

大学院講義 2020 年度：火山物理学（とくにマグマだ
まり）

2020年8月5日

目次

第 1 章	マグマ溜りの存在～とくに茂木モデル	5
1.1	マグマ溜りの存在	5
1.2	茂木モデル	6
1.2.1	問題設定	6
1.2.2	弾性体静力学の基礎方程式の復習	7
1.2.3	無限弾性体の球状圧力源による変形	9
1.2.4	次のステップの作戦	10
1.2.5	Galerkin ベクトル	10
1.2.6	軸対称問題の場合の Love の応力関数	11
1.2.7	Hankel 変換を用いた定式化	13
1.2.8	地表における軸対称荷重による変形の Green 関数	14
1.2.9	半無限弾性体への 1 次補正	16
1.2.10	茂木モデルの応用 1 桜島大正噴火	19
1.2.11	茂木モデルの応用 2 ガラパゴス島の Darwin 火山	20
1.2.12	茂木モデルの応用 3 ハワイのキラウエア火山で起こっている収縮・膨張 イベント	21
1.3	マグマ溜りの形と大きさ	21
1.4	本章の参考文献	22
第 2 章	マグマ溜りの冷却	25
2.1	マグマ溜りの初期条件	25
2.2	一成分系の Stefan 問題	26
2.2.1	相境界が一定の速度で進む場合	26
2.2.2	下部境界が温度固定で、superheat が無い場合	28
2.3	二成分系の Stefan 問題	31
2.3.1	相境界が一定の速度で進む場合；組成的過冷却の問題	31
2.3.2	固化前線	34
2.4	マグマ溜り内の対流	35
2.4.1	熱対流の基本概念	36
2.4.2	組成対流	38
2.4.3	二重拡散対流	38
2.4.4	結晶集団対流	40
2.4.5	porous media 対流	40
2.5	固化の進行と対流が同時に起こる系における冷却と分化	40
2.5.1	固化を伴わないシルの冷却	40
2.5.2	1 成分の固化するシルにおける冷却	41

2.5.3	分化がおきる条件	43
2.5.4	部分溶融体内部の対流と分化	44
2.5.5	2成分系のシルの冷却と分化	45
2.5.6	結晶の沈降と分化	46
2.5.7	その他、分化に関わること	47
2.6	マグマ溜りの冷却と分化のまとめ	48
2.7	本章の参考文献	48
第3章	1次元火道流	51
3.1	気相のない一方向定常流～溶岩ドームを作るような噴火	51
3.1.1	一方向の定常流	51
3.1.2	Poiseuille 流	52
3.2	気相を伴う1次元定常流～プリニー式噴火	54
3.2.1	気液混相流体の密度	54
3.2.2	火道内の流れのレジーム	56
3.2.3	気液相対速度無しでの1次元流の基礎方程式とその解	57
3.2.4	気泡流の解～壁面摩擦と浮力の釣り合い	58
3.2.5	噴霧流の解その1～静水圧近似	59
3.2.6	噴霧流の解その2～choking	60
3.2.7	火口形状の問題	62
3.2.8	破碎面深度と流量の決まり方	62
3.3	本章の参考文献	63
第4章	レポート問題	65

第1章 マグマ溜りの存在～とくに茂木モデル

この講義では火山の物理モデリングのいくつかの側面を見てゆく。

さて、火山学一般から始める。火山の物理モデリングには、観測に関わるモデリングと物理プロセスのモデリングがある。両者をはっきり分けられるわけではないが、観測に関わるモデリングとしては

- 火山活動に伴う地殻変動
- 火山活動に伴う地震や空振
- 火山活動に伴う電磁場変化

などがあり、物理プロセスの問題は、大きく言えば

- マグマの発生の問題
- マグマの上昇
- マグマ溜りの形成
- マグマ溜り内のプロセス（冷却、固化、分化、浮力の獲得）
- マグマの火道内上昇
- 噴煙
- 溶岩流、火砕流

といったことに分けられよう。それぞれ物理的考察を要する問題である。今回は、地殻変動の問題と、マグマ溜りの冷却を扱う。時間があれば、マグマの火道内上昇、もしくはマグマオーシャンの冷却の問題を扱う。

火山学の面白いところは、火山が多様なこともあって、何が基礎がよくわからないことである。そのために、ものごとをゼロから考えないといけないことも多い。

1.1 マグマ溜りの存在

マグマ溜りは新聞報道などでも存在することは当然の事実のように語られていることが多いが、それほど当然でもない。マグマ溜りが存在しない噴火だってあるかもしれない。そこで、まず、マグマ溜りが存在する証拠を復習しよう。

問題 マグマ溜りが存在する証拠を挙げよ。

1.2 茂木モデル

マグマ溜りが存在することを示す証拠の一つに地殻変動がある。それは、ある点を中心にして地面が膨らんだり縮んだりすることが観測されるからである。その点の真下にマグマ溜りがあり、マグマがそこに入ったり、そこから出たりすることで、膨張収縮が起きると解釈される。

このことは、弾性体力学を使えば定量化できて、どの深さにマグマ溜りがあるのか、マグマ溜りでどの程度の圧力変化が起こっているのかといったことが推定できる。これをやったのが、Mogi (1958) なので、茂木モデルと呼ばれる¹。

以下、数回にわたって、この弾性体力学の計算を見てゆく。茂木モデル自体はたいして複雑な式ではないし、よく使われるのだが、導出は意外にややこしいので、なかなか授業でも取り上げられないことが多い。今年は気が向いたので丁寧に導出を見ていきたい。

1.2.1 問題設定

以下のような設定で問題を考える。球形のマグマ溜りが半無限媒質の中にあるとする。マグマ溜りの半径は a で中心の深さは d であるものとする。内圧を P_0 とする。一つは、マグマ溜り中心を原点とする球座標系 (r, θ, ϕ) で、もう一つは、マグマ溜り直上の地表を原点とする円筒座標系 (s, ϕ, z) である。

地表の境界条件は

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (1.1a)$$

$$\sigma_{sz} = 0 \quad (1.1b)$$

$$\sigma_{\phi z} = 0 \quad (1.1c)$$

となる。マグマ溜り表面での境界条件は

$$\sigma_{rr} = -P_0 \quad (1.2a)$$

$$\sigma_{\theta r} = 0 \quad (1.2b)$$

$$\sigma_{\phi r} = 0 \quad (1.2c)$$

である。この内圧による弾性体の変形を解けばよい。

問題設定自体は容易に理解できるのだが、半無限媒質で解くのは実はけっこう難しい。それをこれから数回に分けてフォローする。

全体の作戦としては、まず空間全体を弾性体が占めていたとして球状圧力源が作る弾性変形を求め、次に、半無限の解として適当になるように地表に応力を加えて、地表応力を零にする。厳密に言えば、地表に応力を加えると、今度は球状圧力源表面の圧力が一定でなくなるので、これは厳密解にはならない。厳密解を出すには、さらに球状圧力源表面の圧力が一定になるように応力を加え、もう一度地表応力を零にする、という操作を繰り返せばよい。実際は、そんなに何度も繰り返すのは大変なので、一度で終わってもおおむね正しい答えが得られる。

