_i)^{-1} \quad (20)$$

($\gamma_L (\simeq 1.06)$: 定数)

次に、乱流の場合を考える。

Charru et al.(2013) [1] によれば、inviscid regime からさらに k を小さくすると乱流が発生する [図 3]。乱流が生じる場合を「turbulent regime [1]」と呼ぶ。

turbulent regime における漸近的な解を Charru et al.(2013) [1] より引用する。

$$A + iB = \frac{2 \log^2 \left(\frac{\pi}{2kz_0^2} \sqrt{\log(\frac{\pi}{2kz_0})} \right)}{\log^3(\delta_i/z_0)} \left[1 + 4\gamma_E + 2 \log \left(\frac{\pi}{2} \right) + \log \left(\frac{\delta_i}{z_0} \right) + i\pi \right] \quad (21)$$

(z_0 : hydrodynamical roughness [1] $\gamma_E (\simeq 0.577)$: 定数)

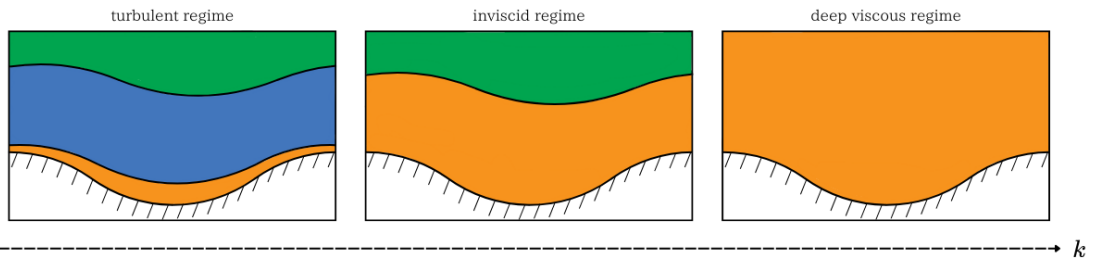


図 3 k による流れの場合分け

2.1.2 地形の高さの解析

$q = q_{sat}(\tau_b)$ というモデルを考え、線形化する。ここで、 h と τ_b を $h \simeq \hat{h}e^{\sigma t+i(kx-\omega t)}$, $\tau_b \simeq \tau_{b0} + \hat{\tau}_b e^{\sigma t+i(kx-\omega t)}$ のような基準状態と摂動の和で置くことにする。

$$\begin{aligned} q_{sat}(\tau_b) &\simeq q_{sat}|_{\tau_b=\tau_{b0}} + \left. \frac{\partial q_{sat}}{\partial \tau_b} \right|_{\tau_b=\tau_{b0}} \hat{\tau}_b e^{\sigma t+i(kx-\omega t)} \\ &= q_{sat}|_{\tau_b=\tau_{b0}} + \phi_b Q (A + iB) k \hat{h} e^{\sigma t+i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $\partial q_{sat}/\partial \tau_b|_{\tau_b=\tau_{b0}} = \phi_b Q/\tau_{b0}$ と置いた。 h の式と (22) 式を (1) 式へ代入すると、

$$\sigma = QB(k)k^2 \quad (23)$$

が得られる。各パラメーターに地球における大気下の砂粒子で構成された地形の典型的な値 [表 1] を用いると、(23) 式の σ は極大値を持たないことが分かる [図 4 の点線]。ここで、(19)(20)(21) 式の適用範囲は Charru et al.(2013) [1] を参考に決定した。

