

九州大学 理学部

地球惑星科学科

学士論文

砂の跳躍の数値解析と風紋・砂丘の西森モデルへの応用

Numerical Analysis of Saltation of Sands and Its Application to the Nishimori Model of Ripples and Dunes

地球内部ダイナミクス

寺田莉士

Reiji Terada

2025 年 2 月

Abstract

Ripples and dunes are aeolian landforms which are formed by erosion and deposition of sands. The typical wavelength of ripples and dunes are of the order of 1 cm and 1 km, respectively. A cellular automaton model of the formation of ripples and dunes is proposed by Nishimori and Ouchi (1993). I hereafter refer to this model as "the Nishimori model". Nishimori and Ouchi (1993) modeled the flight distance of a sand particle to be a linear function of the bed height at the position where the sand leaves the ground. In this study I numerically examined the validity of the function by calculating the motion of a sand particle. First, I numerically solved the equations of incompressible fluid to find a steady flow field above a sinusoidal sand bed. Second, I solved an equation of motion of a sand particle in the steady flow. The resulting relationship between the bed height and the flight distance is approximately linear, suggesting that the model of the flight distance in the Nishimori model is reasonable. However, the flight distance is better approximated by an exponential function of the bed height. I therefore applied the exponential model of the flight distance to the Nishimori model. Little qualitative difference was found between the results with the new and original equations, but some quantitative difference in the shape of ripples were recognized.

1 はじめに

風紋・砂丘とは、砂が跳躍し堆積することで生まれる風成地形の一種であり、波長のオーダーが cm ならば風紋, km ならば砂丘と称される。また、この風紋・砂丘形成のセルオートマトンによるモデルが西森・大内 (1993) [1] にて提案されており、本研究ではこのモデル内の「風紋スケールにおける砂粒子の飛距離の式」が妥当であるかを調べた。以後このモデルを西森モデルと呼び、まずは西森モデルの説明から行う。

1.1 西森モデル

風食作用における砂粒子の運動の素過程は以下の 3 種類に分けられる。

^{creep} 表面這行	砂粒子が地面と接しながら転がる・滑る
^{saltation} 跳躍	砂粒子が弾みながら移動する
^{suspension} 浮遊	砂粒子が空中を漂い続ける

西森モデルでは、砂粒子の運動の素過程の中でも表面這行と跳躍を単純な数式で表し、それらの組み合わせから風紋・砂丘の形成を再現する。まずは西森モデルにおいて、表面這行と跳躍がどのように書き表されているかを以下に示した。

西森モデルは、地表面を正方形の区画に区切ったセルオートマトンである。この地表面を xy 面とし、風が流れる方向を x 、それに垂直な方向を y とする。また、区画 (x, y) における砂地形の高さを $h(x, y)$ とする。

西森モデルでは、1 つの時間ステップの中で、まず砂を跳躍させ、次に表面這行させる。

跳躍のサブステップにおいては、各区間から高さ q に相当する量の砂を風下側に l だけ離れた区間へ移動させる。ここで、砂粒子の飛距離 l と砂の移動量 q は射出点の高さ $h(x, y)$ に依存する。式で書くと、

$$\begin{aligned}
 h_{n'}(x, y) &= h_n(x, y) - q(h_n(x, y)) \\
 h_{n'}(x + l(h_n(x, y)), y) &= h_n(x + l(h_n(x, y)), y) + q(h_n(x, y))
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

(n : 現在のステップ n' : 表面這行の式の計算前のステップ)

のようになる [図 1]。

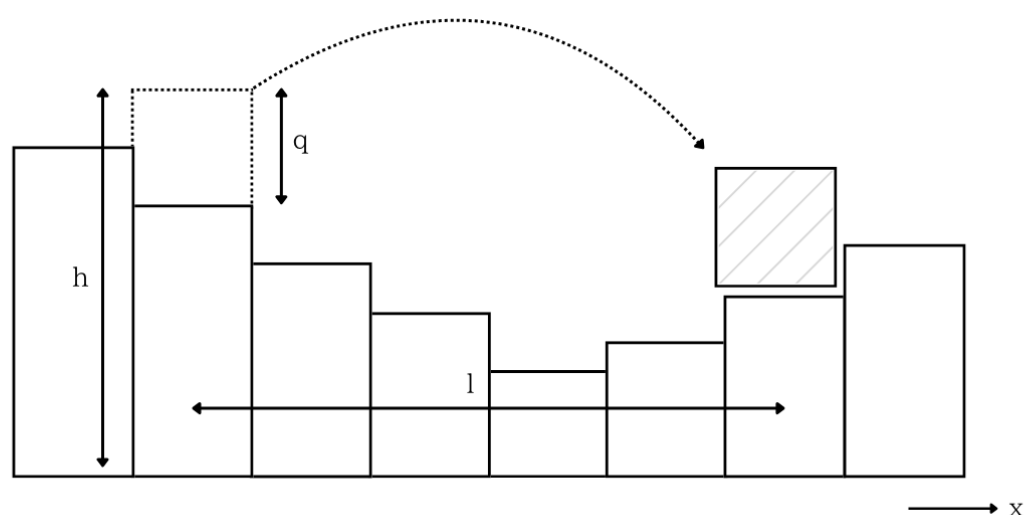


図 1 (1) 式のイメージ

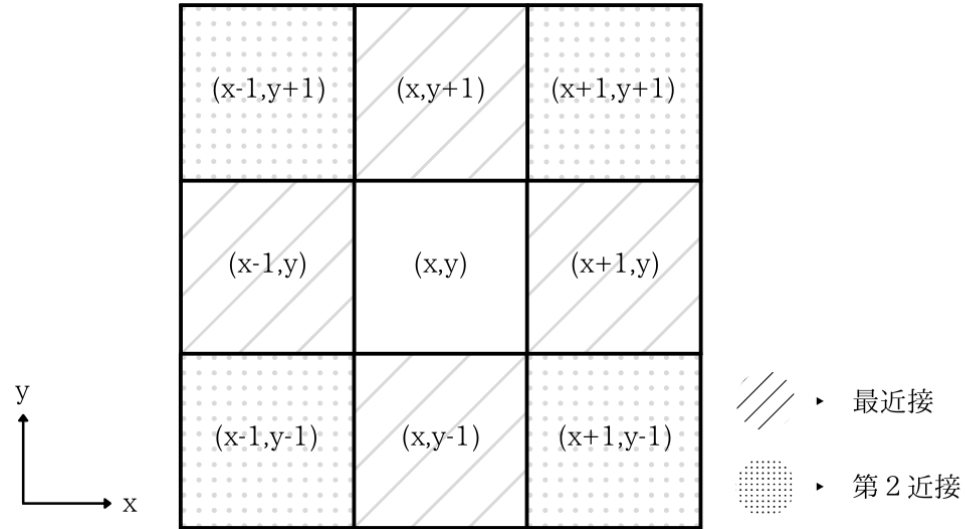


図2 最近接セルと第2近接セル

ここで, l と q の h 依存性は, 現象のスケールによって変える。具体的には, 風紋スケールならば (2a)(2b) 式, 砂丘スケールならば (3a)(3b) 式を用いる。

$$l = l_0 + bh_n(x, y) \quad (2a)$$

$$q = q_0 \quad (2b)$$

$$l = l_0 - \alpha \tanh(\nabla_x h_n(x, y)) \quad (3a)$$

$$q = q_0 + \beta \tanh(\nabla_x h_n(x, y)) \quad (3b)$$

($l_0, b, q_0, \alpha, \beta$: 定数)

表面這行の式では前述の通り, 砂粒子の転がり・滑りを表現するべきなのだが, 風による効果は跳躍の式 [(1) 式] で十分である。よって, この表面這行の式では高く積みあがった砂山が重力により崩れる効果を表すことにする。その効果を拡散で表現すると,

$$h_{n+1}(x, y) = h_n(x, y) + D \left(\frac{1}{6} \sum_{NN} h_n(x, y) + \frac{1}{12} \sum_{NNN} h_n(x, y) - h_n(x, y) \right) \quad (4)$$

(D : 定数)

のようになる。ここで \sum_{NN} は最近接セルの和, \sum_{NNN} は第2近接セルの和を表し [図2], この式の導出は付録 A に示す。

(1)-(4) 式を以て, 西森モデルを構成する式は揃った。計算手順は図3のフローチャートの通りであり, 「初期値の入力」では以下の初期・境界条件を与えた。

- 初期条件 $h_0(x, y)$ には 0 以上 1 未満な一様乱数を与える。
- 境界条件 $h_n(x, y)$ は x, y 方向ともに周期境界とする。
- 境界条件 (1) 式において $q(h_n(x, y)) > h_n(x, y)$ のとき, $q(h_n(x, y)) = h_n(x, y)$ とする。

また, (1)-(4) 式内の定数には表1の値を代入した。

l_0	b	q_0	α	β	D
5.0	2.0	0.10	5.0	0.10	0.15

表1 西森モデルの計算におけるパラメーター

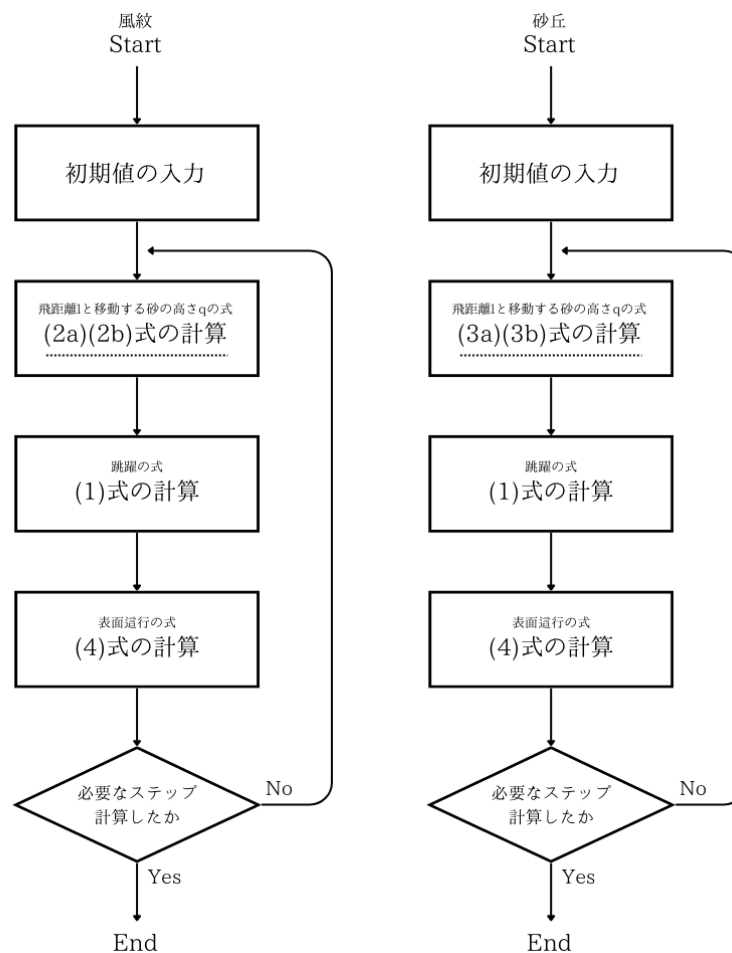


図3 西森モデルのフローチャート
[風紋の場合は左, 砂丘の場合は右に倣う。]