¹理論を作ったのは茂木ではない。茂木がやったのは、弾性体力学に基づく理論を桜島にあてはめたこと。

1.2.2 弾性体静力学の基礎方程式の復習

まずは、弾性体力学の基礎方程式を復習するところから始めよう。今は静的な問題に限ることとする。

歪み

歪の表現を与えておく。とくに球座標や円筒座標を使うので、その表現をまとめておく。

歪は

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.3)$$

で定義される。

デカルト座標では

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.4a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (1.4b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.4c)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (1.4d)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (1.4e)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (1.4f)$$

となる。円筒座標 (s, ϕ, z) では

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\partial u_s}{\partial s} \quad (1.5a)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{s} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_s}{s} \quad (1.5b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.5c)$$

$$\varepsilon_{s\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial s} - \frac{u_\phi}{s} \right) \quad (1.5d)$$

$$\varepsilon_{\phi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{s} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \right) \quad (1.5e)$$

$$\varepsilon_{zs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \quad (1.5f)$$

となる。球座標では

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (1.6a)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (1.6b)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cot \theta}{r} u_\theta \quad (1.6c)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (1.6d)$$

$$\varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} u_\phi \right) \quad (1.6e)$$

$$\varepsilon_{\phi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right) \quad (1.6f)$$

となる。

応力と歪み、もしくは変位の関係式

弾性定数として Lamé 定数を使うか Young 率と Poisson 比を使うかによって、形が変わるが、ここでのように静力学問題を扱うときには、剛性率と Poisson 比の組を使うのが式が簡単になる。その場合、応力と歪や変位の関係は

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (1.7a)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \left(u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{k,k} \right) \quad (1.7b)$$

となる。

基礎方程式

静力学の基礎方程式は、要するに力のつり合いである。つまり、

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (1.8)$$

となる。この応力を変位で書き換えると

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{1}{\mu} f_i \quad (1.9)$$

ベクトルの形で書けば

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\mu} \mathbf{f} \quad (1.10)$$

となる。とくに外力がない場合は、Poisson 比だけで書けることに注意する。

1.2.3 無限弾性体の球状圧力源による変形

茂木モデルを考えるためのステップ 1 は、地表面があることを忘れて、無限弾性体で解いてみることである。これはそう難しくはない。

弾性体静力学の基礎方程式 (1.10) は

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (1.11)$$

である。ここで \mathbf{u} は変位、 ν は Poisson 比である。

変形は球対称に起こり、変位は r 成分 u_r のみであると仮定すると、

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_r}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} u_r \right] + \frac{1}{1-2\nu} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right] = 0 \quad (1.12)$$

となる。第 1 項と第 2 項は実は同じ形なので、これは

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right] = 0 \quad (1.13)$$

とまとめられる。1 回積分すると

$$\frac{d}{dr} (r^2 u_r) = Ar^2 \quad (1.14)$$

となり (A は積分定数)、もう 1 回積分すると

$$u_r = \frac{A}{3} r + \frac{B}{r^2} \quad (1.15)$$

が得られる (B は積分定数)。無限遠で変位は 0 にならないといけないので、 $A = 0$ 、したがって、

$$u_r = \frac{B}{r^2} \quad (1.16)$$

である。この解では dilatation が

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} = 0 \quad (1.17)$$

となることにも注意しておく (あとで計算に使う)。

積分定数 B は球状圧力源表面での境界条件から決める。球対称変形では

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{rr} \right] \\ &= 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) + \frac{du_r}{dr} \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

ゆえ、これが球表面で $-P_0$ であるということから

$$-\frac{4\mu B}{a^3} = -P_0 \quad (1.19)$$

となり、これより

$$B = \frac{P_0 a^3}{4\mu} \quad (1.20)$$

であることがわかる。したがって、変位と応力は

$$u_r = \frac{P_0 a^3}{4\mu r^2} \quad (1.21a)$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu \frac{du_r}{dr} = -P_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \quad (1.21b)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = 2\mu \frac{u_r}{r} = \frac{P_0}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \quad (1.21c)$$

となる。動径応力は圧縮、それに対して角度方向の応力は引張になる。

1.2.4 次のステップの作戦

ここまでは簡単だったが、ここからのステップ2が難しい。地表があると問題は球対称ではなくなるので、格段に難しさが増す。でも、軸対称ではあるので、それを利用して解析的に解くことを考える。

作戦を復習しておく、先の無限弾性体の解は、地表で応力が0にならないので、それを打ち消すような応力を地表に加えて地表応力を零にすることだった。それによる弾性変形を求めれば、第1近似としては妥当な解が得られる。

このために、地表に任意の軸対称な応力を与えた時の半無限弾性体の変形を求めるための定式化をする。そのための理論的道具として Love の応力関数を導入する。弾性体静力学の方程式はベクトル場を求めないといけないので計算が難しい。そこで、対称性を利用してスカラー場を求める問題に帰着する方法がいろいろ知られている。その一つが Love の応力関数であって、その Love の応力関数を自然に導入するために Galerkin ベクトルを導入する。

1.2.5 Galerkin ベクトル

一般にベクトル場は Helmholtz 分解できるので、それを変位場に適用すると、

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi + \nabla \chi \quad (1.22)$$

となる。これは3成分のベクトルを3成分のベクトルと1成分のスカラーで表しているの、余分な部分がある。その余分な分は $\nabla \cdot \Psi$ を任意に選ぶことができ、今は

$$\nabla \cdot \Psi = 0 \quad (1.23)$$

になるように選ぶ。すると、

$$\Psi = \nabla \times \mathbf{H} \quad (1.24)$$

となるベクトル場 \mathbf{H} が存在することになる。 $\nabla \cdot \mathbf{H}$ も任意に選ぶことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \nabla \chi \\ &= -\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \nabla \chi \end{aligned} \quad (1.25)$$

となるので、 $\nabla \cdot \mathbf{H} = \chi/(c-1)$ となるように選べば (c は定数でこれから決める)

$$\mathbf{u} = -\nabla^2 \mathbf{H} + c\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (1.26)$$

と書くことができる。何だかベクトル場 \mathbf{u} をわざわざ複雑に書き換えたようだが、 c を適当に選ぶことで弾性体の方程式が簡単に書けるようになるのがミソ。以下、それを見てゆく。

(1.26) を弾性体の基礎方程式 (1.10) に代入すると、

$$\nabla^2 [-\nabla^2 \mathbf{H} + c\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H})] + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \{ \nabla \cdot [-\nabla^2 \mathbf{H} + c\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H})] \} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{f} \quad (1.27)$$

となる。ここで、

$$\nabla^2 [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H})] = \nabla [\nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{H})] = \nabla [\nabla \cdot (\nabla \{ \nabla \cdot \mathbf{H} \})] \quad (1.28)$$