2.2 地形の勾配

地形の勾配 $\partial_x h$ と Saturated Flux q_{sat} の間には、負の相関が存在する。よって、 $q = q_{sat}(\tau_b, \partial_x h)$ というモデルを考え、線形化する。

$$\begin{aligned} q_{sat}(\tau_b, \partial_x h) &\simeq q_{sat}|_{\tau_{b0},0} + \left. \frac{\partial q_{sat}}{\partial \tau_b} \right|_{\tau_{b0},0} \hat{\tau}_b e^{\sigma t+i(kx-\omega t)} + \left. \frac{\partial q_{sat}}{\partial (\partial_x h)} \right|_{\tau_{b0},0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{h} e^{\sigma t+i(kx-\omega t)} \right) \\ &= q_{sat}|_{\tau_{b0},0} + \phi_b Q (A + iB) k \hat{h} e^{\sigma t+i(kx-\omega t)} - \phi_b Q S i k \hat{h} e^{\sigma t+i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (24)$$

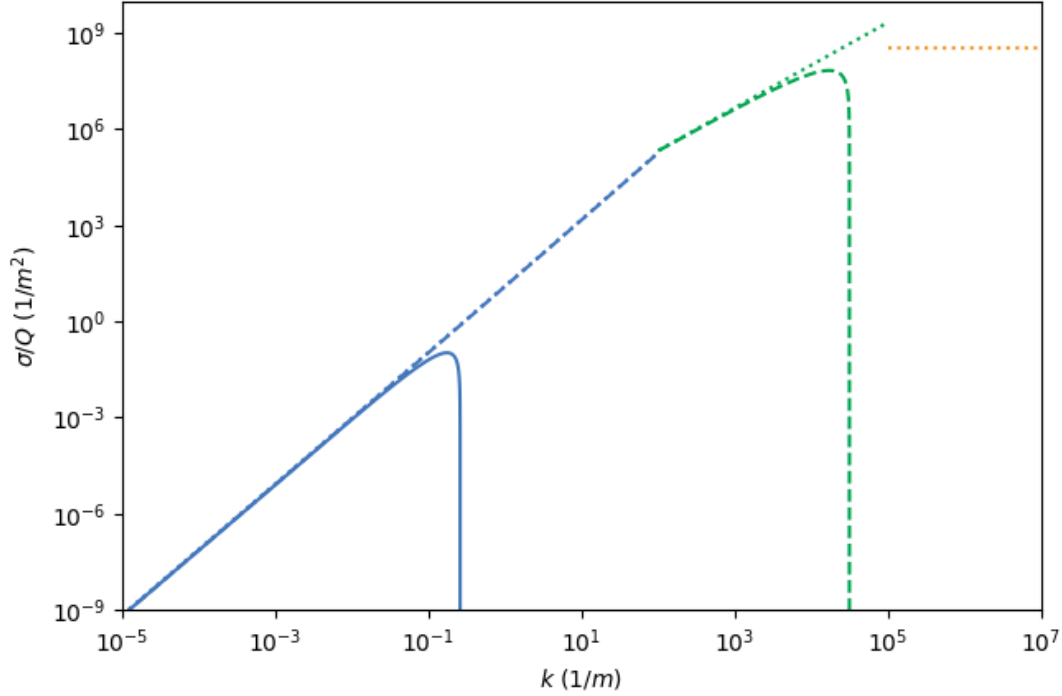
ここで、 $\partial q_{sat}/\partial (\partial_x h)|_{\tau_{b0},0} = -\phi_b Q S$ と置いた。 h の式と (24) 式を (1) 式へ代入すると、

$$\sigma = Q(B(k) - S)k^2 \quad (25)$$

が得られる。(25) 式の σ は $k \sim 10^4 \text{ (m}^{-1}\text{)}$ で極大値を持つ [図 4 の破線] が、地球上で観測されている風紋・砂丘の波数とは一致しない。よって、新たな効果を追加する必要があると考えられる。