結果は図4・5の通りであり, 風紋や砂丘のパターンが単純なモデル構成で形成されることが確認できた。

風紋の結果では, $n = 300$ における波長が8程度となった。今回, $l_0 = 5.0$ としているので l_0 の1.6倍長い波長が確認されたことになる。ここで, $l = 8$ とすると(2a)式より $h = 1.5$ のときの飛距離だとわかり, このあたりの高さで風紋の成長する効果 [(1)式] と崩れる効果 [(4)式] が釣り合うと考えられる。

砂丘の結果では, バルハン砂丘のようなパターンが見られ, ステップを追うごとに大きくなっている。これは初期条件で発生した多数の砂丘が衝突・合体を繰り返すことに起因する。衝突が起こるのは, 小さい砂

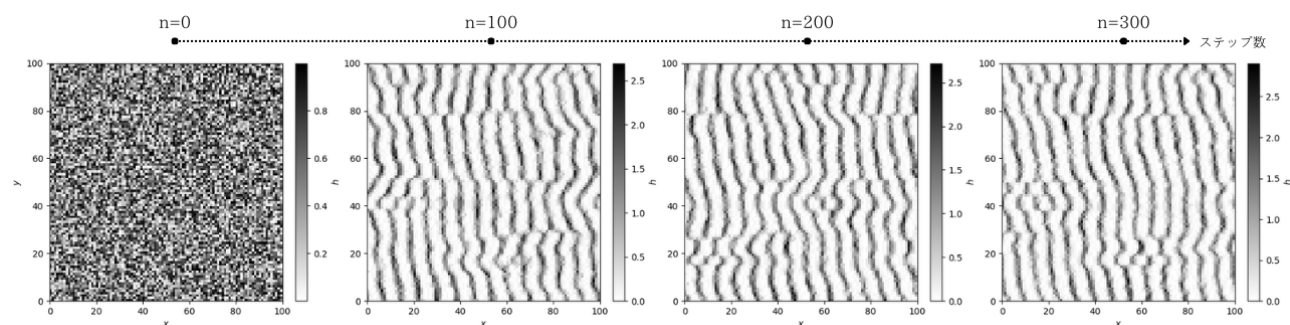


図4 風紋の計算結果
[横軸・縦軸が座標 (x, y) , 濃淡が砂地形の高さ $h(x, y)$ の値を表す。]

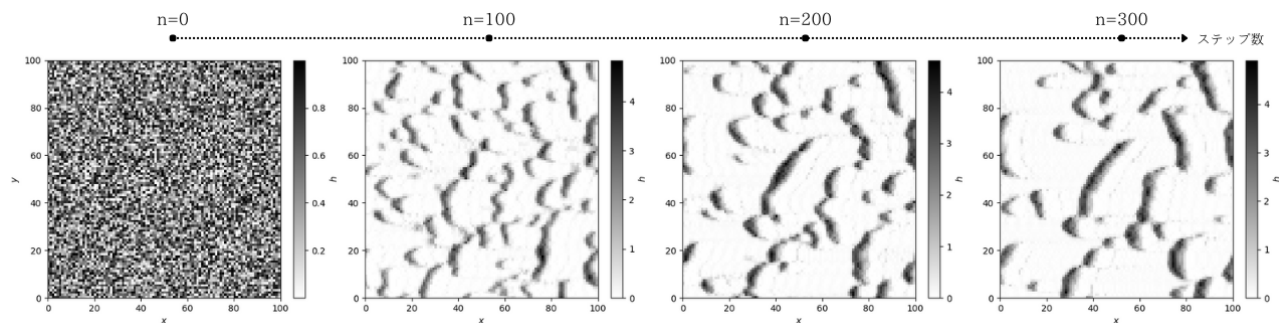


図5 砂丘の計算結果
[図の見方は図4と同じ。]

丘の方が移動速度が大きいためである。

このように西森モデルを用いて風紋・砂丘の形成をシミュレートできるのだが、本研究の疑問は(1)-(4)式に見られる砂粒子の運動のモデル化が適切であるかということである。そこで、今回は風紋スケールにおける砂粒子の飛距離の式 [(2a) 式] の妥当性を砂粒子の運動の力学を解くことにより確認した。

2 問題

砂粒子の飛距離 l と射出点の高さ h の関係を解析するために以下の問題を作成した。

- | | |
|----|-----------------------------------|
| 問題 | 風紋上の定常状態の流れ場を求める。 |
| 問題 | 問題 で求めた流れ場を用いて、砂粒子の運動ならびに飛距離を求める。 |

ここで、砂粒子から流れ場への影響は無視し、砂粒子自体も質点と考えた。また、流れ場の時間発展を解きながら砂粒子の運動を考えることも難しいため、今回は定常な流れ場を扱う [図6]。

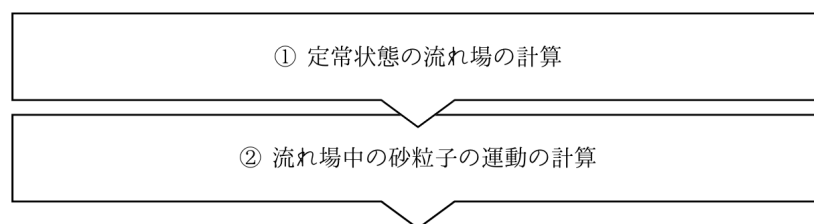


図6 解析のフロー

解析にあたって、流れ方向を x 、鉛直上方向を z とした2次元座標平面内の運動を考える。本研究では風紋の高さ $h(x)$ を予め余弦波で与える。また、風紋自体の移動も考えない。詰まる所、風紋を余弦波型の固定床として扱う。

$$h(x) = h_0 \left(\cos \left(2\pi \frac{k_{bed}}{W} x \right) + 1 \right) \quad (5)$$

(h_0 : 固定床の振幅 $k_{bed} (\in \mathbb{N})$ W : 系の横幅)

2.1 流体の基礎方程式と初期・境界条件

問題 を解くための基礎方程式と初期・境界条件を定めていく。

まず、流れ場を求めるための基礎方程式は、流体の速度 $\boldsymbol{v} = (u, w)^T$ と圧力 p についての非圧縮流体の式 [(6)(7) 式] である。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu (\nabla^2 \mathbf{v}) \quad (7)$$

(ρ : 流体の密度 ν : 動粘性率)

続いて, (6)(7) 式の初期条件は後述の境界条件を満たすようなクエット流の解析解とする。クエット流の解析解の導出は付録 B に記してあり, ここから初期条件を定めると,

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_0 \frac{z-2h_0}{H-2h_0} & (2h_0 < z \leq H) \\ 0 & (0 \leq z \leq 2h_0) \end{cases} \quad w|_{t=0} = 0 \quad p|_{t=0} = 0 \quad (8)$$

(H : 系の縦幅 u_0 : $z = H$ での x 方向の速さ)

となる。この初期条件は $2h_0 \leq z \leq H$ におけるクエット流である。流体計算は, 実質的に $t = 0$ で $z = 2h_0$ にあった蓋を取り外したときの解を求めることとなる。

境界条件については x 方向と z 方向で異なる。 x 方向には W を 1 周期とした周期境界を置く。つまり, 速度 \mathbf{v} ・圧力 p は,

$$\mathbf{v}|_{x=x+W} = \mathbf{v}|_{x=x} \quad p|_{x=x+W} = p|_{x=x} \quad (9)$$

を満たす。 z 方向は上部・固定床ともに非滑り境界を置き, 上部に限り $u = u_0$ とする。すなわち,

$$u|_{z=H} = u_0 \quad w|_{z=H} = 0 \quad (10)$$

$$u|_{z=h(x)} = 0 \quad w|_{z=h(x)} = 0 \quad (11)$$

であり, (6)-(11) 式を解くことで風紋上の定常状態の流れ場が求まる。

2.2 質点の基礎方程式と初期条件

問題 を式に起こす。砂粒子へは重力と抗力のみが加わっているため, 砂粒子の位置 $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \zeta)^T$ について運動方程式を立てると,

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} = -mg \mathbf{e}_z - 3\pi\rho\nu d \left(\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} - \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) \right) \quad (12)$$

(m : 砂粒子の質量 g : 重力加速度の大きさ d : 粒径)

となる。ここで, 砂粒子周りの流れは粒子レイノルズ数 $Re_p < 2$ を満たしており^{*1}, 抗力はストークス則に則るものと仮定する。また, \mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトルである。

次に, (12) 式の初期条件は以下のように定める。

$$\boldsymbol{\xi}|_{t=0} = (\xi_0, h(\xi_0))^T \quad (13)$$

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}} \begin{pmatrix} \cos \left(\theta + \arctan \left(\left. \nabla_x h(x) \right|_{x=\xi_0} \right) \right) \\ \sin \left(\theta + \arctan \left(\left. \nabla_x h(x) \right|_{x=\xi_0} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (14)$$

(ξ_0 : 初期位置の x 座標 τ_b : $z = h(\xi_0)$ での剪断応力の大きさ θ : 射出角度)

^{*1} $Re_p = |d\boldsymbol{\xi}/dt - \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi})| \times d/\nu$ である。

ここで初期速度は、大きさを摩擦速度 $\sqrt{\tau_b/\rho}$ の値、向きを初期位置での勾配に角度 θ を加えた方向とし、 τ_b は以下の式から求まる。

$$\tau_b = \rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h(\xi_0)} + \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{z=h(\xi_0)} \right) \quad (15)$$

よって、(12)-(15) 式を解くことで砂粒子の運動が求まる。

飛距離 l は、着陸時間を t_l として $l = \xi|_{t=t_l} - \xi_0$ と書けるので、砂粒子の運動が求めれば段階的に飛距離 l も求まる。また、ここで $t_l = \min \{t \mid h(\xi) = \zeta, t > 0\}$ である*2。

3 流体の数値解析

それでは、実際に問題を数値解析により解いていく。

本数値計算では、数値解析の手法として格子差分法を採用した。系の2次元平面を正方形の格子で区切り、 x 方向を $i [= 1, 2, \dots, N_x]$ 、 z 方向を $k [= 1, 2, \dots, N_z]$ とラベリングした。ここで、この格子点番号 (i, k) と座標 (x, z) は以下のように関係づけられる [図 7]。

$$x(i) = (i-1)\Delta r \quad z(k) = (k-1)\Delta r \quad (16)$$

(Δr : 格子点間隔)

また、系の横幅と縦幅を表す W と H も格子点間隔 Δr を用いて、

$$W = N_x \Delta r \quad H = N_z \Delta r \quad (17)$$

とする。

3.1 境界条件の離散化

境界条件を表す (9)-(11) 式をそれぞれ離散化すると、

$$v|_{i=i+N_x} = v|_{i=i} \quad p|_{i=i+N_x} = p|_{i=i} \quad (18)$$

$$u|_{k=N_z+1} = u_0 \quad w|_{k=N_z+1} = 0 \quad (19)$$

$$u|_{z(k) \leq h(x(i))} = 0 \quad w|_{z(k) \leq h(x(i))} = 0 \quad (20)$$

のようになる。ここで、 $i = 0, i = N_x + 1, k = N_z + 1$ に格子点を余分に設けた。これら系の外側に配置された格子点は、以後登場する境界条件を満たす速度・圧力値の代入サブルーチンの作成に必要であり、「仮想格子点」と呼ぶ [図 7]。