となることを用いると、

$$-\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{H} + \frac{2c(1-\nu) - 1}{1-2\nu} \nabla^2 [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H})] = -\frac{1}{\mu} \mathbf{f} \quad (1.29)$$

となる。ここで、

$$c = \frac{1}{2(1-\nu)} \quad (1.30)$$

に選び、慣例として

$$\mathbf{H} = -\frac{1-\nu}{\mu} \mathbf{F} \quad (1.31)$$

と書くことによって、弾性体の静力学方程式は

$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{F} = -\frac{1}{1-\nu} \mathbf{f} \quad (1.32)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\mu} [2(1-\nu)\nabla^2 \mathbf{F} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})] \quad (1.33)$$

と書くことができる。とくに外力がない時、 \mathbf{F} は、弾性定数に依らず重調和方程式を満たすというのがミソ。この \mathbf{F} を Galerkin ベクトルと呼ぶ。

1.2.6 軸対称問題の場合の Love の応力関数

外力がない問題で、 $u_\phi = 0$ で \mathbf{u} が ϕ に依存しない軸対称歪を考えよう。

この場合、Galerkin ベクトルを

$$\mathbf{F} = \varphi \mathbf{e}_z \quad (1.34)$$

として良いことがわかっている。一見、一般性を失っているようだがそうでないことをこれから見てゆく。 φ を Love の応力関数という。この場合、

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.35a)$$

$$u_s = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial z} \quad (1.35b)$$

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu)\nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \quad (1.35c)$$

となる。これで一般性を失っていないということになるのなら、もともとベクトル場を解かなければならぬ問題だったのが、スカラー場を解く問題で、かつ方程式に Poisson 比 ν が含まれない形に書けたので、問題として簡単化できたことになる。

このように問題がスカラー場 φ を解くことに帰着されることは以下のように考えるとわかる。まず、解くべき方程式は弾性体の基礎方程式 (1.10) の外力がない場合の

$$\nabla^2 u_s - \frac{u_s}{s^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial (s u_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.36a)$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial (s u_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.36b)$$

である。まず、これだけ見るとやや唐突だが、先ほど (1.35b) で示唆された通り、

$$u_s = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial z} \quad (1.37)$$

と置く²。(1.37) を (1.36a) に代入することで、

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial (s u_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial s \partial z} (\nabla^2 \varphi) \quad (1.38)$$

となり、両辺を s で積分すると

$$\frac{1}{s} \frac{\partial (s u_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \varphi) + f_1(z) \quad (1.39)$$

を得る。ここで、 $f_1(z)$ は z の任意関数である。 φ に z のみの関数を足しても u_s には影響を与えないので、 $f_1(z) = 0$ にしてかまわない。

$$\frac{1}{s} \frac{\partial (s u_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \varphi) \quad (1.40)$$

これにもう一度 (1.37) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[(1-2\nu)(\nabla^2 \varphi) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[2(1-\nu)(\nabla^2 \varphi) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

を得る。これを z で積分すると、

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu)(\nabla^2 \varphi) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] + f_2(s) \quad (1.42)$$

を得る。ここで、 $f_2(s)$ は s の任意関数である。しかし、 f_2 は φ に含めてしまうことができるし、そうしても u_s には影響を与えないので、 $f_2(s) = 0$ にしてかまわない。そこで、

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu)(\nabla^2 \varphi) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \quad (1.43)$$

となる。こうしてみると、最初の唐突な置き方の意味が分かる。式変形の途中で、 s と z で積分することを見越して微分の形にしてあったのである。 u_s と u_z という2つの関数が φ という一つの関数に集約できたのは、基礎方程式の半分 (1.36a) を使ってしまっているからである。

²任意の u_s に対して s と z で積分すれば φ を決めることができるから、一般性を失っていないことは明らかである。ただし、 φ は u_s に対して一意には定まらず、任意性がある。

さて、残るは基礎方程式のもう片方 (1.36b) である。これに (1.40) と (1.43) を代入すると

$$\nabla^2 \left[2(1-\nu)(\nabla^2\varphi) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\nabla^2\varphi) = 0 \quad (1.44)$$

となり、整理すると

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0 \quad (1.45)$$

を得る。すなわち、 φ は重調和関数である。

このときの応力も求めておく。

$$\begin{aligned} \sigma_{ss} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial(su_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial^3\varphi}{\partial s^2\partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} \right) \end{aligned} \quad (1.46a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= 2\mu \left[\frac{u_s}{s} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial(su_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2\varphi - \frac{1}{s} \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (1.46b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial(su_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[2(1-\nu)(\nabla^2\varphi) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right] + \nu \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1.46c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zs} &= \mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left[(1-\nu)(\nabla^2\varphi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^3\varphi}{\partial s\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left[(1-\nu)(\nabla^2\varphi) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1.46d)$$

1.2.7 Hankel 変換を用いた定式化

デカルト座標のときには、重調和方程式のような偏微分方程式を解く一つのテクニックは Fourier 変換することであった。Fourier 変換すると、微分演算が単なる掛け算に変身するからである。それと同様のことを円筒座標で行うのが Hankel 変換

$$\varphi(s, z) = \int_0^\infty \Phi(\xi, z) J_0(s\xi) \xi d\xi \quad (1.47a)$$

$$\Phi(\xi, z) = \int_0^\infty \varphi(s, z) J_0(\xi s) s ds \quad (1.47b)$$

である。ここで、 $J_0(x)$ は 0 次の Bessel 関数である。Bessel 関数の微分公式

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x) \quad (1.48a)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ_0(x)}{dx} \right) = -J_0(x) \quad (1.48b)$$

を用いると

$$\frac{dJ_0(s\xi)}{ds} = -\xi J_1(s\xi) \quad (1.49a)$$

$$\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dJ_0(s\xi)}{ds} \right) = -\xi^2 J_0(s\xi) \quad (1.49b)$$

となるので、弾性体の式の組 (1.35) は Φ を用いて

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right)^2 \Phi = 0 \quad (1.50a)$$

$$u_s = \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial z} J_1(s\xi) \xi^2 d\xi \quad (1.50b)$$

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \left[(1-2\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \xi^2 \Phi \right] J_0(s\xi) \xi d\xi \quad (1.50c)$$

と書くことができ、応力は

$$\begin{aligned} \sigma_{ss} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right) \\ &= \int_0^\infty \left[\nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} + (1-\nu) \xi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] J_0(s\xi) \xi d\xi - \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial z} J_1(s\xi) \xi^2 d\xi \end{aligned} \quad (1.51a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \\ &= \nu \int_0^\infty \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - \xi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] J_0(s\xi) \xi d\xi + \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial z} J_1(s\xi) \xi^2 d\xi \end{aligned} \quad (1.51b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \\ &= \int_0^\infty \left[(1-\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - (2-\nu) \xi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] J_0(s\xi) \xi d\xi \end{aligned} \quad (1.51c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zs} &= \frac{\partial}{\partial s} \left[(1-\nu) (\nabla^2 \varphi) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \\ &= \int_0^\infty \left[\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + (1-\nu) \xi^2 \Phi \right] J_1(s\xi) \xi^2 d\xi \end{aligned} \quad (1.51d)$$