ここで、 S は以下のように与えている [図 5]。

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{\phi_b Q} \left(\frac{\partial q_{sat}}{\partial (\partial_x h)} \right)_{\tau_b} \Big|_{\tau_{b0},0} \\ &= -\frac{1}{\phi_b Q} \left[-\left(\frac{\partial q_{sat}}{\partial \tau_b} \right)_{\partial_x h} \left(\frac{\partial \tau_b}{\partial (\partial_x h)} \right)_{q_{sat}} \right] \Big|_{\tau_{b0},0} \\ &\simeq \frac{1}{\tau_{b0}} \frac{\tau_{bth}|_{\partial_x h=0}}{\tan \theta_{th}|_{\tau_b=\tau_{b0}}} \end{aligned} \quad (26)$$

図4 k と σ の関係

[黄色・緑色・青色の線は $A + iB$ の計算にそれぞれ (19)(20)(21) 式を用いたことを表す。]

ρ (kg/m ³)	ν (m ² /s)	z_0 (m)	τ_{b0} (Pa)	$\tau_{bth} _{\partial_x h=0}$ (Pa)	$\theta_{th} _{\tau_b=\tau_{b0}}$ (°)	L_{sat} (m)
1.3	1.5×10^{-5}	$\sim 10^{-6}$ [1]	0.2 [1]	0.071 [4]	37 [1]	~ 1 [1]

表1 地球における大気下の砂粒子で構成された地形の典型的なパラメーター

ここで、 $\tau_{bth}|_{\partial_x h=0}$ は平らな地形上において砂粒子が動き出すときの τ_b , $\tan \theta_{th}|_{\tau_b=\tau_{b0}}$ は $\tau_b = \tau_{b0}$ において砂粒子が止まるための地形の勾配である。

2.3 Saturation Length

砂粒子の動き出す位置と $q = q_{sat}$ となる位置の間には、空間的なラグが存在する。よって、その空間的なラグを特徴づける量として Saturation Length L_{sat} を置き、 $q(t, x) = q_{sat}(\tau_b(t, x - L_{sat}), \partial_x h(t, x - L_{sat}))$ というモデルを考え、線形化する。

$$\begin{aligned}
 & q_{sat}(\tau_b(t, x - L_{sat}), \partial_x h(t, x - L_{sat})) \\
 & \simeq q_{sat}|_{\tau_{b0},0} + \phi_b Q(A + i(B - S)) k \hat{h} e^{\sigma t + i(k(x - L_{sat}) - \omega t)} \\
 & \simeq q_{sat}|_{\tau_{b0},0} + \phi_b Q(A + i(B - S))(1 - ikL_{sat}) k \hat{h} e^{\sigma t + i(kx - \omega t)} \quad (27)
 \end{aligned}$$

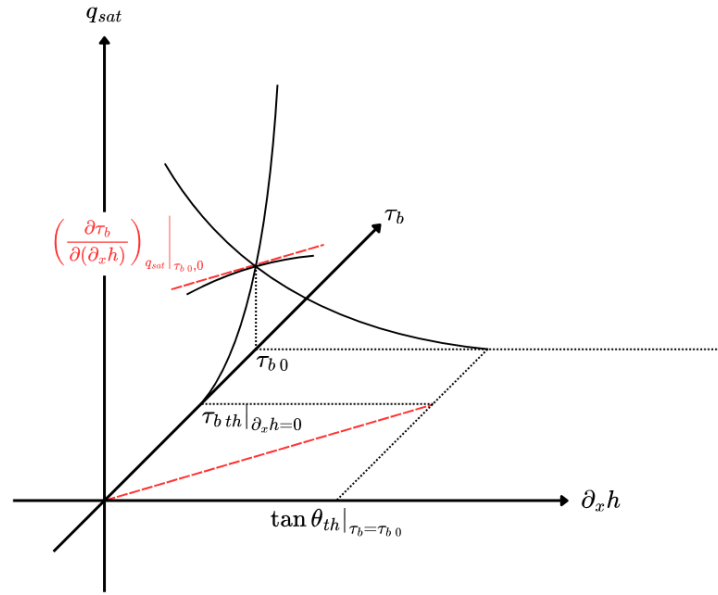


図5 Sの算出に関する近似

ここで, $kL_{sat} \ll 1$ として $e^{-ikL_{sat}} \simeq 1 - ikL_{sat}$ とした。 h の式と (27) 式を (1) 式へ代入すると,

$$\sigma = Q(B(k) - S - A(k)kL_{sat})k^2 \quad (28)$$

が得られる。(28) 式の σ は $k \sim 10^{-1}$ (m^{-1}) で極大値を持ち [図4の実線], 地球上で観測されている砂丘の波数と凡そ一致する。