3.1.1 x 方向周期境界における速度・圧力値の代入サブルーチン

(18) 式を満たす速度・圧力値を x 方向両側の仮想格子点へ代入するサブルーチンを作る。他の境界条件の代入サブルーチンもあてはまるが、これは速度・圧力計算においてコードの条件分岐を減らすためである。

(18) 式より、 $i = 0$ または $i = N_x + 1$ での値はそれぞれ $i = N_x$ と $i = 1$ の値に等しい。よって、

$$v_{0,k} = v_{N_x,k} \quad p_{0,k} = p_{N_x,k} \quad v_{N_x+1,k} = v_{1,k} \quad p_{N_x+1,k} = p_{1,k} \quad (21)$$

が成り立つ。

*2 $\min A$ は集合 A のうち最小の要素を返す関数である。

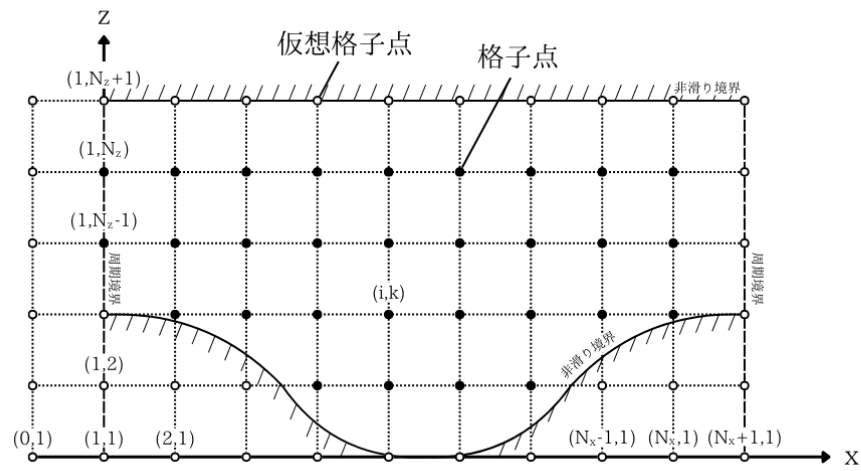


図7 格子点の配置

この (21) 式をサブルーチン化したものは図 8 の疑似コードに示す通りである。

3.1.2 z 方向上部非滑り境界における速度・圧力値の代入サブルーチン

(19) 式を満たす速度・圧力値を z 方向上部の仮想格子点へ代入するサブルーチンを作る。

(19) 式より、速度 $v_{k=N_z+1}$ はそのまま、

$$u_{i,N_z+1} = u_0 \quad w_{i,N_z+1} = 0 \tag{22}$$

である。

次に圧力 p_{i,N_z+1} は、 p_{i,N_z} の Δr の 1 次までのテイラー展開 [(23) 式] から求める。

$$p_{i,N_z} \simeq p_{i,N_z+1} - \Delta r \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{i,N_z+1} \tag{23}$$

$\partial p / \partial z|_{i,N_z+1}$ は (7) 式より、

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{i,N_z+1} = \rho \nu \left. \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|_{i,N_z+1}$$

である。また、 w_{i,N_z} の Δr の 2 次までのテイラー展開から、

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|_{i,N_z+1} \simeq \frac{2w_{i,N_z}}{(\Delta r)^2}$$

```

SUB Periodic_Velocity (u, w)
DO k = 1, Nz+1
  u(0, k) = u(Nx, k)
  w(0, k) = w(Nx, k)
  u(Nx+1, k) = u(1, k)
  w(Nx+1, k) = w(1, k)
END DO
END SUB

SUB Periodic_Pressure (p)
DO k = 1, Nz+1
  p(0, k) = p(Nx, k)
  p(Nx+1, k) = p(1, k)
END DO
END SUB
    
```

図 8 x 方向周期境界における速度・圧力値の代入サブルーチンの疑似コード
[左が速度、右が圧力のコードである。]

```

SUB Imaginary_Velocity_Over_Top (u, w)      SUB Imaginary_Pressure_Over_Top (p)
DO i = 1, Nx                                DO i = 1, Nx
  u(i, Nz+1) = u0                            p(i, Nz+1) = p(i, Nz) + 2*ρ*ν*w(i, Nz)/dr
  w(i, Nz+1) = 0                              END DO
END DO                                        END SUB
END SUB

```

図9 z 方向上部非滑り境界における速度・圧力値の代入サブルーチンの疑似コード
[上が速度, 下が圧力のコードである。]

が成り立つ。したがって、最終的に、

$$p_{i,N_z+1} \simeq p_{i,N_z} + 2 \frac{\rho\nu}{\Delta r} w_{i,N_z} \quad (24)$$

が得られる。

以上, (22)(24) 式をサブルーチン化したものは図9の疑似コードに示す通りである。

3.1.3 z 方向固定床非滑り境界における速度・圧力値の代入サブルーチン

(20) 式を満たす速度・圧力値を z 方向固定床下部の仮想格子点へ代入するサブルーチンを作る。

(20) 式より, $h(x(i)) - \Delta r < z(k) \leq h(x(i))$ を満たす k について、

$$u_{i,k} = 0 \quad w_{i,k} = 0 \quad (25)$$

が成り立つ。

また, 圧力は、

$$p_{i,k+1} \simeq p_{i,k} + \Delta r \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{i,k}$$

$$p_{i,k+2} \simeq p_{i,k} + 2\Delta r \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{i,k}$$

の2式を Δr の項が消えるように足し合わせて、

$$p_{i,k} \simeq 2p_{i,k+1} - p_{i,k+2} \quad (26)$$

となる。

ここで, (25)(26) 式は固定床内部の格子点が縦に並ばないという仮定で作られた式なので, 固定床の傾きが1を超えない, すなわち、

$$\frac{2\pi k_{bed} h_0}{N_x \Delta r} \leq 1 \quad (27)$$

という条件下でのみの運用となる。

以上, (25)(26) 式をサブルーチン化したものは図10の疑似コードに示す通りである。

3.2 基礎方程式の離散化

非圧縮流体では常に $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ [(6) 式] を満たさないといけないため, それに準じた処理を必要とする。これを受け, 本数値計算では非圧縮流体の解法に射影法を採用した。

射影法とは, (7) 式を時間について差分近似した以下 (28) 式において, 左辺の第1項と右辺の第1項, 左辺の第2項と右辺の第2・3項を等号で結ぶことで成立する。ここで, 左辺の \mathbf{v}^* は「圧力勾配項を無視した仮想状態での速度 [2]」であり, 今回は \mathbf{v} の境界条件を \mathbf{v}^* も満たすと仮定する。

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} \simeq -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\nabla^2 \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (28)$$

(n : 現在のステップ Δt : 時間間隔)

```

SUB Imaginary_Velocity_Under_Bed (u, w)
  DO i = 1, Nx
    DO k = 1, Nz
      IF (h(x(i)) - dr < z(k) <= h(x(i))) THEN
        u(i, k) = 0
        w(i, k) = 0
      END IF
    END DO
  END DO
END SUB

SUB Imaginary_Pressure_Under_Bed (p)
  DO i = 1, Nx
    DO k = 1, Nz
      IF (h(x(i)) - dr < z(k) <= h(x(i))) THEN
        p(i, k) = 2*p(i, k+1) - p(i, k+2)
      END IF
    END DO
  END DO
END SUB

```

図 10 z 方向固定床非滑り境界における速度・圧力値の代入サブルーチンの疑似コード
[上が速度, 下が圧力のコードである。]

3.2.1 仮想状態における速度の計算

まずは仮想状態における速度 \mathbf{v}^* を求める。(28) 式の左辺の第 2 項と右辺の第 2・3 項を等号で結ぶと,

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} \simeq \nu(\nabla^2 \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (29)$$

のようになる。そして, (29) 式を \mathbf{v}^* について整理し, ∇ の差分近似を取ると,

$$\begin{aligned} v_{i,k}^* \simeq v_{i,k}^n + \Delta t \left(\nu \left(\frac{v_{i+1,k}^n - 2v_{i,k}^n + v_{i-1,k}^n}{(\Delta r)^2} + \frac{v_{i,k+1}^n - 2v_{i,k}^n + v_{i,k-1}^n}{(\Delta r)^2} \right) \right. \\ \left. - \left(\max\{u_{i,k}^n, 0\} \frac{v_{i,k}^n - v_{i-1,k}^n}{\Delta r} + \min\{u_{i,k}^n, 0\} \frac{v_{i+1,k}^n - v_{i,k}^n}{\Delta r} \right. \right. \\ \left. \left. + \max\{w_{i,k}^n, 0\} \frac{v_{i,k}^n - v_{i,k-1}^n}{\Delta r} + \min\{w_{i,k}^n, 0\} \frac{v_{i,k+1}^n - v_{i,k}^n}{\Delta r} \right) \right) \quad (30) \end{aligned}$$

が得られる*3。ここで, (29) 式の移流項の差分近似には風上差分を用いた。

この \mathbf{v}^* を計算するサブルーチンは図 11 左上の疑似コードに示す通りである。

3.2.2 圧力の計算

次に圧力 p^{n+1} を求める。(28) 式の左辺と右辺の第 1 項を結ぶと,

$$\frac{v^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} \simeq -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (31)$$

が得られる。ここで, (31) 式を v^{n+1} について整理し, 発散をとると,

*3 $\max A$ は集合 A のうち最大の要素を返す関数である。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} \simeq \nabla \cdot \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla^2 p^{n+1} \quad (32)$$

のようになり、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ [(6) 式] より左辺は 0 である。よって、この (32) 式の ∇ を差分近似すると、

$$p_{i,k}^{n+1} \simeq \frac{1}{4} \left(p_{i+1,k}^{n+1} + p_{i-1,k}^{n+1} + p_{i,k+1}^{n+1} + p_{i,k-1}^{n+1} - \frac{\rho \Delta r}{2\Delta t} (u_{i+1,k}^* - u_{i-1,k}^* + w_{i,k+1}^* - w_{i,k-1}^*) \right) \quad (33)$$

となる。

(33) 式は p^{n+1} についての $N_x \times N_z$ 元連立方程式^{*4}であり、本数値計算ではガウス・ザイデル法を用いて解く。このガウス・ザイデル法を用いて圧力 p を計算するサブルーチンは図 11 右の疑似コードに示す通りである。

3.2.3 速度の計算

最後に速度 \mathbf{v}^{n+1} を求める。(31) 式を \mathbf{v}^{n+1} について整理し、 ∇ の差分近似を取ると、

$$\mathbf{v}_{i,k}^{n+1} \simeq \mathbf{v}_{i,k}^* - \frac{\Delta t}{2\rho\Delta r} \begin{pmatrix} p_{i+1,k}^{n+1} - p_{i-1,k}^{n+1} \\ p_{i,k+1}^{n+1} - p_{i,k-1}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (34)$$