と書くことができる。

1.2.8 地表における軸対称荷重による変形の Green 関数

ここまでで解くべき方程式は揃った。次に、茂木モデル問題を解くための道具立てとして、地表面に任意の軸対称荷重を与えた時の変位を求めておく。

円筒座標 (s, ϕ, z) で考え、地表面を $z = 0$ とする。地表面に軸対称応力

$$\sigma_{zz}(s, 0) = p(s) \quad (1.52a)$$

$$\sigma_{sz}(s, 0) = q(s) \quad (1.52b)$$

がかかったときの変形を求めてゆく。

Love の応力関数 φ を用いて、それを 1.2.7 節でやった Hankel 変換した形で解く。

$$\varphi(s, z) = \int_0^\infty \Phi(\xi, z) J_0(s\xi) \xi d\xi \quad (1.53a)$$

$$\Phi(\xi, z) = \int_0^\infty \varphi(s, z) J_0(\xi s) s ds \quad (1.53b)$$

Φ は Hankel 変換した重調和方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right)^2 \Phi(\xi, z) = 0 \quad (1.54)$$

を満たす。まず、ラプラスアンをひとつ積分して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right) \Phi(\xi, z) = C_1(\xi) e^{\xi z} + C_2(\xi) e^{-\xi z} \quad (1.55)$$

が得られる (C_1, C_2 は ξ の任意関数)。このうち $z \rightarrow -\infty$ で 0 になる解を選ぶと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right) \Phi(\xi, z) = C_1(\xi) e^{\xi z} \quad (1.56)$$

である。このラプラスアンをもう一度積分すると

$$\Phi(\xi, z) = \frac{C_1(\xi)}{2\xi} z e^{\xi z} + C_3(\xi) e^{\xi z} + C_4(\xi) e^{-\xi z} \quad (1.57)$$

が得られる (C_3, C_4 は ξ の任意関数)。このうち $z \rightarrow -\infty$ で 0 になる解を選び、任意関数を取り直すと

$$\Phi(\xi, z) = [C(\xi) + D(\xi)z] e^{\xi z} \quad (1.58)$$

となる。ここで、 $C = C_3, D = C_1/2\xi$ とした。

このとき、地表面にかかる応力は (1.51) と (1.58) より

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(z=0) &= \int_0^\infty \left[(1-\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - (2-\nu) \xi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} J_0(s\xi) \xi d\xi \\ &= \int_0^\infty [-\xi^3 C(\xi) + (1-2\nu) \xi^2 D(\xi)] J_0(s\xi) \xi d\xi \end{aligned} \quad (1.59a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zs}(z=0) &= \int_0^\infty \left[\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + (1-\nu) \xi^2 \Phi \right]_{z=0} J_1(s\xi) \xi^2 d\xi \\ &= \int_0^\infty [\xi^3 C(\xi) + 2\nu \xi^2 D(\xi)] J_1(s\xi) \xi d\xi \end{aligned} \quad (1.59b)$$

である。境界条件も Hankel 変換した形で

$$\sigma_{zz}(s, 0) = p(s) = \int_0^\infty P(\xi) J_0(s\xi) \xi d\xi \quad (1.60a)$$

$$\sigma_{zs}(s, 0) = q(s) = \int_0^\infty Q(\xi) J_1(s\xi) \xi d\xi \quad (1.60b)$$

と書いておけば、

$$P(\xi) = -\xi^3 C(\xi) + (1 - 2\nu)\xi^2 D(\xi) \quad (1.61a)$$

$$Q(\xi) = \xi^3 C(\xi) + 2\nu\xi^2 D(\xi) \quad (1.61b)$$

でなければならない。したがって、

$$C(\xi) = \xi^{-3} [-2\nu P(\xi) + (1 - 2\nu)Q(\xi)] \quad (1.62a)$$

$$D(\xi) = \xi^{-2} [P(\xi) + Q(\xi)] \quad (1.62b)$$

を得る。そこで、応力関数は

$$\Phi(\xi, z) = \frac{1}{\xi^3} [(-2\nu + \xi z)P(\xi) + \{(1 - 2\nu) + \xi z\} Q(\xi)] e^{\xi z} \quad (1.63)$$

となる。変位は、(1.50) を用いて

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial z} J_1(s\xi) \xi^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \{[(1 - 2\nu) + \xi z] P(\xi) + [2(1 - \nu) + \xi z] Q(\xi)\} e^{\xi z} J_1(s\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.64a)$$

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \left[(1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2(1 - \nu)\xi^2 \Phi \right] J_0(s\xi) \xi d\xi \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \{[2(1 - \nu) - \xi z] P(\xi) + [(1 - 2\nu) - \xi z] Q(\xi)\} e^{\xi z} J_0(s\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.64b)$$

となり、とくに地表 ($z = 0$) では、

$$u_s = \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty [(1 - 2\nu)P(\xi) + 2(1 - \nu)Q(\xi)] J_1(s\xi) d\xi \quad (1.65a)$$

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty [2(1 - \nu)P(\xi) + (1 - 2\nu)Q(\xi)] J_0(s\xi) d\xi \quad (1.65b)$$

となる。

1.2.9 半無限弾性体への1次補正

無限弾性体の解はもちろん地表境界条件を満たさない。地表での応力を0にするように地表に応力を足すことを考える。

まず、無限弾性体の解の地表での応力を求めておく。無限弾性体の解を、地表を原点とする円筒座標 (s, ϕ, z) に書き換える。座標の関係は

$$r = \sqrt{s^2 + (z + d)^2} \quad (1.66a)$$

$$\theta = \arctan \frac{s}{z + d} \quad (1.66b)$$

変位は、

$$\begin{aligned} u_s &= u_r \sin \theta \\ &= \frac{P_0 a^3}{4\mu(s^2 + (z+d)^2)} \frac{s}{\sqrt{s^2 + (z+d)^2}} \\ &= \frac{P_0 a^3}{4\mu} \frac{s}{[s^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.67a)$$

$$u_\phi = 0 \quad (1.67b)$$

$$\begin{aligned} u_z &= u_r \cos \theta \\ &= \frac{P_0 a^3}{4\mu(s^2 + (z+d)^2)} \frac{z+d}{\sqrt{s^2 + (z+d)^2}} \\ &= \frac{P_0 a^3}{4\mu} \frac{z+d}{[s^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.67c)$$