3 西森モデル

西森モデルは, 砂粒子の運動の素過程をベースにセルオートマトンで地形の形状を再現することを目標に作られた。ここで, 砂粒子の運動の素過程を列挙する。

Creep (表面這行) Saltation (飛行) Suspension (浮遊)

西森モデルでは, Suspension の効果が風紋の形成に影響を及ぼさないと仮定し, $q = q_{cre} + q_{sal}$ というモデルを考える。ここで, q_{cre} は Creep で運動している砂の体積フラックス, q_{sal} は Saltation で運動している砂の体積フラックスである。また, q_{sal} について,

$$q_{sal}(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} q_{sal}^{out}(t, x') 1_{(x', x'+l(t, x'))}(x) dx'$$

のようなモデル式を立てる^{*4}。ここで, q_{sal}^{out} は地形から飛び出す砂の体積フラックス, l はそのフラックスの影響距離である。まとめると,

^{*4} $1_A(x)$ は指示関数であり, $x \in A$ ならば $1_A(x) = 1$, $x \notin A$ ならば $1_A(x) = 0$ である。

$$q(t, x) = q_{cre}(t, x) + \int_{-\infty}^{\infty} q_{sal}^{out}(t, x') 1_{(x', x'+l(t, x'))}(x) dx' \quad (29)$$

のようになる。この (29) 式を x で微分すると、

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial q_{cre}(t, x)}{\partial x} + q_{sal}^{out}(t, x) - \int_{-\infty}^{\infty} q_{sal}^{out}(t, x') \delta(x' + l(t, x') - x) dx' \quad (30)$$

が得られる。

今回、(30) 式において x と x' が 1 対 1 に対応する場合を考える。このとき、

$$x(t, x') = x' + l(t, x') \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial q_{cre}(t, x)}{\partial x} + q_{sal}^{out}(t, x) - q_{sal}^{out}(t, x') \frac{\partial x'}{\partial x} \\ &\simeq \frac{\partial q_{cre}(t, x)}{\partial x} + q_{sal}^{out}(t, x) - q_{sal}^{out}(t, x') \left(1 - \frac{\partial l(t, x')}{\partial x'}\right) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ここで、 $\partial l(t, x')/\partial x' \ll 1$ として $\partial x'/\partial x = (\partial x/\partial x')^{-1} \simeq 1 - \partial l(t, x')/\partial x'$ とした。

$q_{cre}(\partial_x h)$, $q_{sal}^{out} = q_{sal0}^{out}$ [q_{sal0}^{out} : 定数], $l(h)$ というモデルを考え、線形化する。ここで、 h を $h \simeq \hat{h}e^{\sigma t + i(kx - \omega t)}$ のような摂動で置くことにする。