となる。

この速度 \mathbf{v}^{n+1} を計算するサブルーチンは図 11 左下の疑似コードに示す通りである。

```

SUB Velocity_Prediction (u, w)          SUB Pressure (p)
DO i = 0, Nx+1                          DO
  DO k = 1, Nz+1                          DO i = 0, Nx+1
    u_tmp(i, k) = u(i, k)                DO k = 1, Nz+1
    w_tmp(i, k) = w(i, k)                p_tmp(i, k) = p(i, k)
  END DO                                  END DO
END DO                                    END DO

DO i = 1, Nx                              CALL Imaginary_Pressure_Over_Top (p)
DO k = 1, Nz                              CALL Imaginary_Pressure_Under_Bed (p)
  IF (h(x(i)) < z(k)) THEN              CALL Periodic_Pressure (p)
    u(i, k) = ... (30)
    w(i, k) = ... (30)
  END IF
END DO
END DO
is_finished = TRUE
DO i = 1, Nx
  DO k = 1, Nz
    IF (h(x(i)) < z(k)) THEN
      p(i, k) = ... (33)
      IF (εp < (p(i, k) - p_tmp(i, k))**2) THEN
        is_finished = FALSE
      END IF
    END IF
  END DO
END DO
IF (is_finished == TRUE) EXIT

SUB Velocity_Correction (u, w)
DO i = 1, Nx
  DO k = 1, Nz
    IF (h(x(i)) < z(k)) THEN
      u(i, k) = ... (34)
      w(i, k) = ... (34)
    END IF
  END DO
END DO
END SUB

```

図 11 速度と圧力の計算サブルーチンの疑似コード
[左上が仮想状態における速度、右が圧力、左下が速度のコードである。]

*4 固定床があるので、実際の方程式の数は $N_x \times N_z$ よりも少ない。

```

PROGRAM Main
  (Declaration & Initial State)

  CALL Imaginary_Velocity_Over_Top (u, w)
  CALL Imaginary_Velocity_Under_Bed (u, w)

  DO n = 1, N
    CALL Periodic_Velocity (u, w)

    CALL Velocity_Prediction (u, w)

    CALL Periodic_Velocity (u, w)

    CALL Pressure (p)

    CALL Imaginary_Pressure_Over_Top (p)
    CALL Imaginary_Pressure_Under_Bed (p)
    CALL Periodic_Pressure (p)

    CALL Velocity_Correction (u, w)
  END DO
END PROGRAM

```

図 12 速度と圧力を求めるプログラムの疑似コード

3.3 解析

速度 v と圧力 p を計算するプログラムは、3.1 節と 3.2 節で作成したサブルーチンを用いて図 12 の疑似コードのように書ける。

3.3.1 定常状態となるまでのステップ数の概算

図 12 のプログラムにより、任意の時間における流れ場 v を計算できるようになった。しかし、どれくらいの時間が経過すれば定常な流れ場となるかわからないので、そのステップ数を以下で概算する。

流れ場 v が定常状態となる目安として、以下の式を仮定する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (35)$$

$u \sim U$, $z \sim L$, $t \sim T$ と置くと、(35) 式より、

$$\frac{U}{T} \sim \nu \frac{U}{L^2}$$

が考えられ、 $T \sim L^2/\nu$ と推定される。ここで、定常状態となるために必要なステップ数を N とすると、 $N = T/\Delta t \sim L^2/\nu\Delta t$ である。

さて、今回の計算では、初期の状態 [(8) 式] から $0 \leq z \leq 2h_0$ の空間へ十分に拡散が行われたとき、定常状態となると考えられる。よって、 $L = h_0$ とすると、

$$N \sim \frac{1}{\Delta t} \frac{h_0^2}{\nu} \quad (36)$$

となり、以後この式を N の決定に用いる。

3.3.2 結果

各パラメータはそれぞれ $2\pi k_{bed} h_0 / N_x \Delta r \leq 1$ [(27) 式] と CFL 条件に基づく $u_0 < \Delta r / \Delta t$ の 2 式を満たさないといけない。これを受け、今回の計算では表 2 の値を入力した。

$N_x \times N_z$	N	Δr (mm)	Δt (s)	u_0 (m/s)	h_0 (mm)	k_{bed}	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /s)
100 × 30	1000	0.050	5.0×10^{-6}	1.0	0.25	1	1.3	1.5×10^{-5}

表 2 波長 5 mm の風紋の流体計算におけるパラメータ

また、風紋の波長スケールのレイノルズ数 $Re = u_0 N_x \Delta r / \nu \simeq 3.3 \times 10^2$ となっている。

結果は図 13・14 に示す通りである。

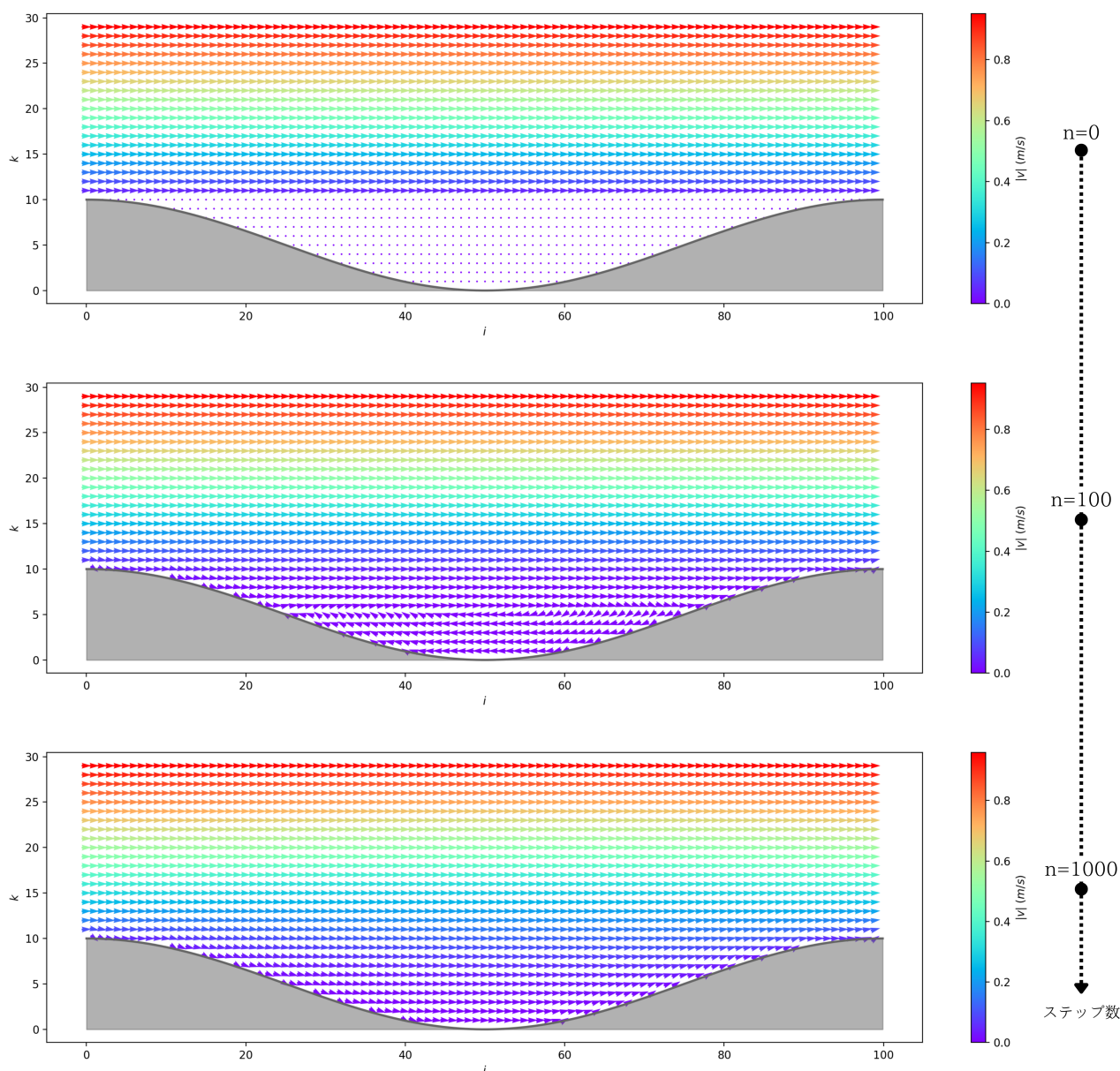


図 13 速度の計算結果

[横軸・縦軸は格子点番号 (i, k) , 矢印の色・向きはそれぞれ速度 v の大きさ・方向を表す。]

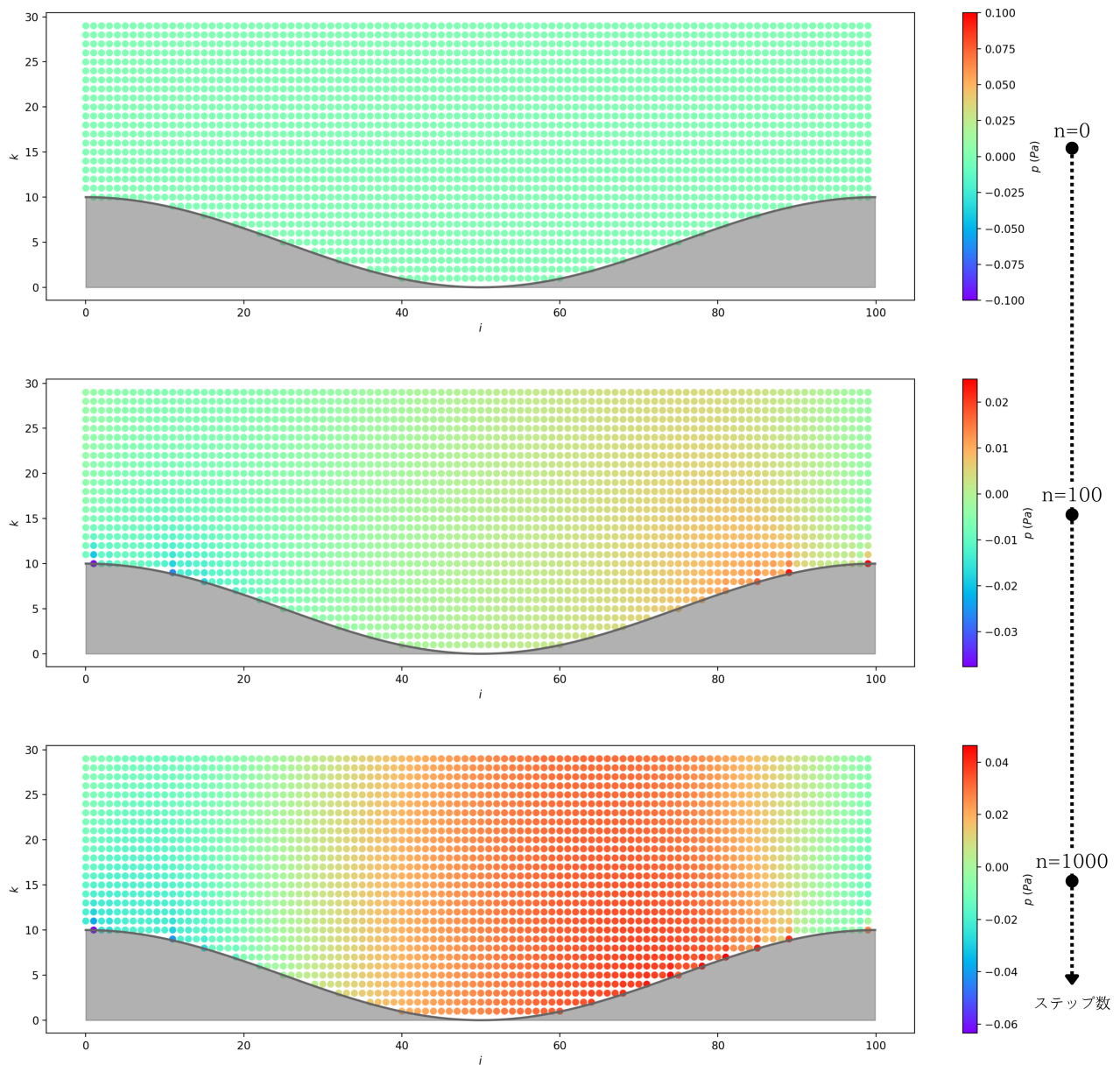


図 14 圧力の計算結果

[横軸・縦軸は図 14 と同じであり、マーカーの色は圧力 p の値を表す。]