応力は

$$\begin{aligned} \sigma_{ss} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial(su_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{P_0 a^3}{2} \frac{1}{[s^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \left[1 - 3 \frac{s^2}{s^2 + (z+d)^2} \right] \end{aligned} \quad (1.68a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= 2\mu \left[\frac{u_s}{s} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial(su_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{P_0 a^3}{2} \frac{1}{[s^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.68b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial(su_s)}{\partial s} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{P_0 a^3}{2} \frac{1}{[s^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \left[1 - 3 \frac{(z+d)^2}{s^2 + (z+d)^2} \right] \end{aligned} \quad (1.68c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zs} &= \mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{3P_0 a^3}{2} \frac{s(z+d)}{[s^2 + (z+d)^2]^{5/2}} \end{aligned} \quad (1.68d)$$

となる。とくに、表面における応力は $z=0$ として

$$\sigma_{zz}(s, z=0) = \frac{P_0 a^3}{2} \frac{1}{[s^2 + d^2]^{3/2}} \left[1 - 3 \frac{d^2}{s^2 + d^2} \right] \quad (1.69a)$$

$$\sigma_{zs}(s, z=0) = -\frac{3P_0 a^3}{2} \frac{sd}{[s^2 + d^2]^{5/2}} \quad (1.69b)$$

となる。この応力を打ち消すために、これにマイナス符号を付けた応力を地表にかけなければならぬ。1.2.7 節の Hankel 変換による定式化を用いるためにその地表に与える応力を Hankel

変換しておく。Hankel 変換の公式³ を使って計算すると、

$$P(\xi) = - \int_0^\infty \sigma_{zz}(s, z=0) J_0(\xi s) s ds = \frac{P_0 a^3}{2} \xi e^{-d\xi} \quad (1.71a)$$

$$Q(\xi) = - \int_0^\infty \sigma_{zs}(s, z=0) J_1(\xi s) s ds = \frac{P_0 a^3}{2} \xi e^{-d\xi} \quad (1.71b)$$

となることが導かれる。ただし、この σ_{zz}, σ_{zs} は無限弾性体の場合の応力で、それと逆符号の応力をかけるという意味で、最初に負号を付けてある。(1.65) を用いれば、地表変形は

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{P_0 a^3}{4\mu} \frac{s}{[s^2 + d^2]^{3/2}} + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty [(1 - 2\nu)P(\xi) + 2(1 - \nu)Q(\xi)] J_1(s\xi) d\xi \\ &= \frac{P_0 a^3}{4\mu} \left\{ \frac{s}{[s^2 + d^2]^{3/2}} + (3 - 4\nu) \int_0^\infty \xi e^{-d\xi} J_1(s\xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{P_0 a^3}{4\mu} \left\{ \frac{s}{[s^2 + d^2]^{3/2}} + (3 - 4\nu) \frac{s}{[s^2 + d^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{P_0 a^3}{\mu} (1 - \nu) \frac{s}{[s^2 + d^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.72a)$$

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{P_0 a^3}{4\mu} \frac{d}{[s^2 + d^2]^{3/2}} + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty [2(1 - \nu)P(\xi) + (1 - 2\nu)Q(\xi)] J_0(s\xi) d\xi \\ &= \frac{P_0 a^3}{4\mu} \left\{ \frac{d}{[s^2 + d^2]^{3/2}} + (3 - 4\nu) \int_0^\infty \xi e^{-d\xi} J_0(s\xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{P_0 a^3}{4\mu} \left\{ \frac{d}{[s^2 + d^2]^{3/2}} + (3 - 4\nu) \frac{d}{[s^2 + d^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{P_0 a^3}{\mu} (1 - \nu) \frac{d}{[s^2 + d^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.72b)$$

となる。この解は、地表で加えた応力のためにマグマ溜り表面での境界条件を満たさなくなっているが、その効果は $(a/d)^3$ のオーダーであることが分かっているので、まずは無視して良い。高次のオーダーの計算を見たい場合は McTigue (1987) を参照のこと。この解を茂木モデルという。この地表変位 (1.72) を図示したものが図 1.1 である。

この半無限媒質での地表変位を無限媒質における地表変位と比べてみると、半無限は無限の $4(1 - \nu)$ 倍になっていることがわかる。なので、地表変位の向きは、 $u_s/u_z = s/d$ を満たしており、圧力源の球の中心からまっすぐ離れる向きであることがわかる。このことは地中でも成り立っているわけではなくて、たまたま地表だとそうなるというだけである。

さて、地表変位の観測からマグマだまりについて何が言えるかを考える。上の解 (1.72) を観測にフィットすると、わかることは以下の通り。

1. 空間分布からは、マグマだまりの深さ d がわかる。地表変位の広がりがない d くらいになるということからもわかるし、もしも鉛直変位と水平変位が同程度の精度で分かっていたら、 $u_s/u_z = s/d$ から推定できる。

³このあたりの公式は Lipschitz の公式

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_0(\xi x) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \quad (1.70)$$

(導出は Bessel 関数の教科書等参照のこと) の両辺を α や ξ で何度か偏微分したものと Hankel 変換と逆変換の関係 (1.47) を用いると求められる。

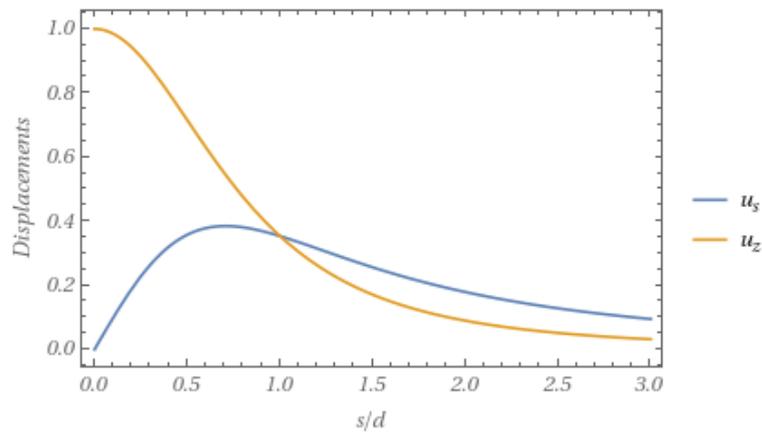


図 1.1: 茂木モデルの地表変位。

2. 振幅から $P_0 a^3$ という量が推定できる。 P_0 と a とは分けては推定できない。 P_0 は観測される変位を引き起こした圧力変化である。高次の項まで入れれば、原理的には P_0 と a を別々に推定できる。しかし、そのようなことを考慮しだすと、マグマだまりが球形からずれている効果とか地形の効果とか地下構造の効果とか、ほかのいろいろな効果も考慮しないといけなくなるので、実際上は難しい。
3. 振幅からは体積変化 ΔV も推定できる。 $a/d \ll 1$ とすると、マグマだまり近傍の変位は無限弾性体の解 (1.21a) で近似できるから、