$$\begin{aligned} q_{cre}(\partial_x h) &\simeq q_{cre}|_{\partial_x h=0} + \left. \frac{\partial q_{cre}}{\partial(\partial_x h)} \right|_{\partial_x h=0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{h}e^{\sigma t + i(kx - \omega t)} \right) \\ &= q_{cre}|_{\partial_x h=0} - \phi_b Q_{cre} ik \hat{h}e^{\sigma t + i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} l(h) &\simeq l|_{h=0} + \left. \frac{\partial l}{\partial h} \right|_{h=0} \hat{h}e^{\sigma t + i(kx - \omega t)} \\ &= l_0 + \phi_b T \hat{h}e^{\sigma t + i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、 $\partial q_{cre}/\partial(\partial_x h)|_{\partial_x h=0} = -\phi_b Q_{cre}$, $l|_{h=0} = l_0$, $\partial l/\partial h|_{h=0} = \phi_b T$ と置いた。これらの式を (32) 式へ代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} &\simeq \phi_b \left(Q_{cre} k + q_{sal0}^{out} T i e^{-ikl(t, x')} \right) k \hat{h}e^{\sigma t + i(kx - \omega t)} \\ &\simeq \phi_b \left(Q_{cre} k + q_{sal0}^{out} T i e^{-ikl_0} \right) k \hat{h}e^{\sigma t + i(kx - \omega t)} \\ &= \phi_b \left(Q_{cre} k + q_{sal0}^{out} T \sin kl_0 + i q_{sal0}^{out} T \cos kl_0 \right) k \hat{h}e^{\sigma t + i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (35)$$

のようになる。ここで、最終的に $l(t, x') \simeq l_0$ とした。 h の式と (35) 式を (1) 式へ代入すると、

$$\sigma = - (Q_{cre}k + q_{sal0}^{out}T \sin kl_0) k \quad (36)$$

が得られる。 $3\pi Q_{cre}/2l_0 - q_{sal0}^{out}T < 0$ ならば, (36) 式の σ は $k \simeq 3\pi/2l_0$ で正の最大値となる。

4 終わりに

筆者の理解では, Charru et al.(2013) [1] は流体力学と熱力学を結びつける局所平衡の考えからモデルを作成した。そして, 局所的な定常状態が空間的に L_{sat} 遅れるとすることで砂丘の波長を説明することができた [図 6]。

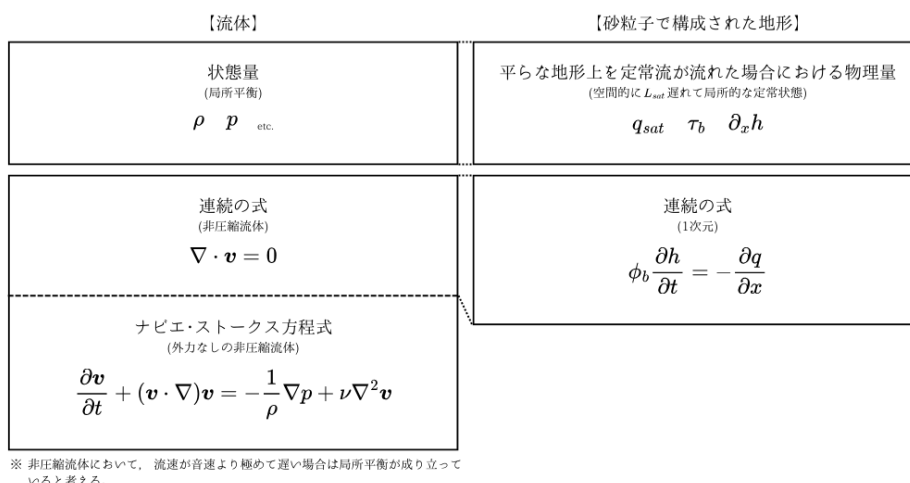


図 6 筆者の考える流体と砂粒子で構成された地形の対応

参考文献

- [1] François Charru · Bruno Andreotti · Philippe Claudin (2013) 「Sand Ripples and Dunes」, Annual Reviews of Fluid Mechanics - Volume 45, 469-493.
- [2] 西森拓 · 大内則幸 (1993) 「飛砂による地形の動力学 - 風紋と砂丘 - 」, 物性研究 61 巻 1 号, 32-43.
- [3] François Charru · E. John Hinch (2000) 「'Phase diagram' of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism of the long-wave instability」, Journal of Fluid Mechanics - Volume 414, 195-223.
- [4] 河村龍馬 (1951) 「飛砂の研究」, 東京大學理工學研究所報告 5 巻, 95-112.