速度場 [図 13] は, (36) 式で導いたステップ数を経て, 定常状態 [$n = 1000$] となった。このときの流れ場は層流である。途中, $n = 100$ では渦が確認されたものの粘性拡散の効果から消滅した。

圧力場 [図 14] は, 時間が経つにつれ, 山の上流側と下流側でそれぞれ高圧と低圧という関係になった。

以上, 波長が $N_x \Delta r / k_{bed} \simeq 5.0$ (mm) のときの流れ場である。しかし, 実際の風紋は波長が数 cm 程度あるので, 問題 の定常な流れ場としては表 3 のパラメーターを入力したときの数値解を用いる。また, このときの速度場・圧力場は図 13・14 と同様の結果になった。

$N_x \times N_z$	N	Δr (mm)	Δt (s)	u_0 (m/s)	h_0 (mm)	k_{bed}	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /s)
1200 × 60	2000	0.025	2.5×10^{-6}	1.0	0.25	1	1.3	1.5×10^{-5}

表 3 波長 3 cm の風紋の流体計算におけるパラメーター

固定床での剪断応力・飛距離の計算でも断りがなければ、表 3 の値を用いる。

3.4 固定床での剪断応力の測定

固定床での剪断応力 τ_b の測定を行う。(15) 式より τ_b は定義されているが、 $z = h(\xi_0)$ に格子点がないので工夫をして求める。

$h(x(i)) \leq z(k) < h(x(i)) + \Delta r$ を満たす (i, k) についての剪断応力 $\tau_{i,k}$ と $\tau_{i,k+1}$ を考える。このとき、 $x = x(i)$ における固定床での剪断応力 τ_{bi} は、

$$\tau_{bi} \simeq \tau_{i,k} + (h(x(i)) - z(k)) \frac{\tau_{i,k+1} - \tau_{i,k}}{\Delta r} \quad (37)$$

のようにテイラー展開、そして差分近似できる。

一般に、剪断応力 τ は、

$$\tau = \rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (38)$$

である。この (38) 式の差分近似を取り、 $\tau_{i,k}$ と $\tau_{i,k+1}$ を以下のように求めた。

(i, k) は固定床表層の格子点なので、 $(i-1, k)$ 、 $(i+1, k)$ の格子点に速度 v の値が入っているかで場合分けをし、

$$\tau_{i,k} \simeq \begin{cases} \rho\nu \left(\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta r} + \frac{w_{i+1,k} - w_{i-1,k}}{2\Delta r} \right) & (h(x(i-1)) \leq z(k) \cap h(x(i+1)) \leq z(k)) \\ \rho\nu \left(\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta r} + \frac{w_{i+1,k} - w_{i,k}}{\Delta r} \right) & (z(k) < h(x(i-1)) \cap h(x(i+1)) \leq z(k)) \\ \rho\nu \left(\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta r} + \frac{w_{i,k} - w_{i-1,k}}{\Delta r} \right) & (h(x(i-1)) \leq z(k) \cap z(k) < h(x(i+1))) \end{cases} \quad (39)$$

のような計算式となる。 $(i, k+1)$ は左右上下の格子点に速度 v の値が入っているので、

$$\tau_{i,k+1} \simeq \rho\nu \left(\frac{u_{i,k+2} - u_{i,k}}{2\Delta r} + \frac{w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k+1}}{2\Delta r} \right) \quad (40)$$

となる。

```

SUB Shear_Stress_On_Bed (  $\tau_b$  )
DO i = 1, Nx
  DO k = 1, Nz
    IF (h(x(i)) <= z(k) < h(x(i)) + dr) THEN
      IF (z(k) < h(x(i-1))) THEN
         $\tau(1) = \dots$  (39)
      ELSE IF (z(k) < h(x(i+1))) THEN
         $\tau(1) = \dots$  (39)
      ELSE
         $\tau(1) = \dots$  (39)
      END IF
       $\tau(2) = \dots$  (40)
       $\tau_b(i) = \tau(1) + (\tau(2) - \tau(1)) / dr * (h(x(i)) - z(k))$  (37)
    END IF
  END DO
END DO
END SUB

```

図 15 固定床での剪断応力の計算サブルーチンの疑似コード
[$\tau_{i,k}$ と $\tau_{i,k+1}$ はそれぞれ $\tau(1)$ と $\tau(2)$ で置いた。]

この (37)(39)(40) 式を用いて τ_b を計算するサブルーチンは図 15 の疑似コードに示す通りである。ここで、 τ_{b_i} の値は $i = 1$ から $i = 2000$ までの地点でそれぞれ測定される。

定常な流れ場 [$n = 2000$] における固定床での剪断応力を測定した結果は図 16 の通りである。

この結果から、剪断応力 τ_b と固定床の高さ h には正の相関が見られた。また、図 16 のプロットに見られる τ_b の細かな振動は、固定床の形状を正方形の格子で表現したことが原因である。

以上の結果は、問題 の初期条件に引き継がれ、飛距離の計算に用いられる。

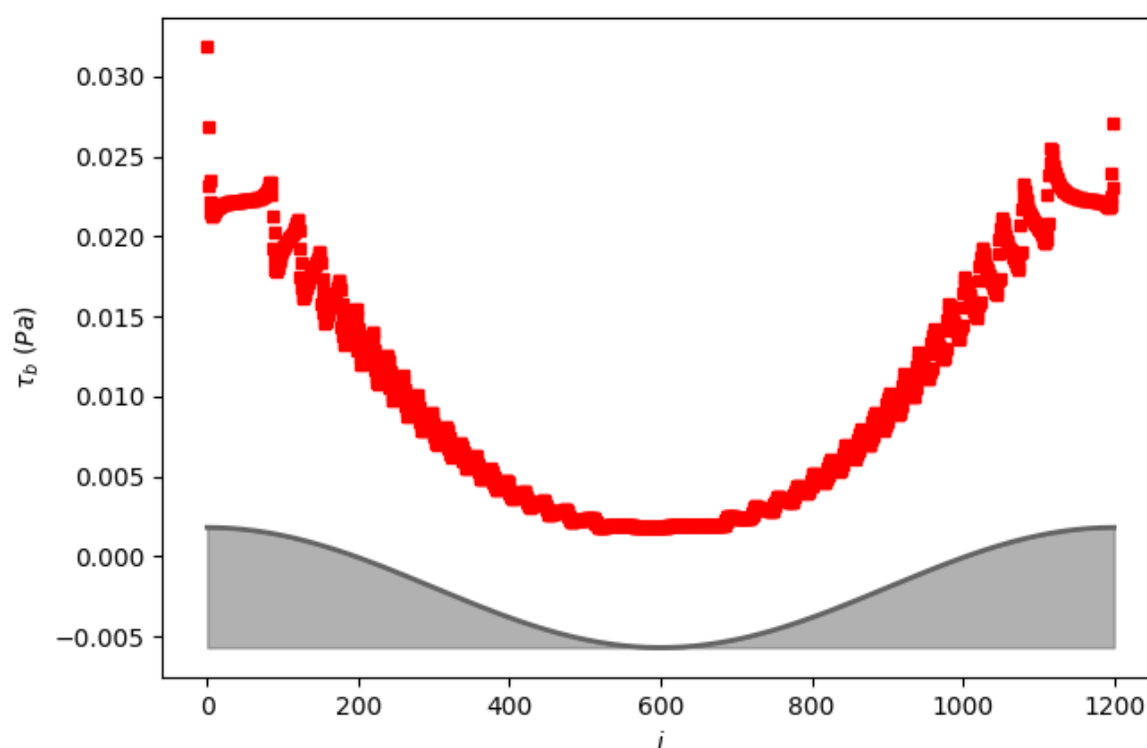


図 16 固定床での剪断応力の測定結果
[横軸は x 方向の格子点番号 i , 縦軸は τ_b の値を表す。]

4 質点の数値解析

問題 を数値解析により解く。

4.1 基礎方程式の離散化

砂粒子の速度について、運動方程式 [(12) 式] の差分近似を取ると、

$$\frac{d\xi^{n+1}}{dt} \simeq \frac{d\xi^n}{dt} + \Delta t_p \left(-g\mathbf{e}_z - \frac{3\pi\rho\nu d}{m} \left(\frac{d\xi^n}{dt} - \mathbf{v}(\xi) \right) \right) \quad (41)$$

(n : 現在のステップ)

のようになる。ここで、流体解析と区別するため、時間間隔を Δt_p とした。


```

SUB Length (l)
  DO i = 1, Nx
    ξ = x(i)
    ζ = h(x(i))
    ξ' = (τb/ρ)0.5 cos(θ + arctan(dh/dx(x(i))))
    ζ' = (τb/ρ)0.5 sin(θ + arctan(dh/dx(x(i))))

    is_landed = FALSE
    loop_count = 0
    DO
      ξ = ξ + dt*ξ' (44)
      ζ = ζ + dt*ζ' (44)

      IF (x(Nx) < ξ) THEN
        ξ = ξ - x(Nx)
        loop_count = loop_count + 1
      END IF

      IF (z(Nz) < ζ) STOP

      IF (ζ <= h(ξ)) THEN
        l(i) = ξ - x(i) + loop_count*(x(Nx)-x(1))
        is_landed = TRUE
      END IF

      IF (is_landed == TRUE) EXIT

      DO ii = 1, Nx
        DO kk = 1, Nz
          IF (x(ii) <= ξ < x(ii+1) AND z(kk-1) < ζ <= z(kk)) THEN
            ξ' = ... (41)(43)
            ζ' = ... (41)(43)
          END IF
        END DO
      END DO
    END DO
  END DO
END SUB

```

図 18 飛距離の計算サブルーチンの疑似コード
 [(43) 式における (i, k) を (ii, kk) と置いた。]