$$\Delta V = 4\pi a^2 u_r(r = a) = \frac{\pi}{\mu} P_0 a^3 \quad (1.73)$$

となる。そこで、地表変位の式 (1.72) は

$$u_s = \frac{1-\nu}{\pi} \Delta V \frac{s}{[s^2 + d^2]^{3/2}} \quad (1.74a)$$

$$u_z = \frac{1-\nu}{\pi} \Delta V \frac{d}{[s^2 + d^2]^{3/2}} \quad (1.74b)$$

とも書ける。つまり、変位の大きさから ΔV を推定することが可能である。

以下では、茂木モデルが使われた印象的な実例を3つ挙げる。

茂木モデルは、しょっちゅう使われているので、例は非常に多い。ただし、注意すべきことは (1) もちろん茂木モデルで合わないこともよくあって、そういうときは岩脈とかシルとかを考慮することが多い (2) 水平成分や鉛直成分だけ見て茂木モデルで合っている、両方一緒に合わせられないこともある。そういうときは、楕円体モデルなどのほうが良い。 (3) 球形モデルで合うとしても、球形に液体がたまっているとは限らない。むしろ、液体と固体の共存状態だと考える方が妥当だろう。

1.2.10 茂木モデルの応用 1 桜島大正噴火

まず、茂木モデルの語源となった桜島の大正噴火 (1914) である。大正噴火は、日本では 20 世紀最大の火山災害であった。噴火によって、桜島と大隅半島が地続きになった。茂木 (1958)

は、この噴火による沈降を説明するのに球状圧力源モデルを使った（以前配布した図）。それで、このモデルは茂木モデルと呼ばれるようになった。

データに当てはめると、

1. マグマだまりの深さ d は 10 km とするとデータによく当てはめられた。
2. 当てはまった曲線から $u_{z,max} = -1.6$ m であった。 $\nu = 1/4$ とすると、

$$\frac{3 P_0 a^3}{4 \mu d^2} = -1.6 \text{ m} \quad (1.75)$$

このことから、 $\mu = 3 \text{ GPa}$ とすれば、 $P_0 a^3 = -6.4 \times 10^{17} \text{ Pa m}^3$ となる。

- $a = 1 \text{ km}$ なら、 $P_0 = -0.64 \text{ GPa} = -6.4 \text{ kbar}$
- $a = 4 \text{ km}$ なら、 $P_0 = -10 \text{ MPa} = -100 \text{ bar}$

3. 体積変化にすると

$$\frac{3 \Delta V}{4\pi d^2} = -1.6 \text{ m} \quad (1.76)$$

このことから、 $\Delta V = -6.7 \times 10^8 \text{ m}^3 = -0.67 \text{ km}^3$ となる。一方で、大正噴火の噴出物の量は 2 km^3 と推定されており⁴、茂木モデルからの推定値と同程度ではあるが、噴出物量の方がやや多いのはちょっと不思議ではある。球状マグマ溜りという仮定が良くないのかもしれない。

マグマ溜りの半径変化としてみると、 $\Delta V = 4\pi a^2 \Delta a$ だから

- $a = 1 \text{ km}$ なら、 $\Delta a = -53 \text{ m}$
- $a = 4 \text{ km}$ なら、 $\Delta a = -3.3 \text{ m}$

となる。

1.2.11 茂木モデルの応用 2 ガラパゴス島の Darwin 火山

ガラパゴス諸島は、活発に活動している火山島である。その中のイサベラ島の Darwin 火山できれいに茂木モデルがあてはまる火山活動が観測されている。配布図は、InSAR による観測で、1992 年から 1998 年の間の変化を示している。同様の観測は、今はほかの火山でも行われているが、これは比較的初期のもので、きれいなもの。

桜島と同様の考察をすれば、

1. マグマだまりの深さ d は 3 km とするとデータによく当てはめられた。
2. 最大の隆起量は $u_{z,max} = 0.2$ m であった。正確に言えば、InSAR では視線方向の長さ変化がわかるので、角度の補正をしなければいけないが、概数としてはこれで良いであろう。 $\nu = 1/4$ とすると、

$$\frac{3 P_0 a^3}{4 \mu d^2} = 0.2 \text{ m} \quad (1.77)$$

このことから、 $\mu = 3 \text{ GPa}$ とすれば、 $P_0 a^3 = 7.2 \times 10^{15} \text{ Pa m}^3$ となる。 $a = 1 \text{ km}$ なら、 $P_0 = 7.2 \text{ MPa} = 72 \text{ bar}$ となる。

⁴桜島火山観測所 <http://www.svo.dpri.kyoto-u.ac.jp/svo/topic-news/> 【桜島関連・解説】火山噴火の規模とマグマ貫入/

3. 体積変化にすると

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\Delta V}{d^2} = 0.2 \text{ m} \quad (1.78)$$

このことから、 $\Delta V = 7.5 \times 10^6 \text{ m}^3$ となる。マグマ溜りの半径変化としてみると、 $\Delta V = 4\pi a^2 \Delta a$ だから $a = 1 \text{ km}$ なら、 $\Delta a = 0.6 \text{ m}$ となる。

1.2.12 茂木モデルの応用 3 ハワイのキラウエア火山で起こっている収縮・膨張イベント

ハワイのキラウエア火山では、少なくとも 1990 年代から少なくとも 2015 年まで⁵、山頂付近で収縮・膨張イベント (deflation-inflation events, DI events) が多数起こっている (配布図)。この原因はよくわからないが、とりあえず茂木モデルをあてはめてみる。それでマグマだまりの位置と体積変化を求めるだけなら普通だが、ここで紹介する研究 (Anderson et al., 2015) ではマグマだまりそのものの体積を推定しているのが重要。なぜそんなことができるのかと言えば、DI イベントに伴って山頂溶岩湖の湖面の高さが上下するのが観測されているからである。すぐ下で説明するように、その湖面の上下量 Δh と体積変化量 ΔV の比例係数からマグマだまりの体積 V を推定できる。こんなことができるのはハワイならではである。

茂木モデルへのフィッティングのところは省略するが、大きなイベント (2011_09) でフィットした結果 (Anderson et al., Fig.11.14) では、圧力源はハレマウマウ火口の東の縁近くにあり、深さは $d \approx 1 \text{ km}$ 、体積変化は、 $\Delta V \approx 3 \times 10^5 \text{ m}^3$ 程度となる。一方、そのような大きなイベントにおける湖面変化は $\Delta h \approx 50 \text{ m}$ なので、マグマだまりの圧力変化は静水圧の関係から

$$\Delta P = \rho g(\Delta h) \approx (2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \times (10 \text{ m/s}^2) \times (50 \text{ m}) \approx 1 \times 10^6 \text{ Pa} \quad (1.79)$$

となる。(1.73) 式から

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{(4\pi/3)a^3} = \frac{3}{4\mu} \Delta P \quad (1.80)$$

の関係があるから

$$V = \frac{4\mu}{3} \frac{\Delta V}{\Delta P} = \frac{4(2.5 \times 10^9 \text{ GPa})}{3} \frac{3 \times 10^5 \text{ m}^3}{1 \times 10^6 \text{ Pa}} \approx 1 \text{ km}^3 \quad (1.81)$$