今回の計算では、(14) 式内の射出角度 θ も変化させ、 10° 、 20° 、 30° 、 40° の 4 つの条件で測定した。

測定の結果は図 19 の通りである。

図 16 と比較し、固定床での剪断応力が大きいところで飛距離も長くなった。それ故、射出点の高さ h が大きければ、飛距離 l も伸びるという結果になった。

また、射出角度 θ を大きくすると、飛距離 l も大きくなった。

図 20 では、横軸を射出点の高さ h 、縦軸を飛距離 l としてプロットし直した。これを見ると、西森モデルの飛距離 l を h の一次関数で表す (2a) 式が自然な近似だったと分かる。

しかし、プロットをよく見ると h が大きくなるにつれ、傾きも急になっている。本研究では、これを指数

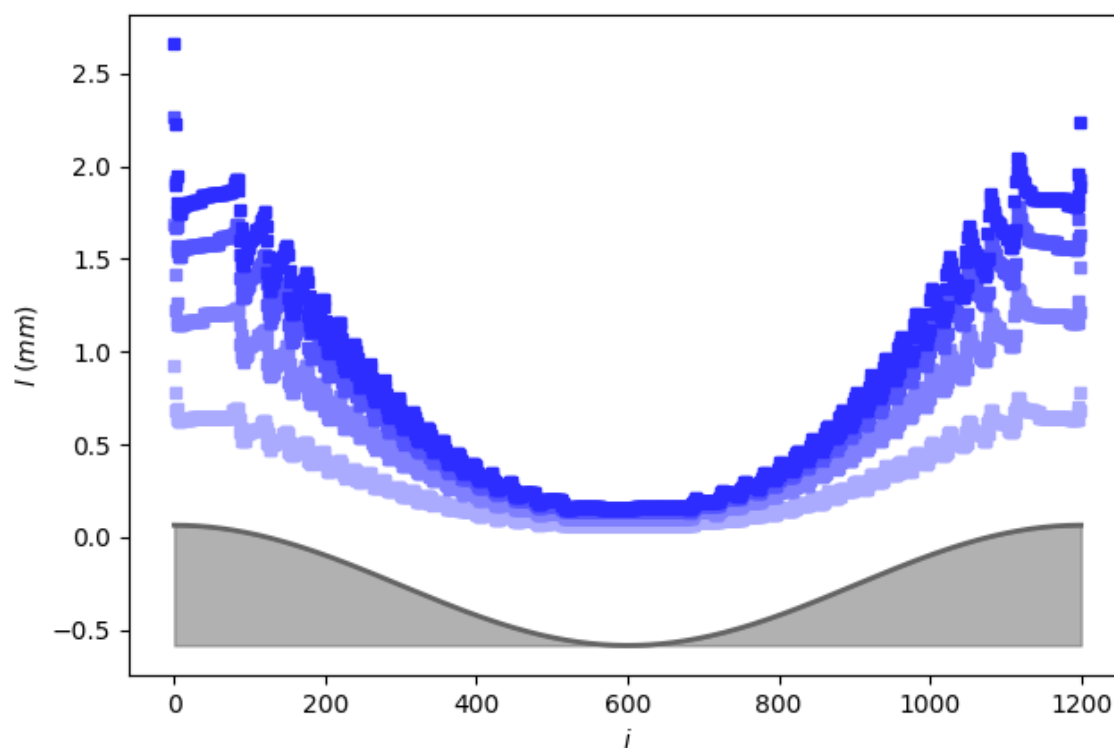


図 19 飛距離の測定結果

[横軸は x 方向の格子点番号 i , 縦軸は l の値を表す。また, 色の薄い方から $\theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ である。]

関数と判断し, $l = a^h - 1$ [a : フィッティングする定数] の式でフィッティングさせた [図 20 の水色の実線]。フィッティングの結果は表 5 に示す通りである。

a (mm)
5.4

表 5 フィッティングの結果

3 節と 4 節より, 問題は解かれ, 飛距離と高さの関係を取得できた。

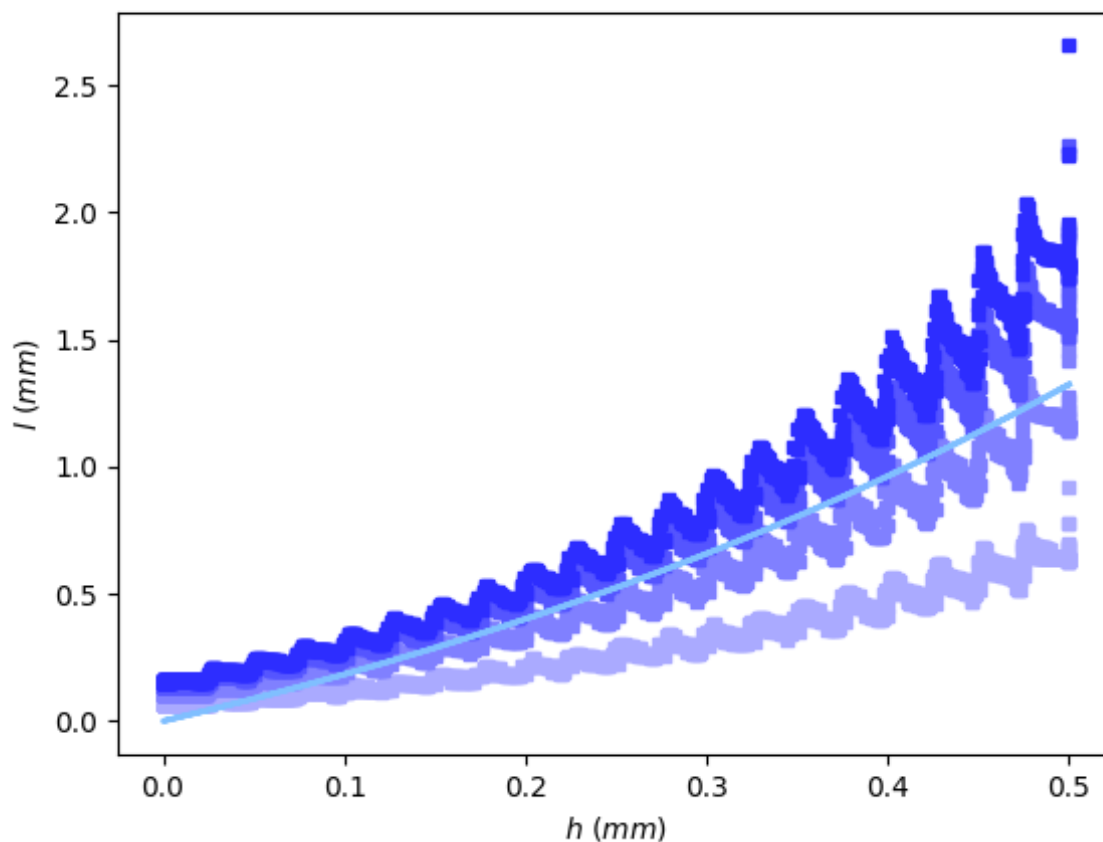


図 20 射出点の高さ h と飛距離 l の相関
 [横軸・縦軸はそれぞれ h と l の値を表し、実線は全プロットとフィッティングした曲線である。]

5 新たな飛距離の式の西森モデルへの導入

4 節で得た新たな飛距離の式を西森モデルに取り入れ、計算を行った。ここで、新たな飛距離の式は以下の形で導入した。

$$l = \frac{N'_x}{10(a^{2h_0} - 1)} (a^{2h_0h} - 1) \quad (45)$$

(N'_x : 西森モデルにおける x 方向のセルの数)

計算は図 3 左のフローチャートのうち (2a) 式と (45) 式を入れ替えただけである。また、 q_0 、 D は表 6 の値を代入した。

N'_x	q_0	D
100	0.10	0.70

表 6 新たな飛距離の式を用いた西森モデルの計算におけるパラメーター

結果は図 21 の通りである。

図 4 の結果と比べ、定性的に大きな差異は見られなかった。しかし、高さ h が極大となる部分の幅や波長は異なった。

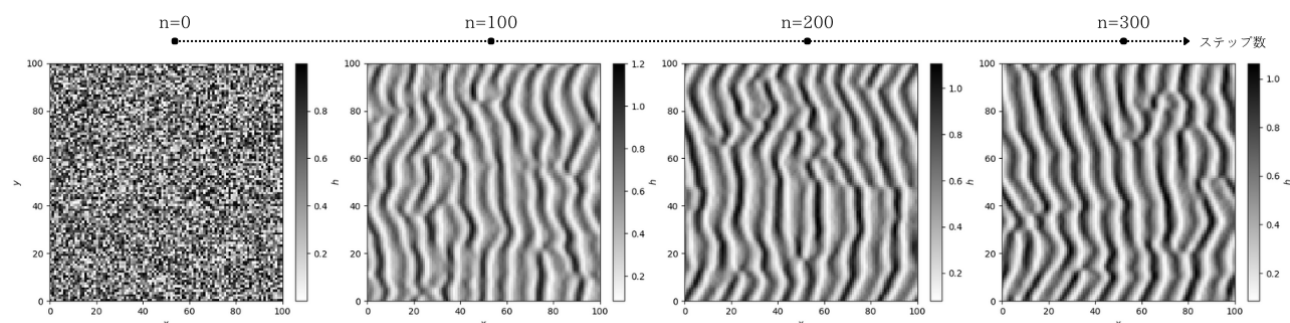


図 21 新たな飛距離の式を用いた風紋の計算結果
[図の見方は図 4 と同じ。]

6 終わりに

(2a) 式と (45) 式を用いた結果を解析することで、それぞれの風紋における振幅と波長がどう決まっているのか調べられる。また、現実世界の風紋の調査から、どちらの式の方がより現実的に風紋形成を再現できているのかも分かる。これら結果の解析が、本研究の次のステップである。

西森モデルの砂丘スケールにおける飛距離の式 [(3a) 式] の妥当性も、本研究の解析手法を用いて調べられる。ただ、砂丘スケールにおける飛距離は度重なる跳躍の和を取らないといけないと考えられる。風紋の解析を終えた後の次のテーマは (3a) 式の解析である。

謝辞

本研究にあたり、多くの方々から助言・協力を賜りました。

指導教員である吉田茂生准教授には、基本的な数学・物理学に始まり、流体の解析や数値解法まで多くのことを教えていただきました。また、砂丘の勉強に幾時間もお付き合いいただき、筆者の理解の習熟のために集中講義の手配もしていただきました。これらの手厚いご指導に対し、この場を借りて、厚く御礼申し上げます。

川田佳史様・中島涼輔様・菖蒲迫健介様には、本研究を達成するための専門的な知識・技術をご伝授いただきました。川田様からは、本研究の数値解法である格子差分法について、風上差分や埋め込み境界などの知識を教えていただきました。中島様からは、砂丘に関する線形解析の論文や数値計算の実装の際に出てきた数式へ何度も寄り添っていただきました。菖蒲迫様には、数値計算コードを実装するにあたり、課題や改善案など多くのご意見を賜りました。本研究を支えてくださった方々へ心から感謝申し上げます。

最後に、友人・大学内外問わずお世話になった先生方、重ねて御礼申し上げます。

付録 A 表面這行の式の導出

表面這行の式 [(4) 式] を導出する。

高さ $h(t, x, y)$ についての拡散方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A1})$$

($\kappa (> 0)$: 拡散係数)

ここで, xy 平面を正方形の格子で区切り, x 方向を i [$= 1, 2, \dots$], y 方向を j [$= 1, 2, \dots$] とラベリングする。また, 時間ステップを n と置く。これにより, (A1) 式の $h_{i,j}^n$ の偏微分は,

$$\frac{\partial h_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial^2 h_{i,j}^n}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta r)^2}{12} \frac{\partial^4 h^n}{\partial x^4} \Big|_{i,j} + O((\Delta r)^4)$$

$$\frac{\partial^2 h_{i,j}^n}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta r)^2}{12} \frac{\partial^4 h^n}{\partial y^4} \Big|_{i,j} + O((\Delta r)^4)$$

(Δr : 格子点間隔 Δt : 時間間隔)

のようにテイラー展開できる。この結果を (A1) 式に代入すると,

$$h_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{4\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \right) h_{i,j}^n + \frac{\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \sum_{NN} h_{i,j}^n$$

$$- \frac{\kappa\Delta t}{12} (\Delta r)^2 \left(\frac{\partial^4 h^n}{\partial x^4} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^4 h^n}{\partial y^4} \Big|_{i,j} \right) + O((\Delta r)^4 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (\text{A2})$$

が得られる。

次に, xy 軸を時計回りに 45° 回転させた $x'y'$ 軸を考える [図 A1]。

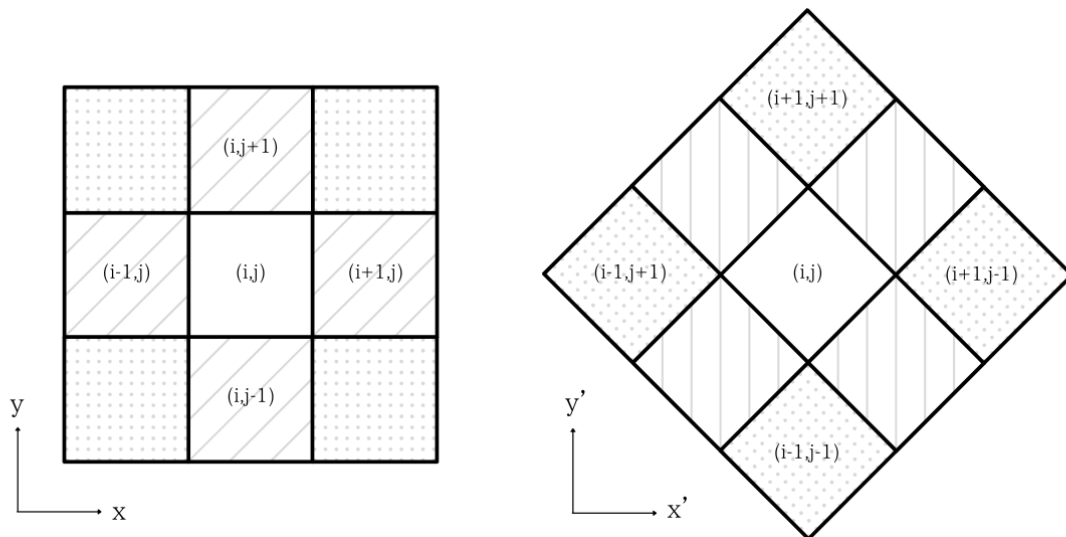


図 A1 座標軸と最近接セル・第 2 近接セルの関係

この座標軸についても、拡散方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} \right) \quad (\text{A3})$$

$h_{i,j}^n$ の偏微分をテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_{i,j}^n}{\partial x'^2} &= \frac{h_{i+1,j-1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j+1}^n}{2(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta r)^2}{6} \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \right|_{i,j} + O((\Delta r)^4) \\ \frac{\partial^2 h_{i,j}^n}{\partial y'^2} &= \frac{h_{i+1,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j-1}^n}{2(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta r)^2}{6} \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} + O((\Delta r)^4) \end{aligned}$$

のようになり、ここで x', y' 方向の格子点間隔は $\sqrt{2}\Delta r$ であることに注意する。これらを (A3) 式に代入し、

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{n+1} &= \left(1 - \frac{2\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \right) h_{i,j}^n + \frac{\kappa\Delta t}{2(\Delta r)^2} \sum_{NNN} h_{i,j}^n \\ &\quad - \frac{\kappa\Delta t}{6} (\Delta r)^2 \left(\left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} \right) + O((\Delta r)^4 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (\text{A4}) \end{aligned}$$

が得られる。

定数 A, B を置き、 $A \times (\text{A2})$ 式 + $B \times (\text{A4})$ 式を行う。結果は、

$$\begin{aligned} (A+B)h_{i,j}^{n+1} &= \left(A+B - \frac{2(2A+B)\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \right) h_{i,j}^n + \frac{A\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \sum_{NN} h_{i,j}^n + \frac{B\kappa\Delta t}{2(\Delta r)^2} \sum_{NNN} h_{i,j}^n \\ &\quad - \frac{\kappa\Delta t}{12} (\Delta r)^2 \left(A \left(\left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} \right) + 2B \left(\left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} \right) \right) \\ &\quad + O((\Delta r)^4 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (\text{A5}) \end{aligned}$$

となり、これからこの式の $((\Delta r)^2)$ の項が消えるかを調べる。

(x, y) と (x', y') について以下の関係が成り立つ [図 A2]。

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{aligned}$$

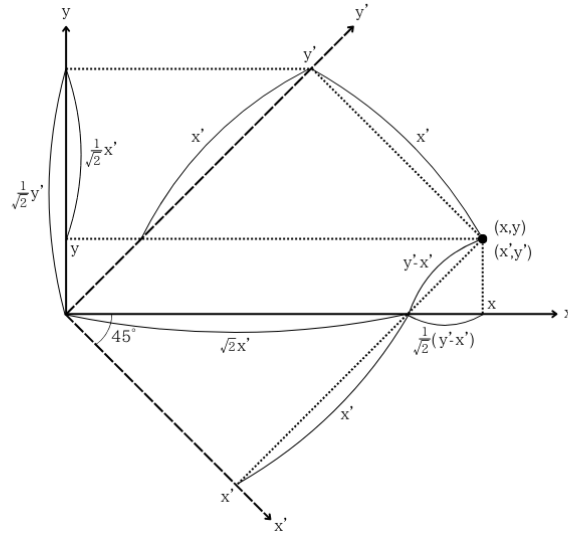
よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x'^4} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 6 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 4 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \\ \frac{\partial^4}{\partial y'^4} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 6 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \end{aligned}$$

がわかり、(A5) 式は、

$$\begin{aligned} (A+B)h_{i,j}^{n+1} &= \left(A+B - \frac{2(2A+B)\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \right) h_{i,j}^n + \frac{A\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2} \sum_{NN} h_{i,j}^n + \frac{B\kappa\Delta t}{2(\Delta r)^2} \sum_{NNN} h_{i,j}^n \\ &\quad - \frac{\kappa\Delta t}{12} (\Delta r)^2 \left((A+B) \left(\left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x'^4} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial y'^4} \right|_{i,j} \right) + 6B \left. \frac{\partial^4 h^n}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{i,j} \right) \\ &\quad + O((\Delta r)^4 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

のように書き換えられる。


 図 A2 (x, y) と (x', y') の関係

(A6) 式を見ると, $B \neq 0$ の条件において $(\Delta r)^2$ の項は消去できない。したがって, $A = B = 1/2$ を選ぶと (A6) 式は,

$$h_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{3\kappa\Delta t}{(\Delta r)^2}\right) h_{i,j}^n + \frac{\kappa\Delta t}{2(\Delta r)^2} \sum_{NN} h_{i,j}^n + \frac{\kappa\Delta t}{4(\Delta r)^2} \sum_{NNN} h_{i,j}^n + O((\Delta r)^2 \Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (\text{A7})$$

となる。ここで, $D = 3\kappa\Delta t/(\Delta r)^2$ と置くと, 表面這行の式 [(4) 式] になる。

また, (A2)(A4)(A7) 式において $h_{i,j}^n$ の係数は 0 以上でないといけないので,

$$0 < D \leq \frac{3}{4} \quad (\text{A8})$$

である。

付録 B 平らな固定床での砂粒子の飛距離の解析

2 節において固定床を表す式 [(5) 式] が,

$$h(x) = 2h_0 \quad (\text{B1})$$

だった場合の問題 を解く。ここで, 問題 に関する質点の基礎方程式と初期条件は (12)-(15) 式をそのまま用いる。問題 については, 基礎方程式 [(6)(7) 式] と z 方向の境界条件 [(10)(11) 式] を使い, ここから流れ場の定常状態を導出する。

まず, 問題 を解く [図 B1]。

定常状態では, 任意の空間で $w = 0$, $\partial u/\partial x = 0$, $\partial p/\partial x = 0$ と仮定する。すると, (7) 式から,

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = 0$$

が得られる。境界条件 [(10)(11) 式] を用いて, 解くと,

$$u = u_0 \frac{z - 2h_0}{H - 2h_0} \quad (\text{B2})$$

となる。これが $h(x) = 2h_0$ のときの問題 の定常な流れ場であり, (8) 式はこれを参考に定めた。


 図 B1 $h(x) = 2h_0$ のときの境界条件

また, (15) 式より固定床での剪断応力 τ_b は以下ようになる。

$$\tau_b = \frac{\rho \nu u_0}{H - 2h_0} \quad (\text{B3})$$

問題を解く。

運動方程式 [(12) 式] の $v(\xi)$ へ (B2) 式の結果を代入すると,

$$m \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} = -m g e_z - 3\pi \rho \nu d \left(\frac{d\xi(t)}{dt} - u_0 \frac{\zeta(t) - 2h_0}{H - 2h_0} e_x \right) \quad (\text{B4})$$

のようになる。ここで, e_x は x 方向の単位ベクトルである。

(B4) 式の z 方向を解く。式を整理すると,

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{C}{m} \frac{d\zeta}{dt} = -g \quad (\text{B5})$$

であり, ここで $C = 3\pi \rho \nu d$ とした。(B5) 式の右辺が 0 の場合を解くと, ζ の基本解 1 と $e^{-Ct/m}$ が求まる。次に (B5) 式の特解 ζ_p だが, ロンスキー行列式 $\Delta(t)$ を計算すると,

$$\Delta(t) = 1 \cdot \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{C}{m}t} \right) - \frac{d}{dt} (1) \cdot e^{-\frac{C}{m}t} = -\frac{C}{m} e^{-\frac{C}{m}t}$$

であるので, 特解 ζ_p は,

$$\zeta_p = - \int_0^t \frac{-g \cdot e^{-\frac{C}{m}t'}}{\Delta(t')} dt' + e^{-\frac{C}{m}t} \int_0^t \frac{-g \cdot 1}{\Delta(t')} dt' = \left(\frac{m}{C} \right)^2 g \left(1 - e^{-\frac{C}{m}t} \right) - \frac{mg}{C} t$$