という具合にマグマだまりの大きさが推定できる。

1.3 マグマ溜りの形と大きさ

茂木モデルでは、マグマ溜りの形を球形と想定していたが、もちろんそれが代表的というわけではない。地殻変動からマグマの形を推測するときは、計算上の便から、よく球にしてみたり、球で合わなければ平板 (sill, dike) にしてみたりする。とはいえ、実際のマグマ溜りがそんな単純な形をしているわけではないだろう。

マグマ溜りの形は深成岩体の形から推測される (配布図)。sill, laccolith, stock, batholith, dike. dike をマグマ溜りというかどうかは問題だけど、dike がある場所で太くなっていたりしたらマグマ溜りと呼んでも良いだろう。

⁵それ以降どうなっているかは、私は知らない (単に私が調べていないだけ)。

それと注意しないといけないのは、たとえ dry なマグマであっても、マグマ溜りとしてメルトじゃぶじゃぶ状態をイメージするのは正しくないかもしれない。というのも、メルトは1本の太い火道を上がってくるのではなくて、割れ目のネットワークのようなものを上がってきて、浮力がなくなったところで止まったのがマグマ溜りというのが正しいイメージと思えるからである。だから、たとえ superheat があっても、周囲の岩石にできた隙間をメルトが埋めているというのが正しいイメージのように思う。

大きさは、小さいものでは km スケールであろう。先のキラウエアの例は最も小さな部類であろう。桜島では数 km^3 から数十 km^3 であろうと考えられている。桜島火山の場合は、始良カルデラの下 10km くらいのところに大きめのマグマ溜りがあって、桜島の下 2–6 km にも小さめのマグマ溜りがあると考えられている [井口, 2007; 吉留 1974]。1914 年噴火の噴出物が $\sim 2 \text{ km}^3$ なので、それよりは大きいマグマ溜りがあるのだと考えられる。大きな深成岩体になると、たとえば Bushveld の $\sim 10^5 \text{ km}^3$ などというものもある。これは一度に全部融けていたというよりは長い時間をかけた活動の総和なのだろうが、ともかく島弧の普通の火山より桁違いに大きなマグマ溜りがあってもおかしくはない。

1.4 本章の参考文献

- Anderson, Kyle R., Michael P. Poland, Jessica H. Johnson, Asta Miklius (2015) Episodic deflation-inflation events at Kīlauea volcano and implications for the shallow magma system, *Hawaiian Volcanoes: From Source to Surface, Geophysical Monograph 208* (eds. Rebecca Carey, Valérie Cayol, Michael Poland, Dominique Weis), American Geophysical Union, John Wiley & Sons, Inc.
- 井口正人 (2007) 地球物理学的観測により明らかになった桜島火山の構造とその構造探査の意義, *物理探査*, **60**(2), 145–154.
- McTigue, D.F. (1987) Elastic stress and deformation near a finite spherical magma body: resolution of the point source paradox, *Journal of Geophysical Research*, **92**(B12), 12931–12940.
- McTigue, D.F., C.C. Mei (1987) Gravity-induced stresses near axisymmetric topography of small slope, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **11**, 257–268.
- Mogi, Kiyoo (1958) Relations between the eruptions of various volcanoes and the deformations of the ground surfaces around them, *Bulltin of the Earthquake Research Institute*, **36**(2), 99–134
- 中村一明 (1989) 火山とプレートテクトニクス, 東京大学出版会
- Selvadurai, A.P.S. (2000) *Partial Differential Equations in Mechanics 2 – The Biharmonic Equation, Poisson’s Equation*, Springer.
- Segall, Paul (2010) *Earthquake and Volcano Deformation*, Princeton University Press.

- 渡辺正平, 岸武保 (1995) 二次元弾性の応力関数の誘導と解の性質 —地盤問題の解に及ぼす境界条件の影響—, 農業土木学会論文集, **178**, 71–81, doi:10.11408/jsidre1965.1995.471
- 吉留道哉 (1974) 桜島周辺における地震記録の異常とマグマたまりとの関連について, 験震時報, **39**, 49–62.

第2章 マグマ溜りの冷却

マグマ溜りの冷却の問題を取り扱う。マグマの固化とそれに伴う分化の問題が中心的課題になる。

2.1 マグマ溜りの初期条件

マグマ溜りの冷却を考える際には、最初どのような状態だったのかを考察しておく必要がある。

まず、マグマができたときは、その圧力のリキダス温度と組成になっているはずである。共融系なら、共融点にある。それが上昇してゆくと、断熱温度勾配にしたがって温度が下がる（配布図：Jaupart and Mareschal, 2011, Fig.11.4,5）。その低下率よりもソリダスの温度勾配が大きければ、マグマは融けた状態のまま上昇する。ただし、仮定としてマグマは十分速く断熱的に上昇するものとする。実際、断熱温度勾配はそれほど大きくないので、普通に考えると、マグマは融けた状態で上昇できる。そこで、マグマ溜りができるとき、最初はすべて液体の状態になると考えられる (Fig.11.4)。ソリダスよりも温度が高い分を *superheat* と呼ぶ。

ところで、図を見るときに基本的な事項を復習しておく。

1. 深さと圧力の関係。密度をおおむね $3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ として、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\rho g \\ &= -(3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3})(10 \text{ m/s}^2) \\ &= -3 \times 10^4 \text{ Pa/m} = -30 \text{ MPa/km} \approx -1 \text{ GPa/30 km} \end{aligned} \quad (2.1)$$

2. 断熱温度勾配

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\alpha g T}{c_p} = \frac{(2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1})(10 \text{ m s}^{-2})(1600 \text{ K})}{1.0 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} = -0.3 \text{ K/km} \quad (2.2)$$

$$\frac{dT}{dP} = \frac{dT}{dz} \bigg/ \frac{dP}{dz} = 1 \text{ K/100 MPa} = 10 \text{ K/GPa} \quad (2.3)$$

3. リキダス温度勾配; anhydrous basalt の場合、800 MPa より高压では 100 K/GPa よりも大きい。それより低压ではリキダス相が変わるので勾配が緩くなる。

ところが、水が入ると話が変わる。水は融点を下げる。圧力が下がると、水の溶解度が減ってくる。飽和圧力以下だと、水が *exsolve* し始めるので、融点（リキダス、ソリダス）が上がってくる。そこで、10 km より浅いようなマグマ溜りでは、最初から結晶が析出しているということもありうる。とくに沈み込み帯の火山だと、そもそもプレートから水が放出されることで融点が下がりマグマができると考えられているので、水が多く入っているのが普通である。

なので、日本の火山のような場合は、マグマ溜りは最初から部分溶融状態だと考えたほうが良い。一方で、水が exsolve して気泡になると浮力が生まれるので、水の存在は爆発的噴火にとっても重要である。