が得られる。したがって, ζ の一般解は,

$$\zeta = Z_1 + Z_2 e^{-\frac{C}{m}t} + \left(\frac{m}{C} \right)^2 g \left(1 - e^{-\frac{C}{m}t} \right) - \frac{mg}{C} t$$

(Z_1, Z_2 : 定数)

である。(13)(14) 式の初期条件より,

$$\zeta|_{t=0} = 2h_0 \quad \left. \frac{d\zeta}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \sin \theta$$

なので、砂粒子の z 方向の位置 $\zeta(t)$ は、

$$\zeta(t) = \frac{m}{C} \left(\sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \sin \theta + \frac{mg}{C} \right) \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) - \frac{mg}{C}t + 2h_0 \quad (\text{B6})$$

と求まる。

(B4) 式の x 方向を解く。解くべき式は、

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{C}{m} \frac{d\xi}{dt} = \frac{C}{m} u_0 \frac{\zeta(t) - 2h_0}{H - 2h_0} \quad (\text{B7})$$

である。 z 方向のときと同様に、(B7) 式の右辺が 0 の場合を解くと、 ξ の基本解 1 と $e^{-Ct/m}$ が求まる。次に (B7) 式の特解 ξ_p について、 $\Delta(t)$ の中身は ζ のときと同じなので、

$$\begin{aligned} \xi_p &= - \int_0^t \frac{1}{\Delta(t')} \cdot \frac{C}{m} u_0 \frac{\zeta(t') - 2h_0}{H - 2h_0} \cdot e^{-\frac{c}{m}t'} dt' + e^{-\frac{c}{m}t} \int_0^t \frac{1}{\Delta(t')} \cdot \frac{C}{m} u_0 \frac{\zeta(t') - 2h_0}{H - 2h_0} \cdot 1 dt' \\ &= \frac{u_0}{H - 2h_0} \left(\int_0^t \zeta(t') dt' - 2h_0 \int_0^t dt' - e^{-\frac{c}{m}t} \int_0^t \zeta(t') e^{\frac{c}{m}t'} dt' + 2h_0 e^{-\frac{c}{m}t} \int_0^t e^{\frac{c}{m}t'} dt' \right) \\ &= \frac{u_0}{H - 2h_0} \frac{m}{C} \left(- \frac{m}{C} \left(2\sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \sin \theta + \frac{3mg}{C} \right) \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) + \sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \sin \theta t \left(1 + e^{-\frac{c}{m}t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{mg}{C} t \left(2 + e^{-\frac{c}{m}t} \right) - \frac{1}{2} g t^2 \right) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 ξ の一般解は、

$$\begin{aligned} \xi &= \Xi_1 + \Xi_2 e^{-\frac{c}{m}t} + \frac{u_0}{H - 2h_0} \frac{m}{C} \left(- \frac{m}{C} \left(2\sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \sin \theta + \frac{3mg}{C} \right) \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \sin \theta t \left(1 + e^{-\frac{c}{m}t} \right) + \frac{mg}{C} t \left(2 + e^{-\frac{c}{m}t} \right) - \frac{1}{2} g t^2 \right) \\ &\quad (\Xi_1, \Xi_2 : \text{定数}) \end{aligned}$$

である。(13)(14) 式の初期条件より、

$$\xi|_{t=0} = \xi_0 \quad \left. \frac{d\xi}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \cos \theta$$

なので、砂粒子の x 方向の位置 $\xi(t)$ は、

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{m}{C} \left(\sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \cos \theta - \frac{u_0}{H - 2h_0} \frac{m}{C} \left(2\sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \sin \theta + \frac{3mg}{C} \right) \right) \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \\ &\quad + \frac{u_0}{H - 2h_0} \frac{m}{C} \sqrt{\frac{\nu u_0}{H - 2h_0}} \sin \theta t \left(1 + e^{-\frac{c}{m}t} \right) + \frac{u_0}{H - 2h_0} \left(\frac{m}{C} \right)^2 g t \left(2 + e^{-\frac{c}{m}t} \right) \\ &\quad - \frac{u_0}{H - 2h_0} \frac{mg}{2C} t^2 + \xi_0 \quad (\text{B8}) \end{aligned}$$

と求まる。

パラメーターに表 3・4 の値を入れたときの砂粒子の運動は図 B2 に示す通りである。ここで、 $\xi_0 = 0$ とした。また、射出角度 $\theta = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ のときの飛距離 l は表 B1 の通りである。

θ ($^\circ$)	20	40	60
l (mm)	0.98	1.5	1.4

表 B1 平らな固定床での射出角度 θ と飛距離 l の結果

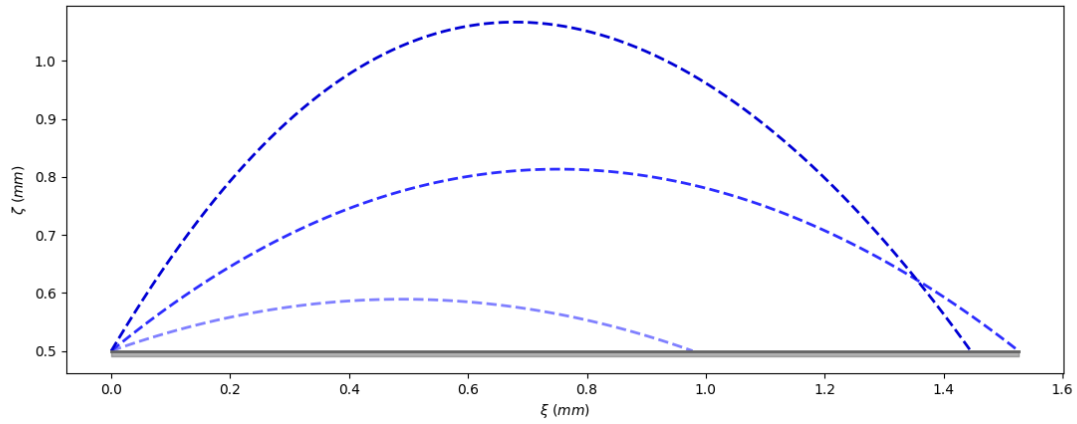


図 B2 砂粒子の運動
[横軸・縦軸は砂粒子の位置 (ξ, ζ) を表す。また、色の薄い方から $\theta = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ である。]

付録 C 固定床での剪断応力の位相についての確認

Charru et al.(2013) [3] によれば「the viscous and inertial regimes [3]」かつ $2\pi k_{bed}/N_x \Delta r \cdot \delta_i \ll 1$ な領域において、 τ_b の位相は h に比べ風上側へ $\pi/6$ ずれる。ここで、 δ_i は「the penetration depth of vorticity disturbances [3]」である。

この τ_b と h の位相のずれを本数値計算でも確認する。

上記の領域を満たすよう、表 C1 のパラメーターを設定した。

$N_x \times N_z$	N	Δr (mm)	Δt (s)	u_0 (m/s)	h_0 (mm)	k_{bed}	ρ (kg/m ³)	ν (m/s ²)
500 × 150	5000	0.010	1.0×10^{-6}	1.0	0.25	1	1.3	1.5×10^{-5}

表 C1 the viscous and inertial regimes かつ $2\pi k_{bed}/N_x \Delta r \cdot \delta_i \ll 1$ を満たすパラメーター

この値を用いて、定常な流れ場 [$n = 5000$] における固定床での剪断応力を測定した結果は図 C1 の通りである。実線は $\tau_b = a_1 \cos(2\pi k_{bed} i / N_x + a_2) + a_3$ [a_1, a_2, a_3 : フィッティングする定数] の式でフィッティングさせた曲線であり、 $a_2 \simeq \pi/14.2$ となった。

この結果より、本数値計算でも τ_b の位相が風上側へずれることを確認できた。しかし、本数値計算におけるずれの度合いは、Charru et al.(2013) で示されているものに比べ、小さかった。

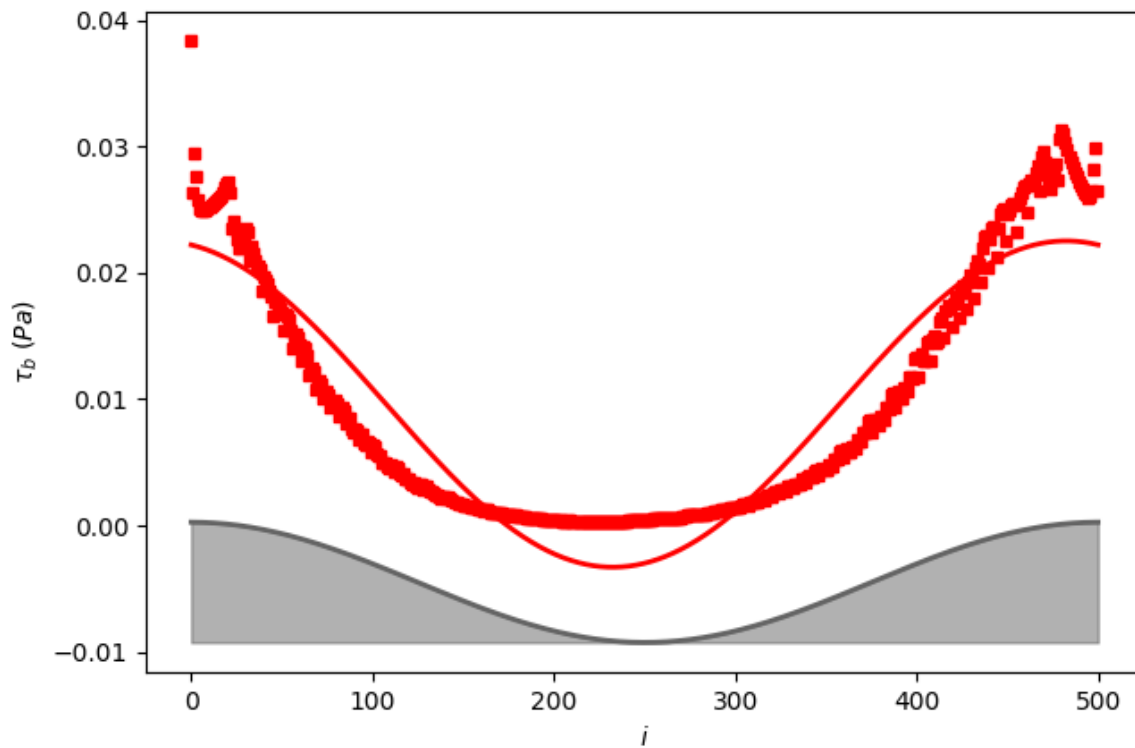


図 C1 表 C1 の値を用いたときの τ_b の測定結果
[横軸・縦軸は図 16 と同じであり、実線はプロットとフィッティングした曲線である。]

参考文献

- [1] 西森拓・大内則幸 (1993) 「飛砂による地形の動力学 - 風紋と砂丘 - 」, 物性研究 61 巻 1 号, 32-43.
- [2] 浅井光輝 (2022) 「明解粒子法 SPH,MPS,DEM の理論と実践」, 丸善出版.
- [3] François Charru・Bruno Andreotti・Philippe Claudin (2013) 「Sand Ripples and Dunes」, Annual Reviews of Fluid Mechanics - Volume 45, 469-493.