まとめると、マグマ溜りの初期状態としてどういうものをイメージするかは、いまだによくわかっているわけではない。以下では、それを認識した上で、単純化したイメージで話を進めてゆく。

2.2 一成分系の Stefan 問題

マグマの冷却というと、岩石学では、分別結晶作用というのが良く出てきて、結晶がマグマ溜りの中を落ちていって分化してゆくような絵がよくある。しかし、少し考えてみるとわかるとおり、このようなことはほとんど起こりそうにない。マグマ溜りは周辺から冷やされてゆくので、当然周辺から徐々に固まってゆくのである。分別結晶作用というのは、現代火成岩岩石学の祖ともいえる Bowen が考えたものなので、今でも絵としては良く使われるのだが（高校教科書にも載っていたりする）、学問上は後で議論するように必ずしも結晶が落ちてゆくことで起こるわけではない。このような先入観をなくする必要がある。

ここでは、最も簡単な固化問題を考えてゆく。すなわち、1成分系、対流無しで、1次元的に固化が進む問題を考える。このような問題を Stefan 問題という。一般解は無いので、いくつか簡単な場合を考えてゆく。

2.2.1 相境界が一定の速度で進む場合

z 軸 1次元で考え、相境界を $z = l(t)$ としたとき、 $z > l$ が液相、 $z < l$ が固相とする。まずは、一番簡単な問題で、相境界 $l(t)$ が一定の速度 V で進む解を求める。

$$l = Vt \quad (2.4)$$

z 軸 1次元で、 $z > l$ が液相、 $z < l$ が固相とする。

融点は T_L とし、初期の温度を $T_0 (> T_L)$ とする。すなわち、superheat $T_0 - T_L$ が存在する。液相側、固相側ともに熱伝導方程式に従う（対流無し）。熱拡散率、熱伝導率、比熱、密度の固相と液相での違いは無視する。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

ここで、 $\kappa = k/(\rho c_p)$ は熱拡散率（温度伝導率）である。境界条件は

$$T(z \rightarrow \infty) = T_0 \quad (2.6)$$

$$T(z = l(t)+) = T_L \quad (2.7)$$

$$T(z = l(t)-) = T_L \quad (2.8)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z}(z = l(t)-) - k \frac{\partial T}{\partial z}(z = l(t)+) = \rho LV \quad (2.9)$$

で与えられる。ここで L は潜熱である。

相境界を原点としたとき、定常になるような解を探す。独立変数を

$$\eta = \frac{V}{\kappa}(z - Vt) \quad (2.10)$$

に取り替えて、 η のみに依存する解があるかどうかを探す。ここで、 η が無次元になるように、 V/κ をかけてある。熱伝導方程式は

$$-\frac{dT}{d\eta} = \frac{d^2T}{d\eta^2} \quad (2.11)$$

となる。境界条件は

$$T(\eta \rightarrow \infty) = T_0 \quad (2.12)$$

$$T(\eta = 0+) = T_L \quad (2.13)$$

$$T(\eta = 0-) = T_L \quad (2.14)$$

$$c_p \frac{dT}{d\eta}(\eta = 0-) - c_p \frac{dT}{d\eta}(\eta = 0+) = L \quad (2.15)$$

である。さらに、境界条件が簡単になるように、従属変数のほうを

$$T(\eta) = T_L + \frac{L}{c_p} \theta(\eta) \quad (2.16)$$

として、 θ に取り替える。すると、熱伝導方程式は

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (2.17)$$

となり、境界条件は

$$\theta(\eta \rightarrow \infty) = St^{-1} \quad (2.18)$$

$$\theta(\eta = 0+) = 0 \quad (2.19)$$

$$\theta(\eta = 0-) = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{d\theta}{d\eta}(\eta = 0-) - \frac{d\theta}{d\eta}(\eta = 0+) = 1 \quad (2.21)$$

となる。ここで、

$$St \equiv \frac{L}{c_p(T_0 - T_L)} \quad (2.22)$$

は Stefan 数である。

微分方程式の解は

$$\theta = C_1 e^{-\eta} + C_2 \quad (2.23)$$

(C_1, C_2 は積分定数) で、境界条件を満たすように定数を決めると、

$$\theta = St^{-1}(1 - e^{-\eta}) \quad (\eta > 0) \quad (2.24)$$

$$\theta = (1 + St^{-1})(1 - e^{-\eta}) \quad (\eta < 0) \quad (2.25)$$

となる。元の変数に戻すと、

$$T(z, t) = T_L + (T_0 - T_L) \left(1 - \exp \left[-\frac{V}{\kappa}(z - Vt) \right] \right) \quad \text{for } z > Vt \quad (2.26)$$

$$T(z, t) = T_L + \left[(T_0 - T_L) + \frac{L}{c_p} \right] \left(1 - \exp \left[-\frac{V}{\kappa}(z - Vt) \right] \right) \quad \text{for } z < Vt \quad (2.27)$$

となる。この解は、ある1点（たとえば $z=0$ ）で見ると、時間とともに急速に温度が下がる解である。逆に言えば、時間とともに大きく冷やすような冷やし方をしないと、一定の速さで固化を進めることはできない。

固液境界の固相側の熱流は

$$q_{\text{solid side}} = k \frac{\partial T}{\partial z}(z = l(t)-) = \rho V [c_p(T_0 - T_L) + L] \quad (2.28)$$

となる。これは、単位時間に固体側が奪う熱は、同じ時間内に境界が移動した部分のマグマを初期温度から T_L まで下げて、さらに固化させるのに使われる熱に等しい、と解釈できる内容である。

熱拡散が十分に速ければ（あるいは、相境界の近傍では）、直線的な解になって

$$T(z, t) \approx T_L + (T_0 - T_L) \frac{V}{\kappa} (z - Vt) \quad \text{for } z > Vt \quad (2.29)$$

$$T(z, t) \approx T_L + \left[(T_0 - T_L) + \frac{L}{c_p} \right] \frac{V}{\kappa} (z - Vt) \quad \text{for } z < Vt \quad (2.30)$$

と近似できる。

2.2.2 下部境界が温度固定で、superheat が無い場合

ということで、もう少し自然かもしれないのは、下端で一定の温度で冷やしているという解である。この場合は、固化の進行が時間とともにゆっくりになってゆくと予想できる。似た問題で、プレートの半無限冷却モデルは3年生向けの「固体地球変動学」という講義で扱っている。これは、その相転移入りバージョンということになる。

z 軸1次元で考え、相境界を $z = l(t)$ としたとき、 $z > l$ が液相、 $z < l$ が固相とする。液相側は温度が融点 T_L で一定とする (zero superheat)。固相側は熱伝導方程式に従う。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.31)$$

ここで、 $\kappa = k/(\rho c_p)$ は熱拡散率（温度伝導率）である。境界条件は

$$T(z = l(t)-) = T_L \quad (2.32)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z}(z = l(t)-) = \rho L \frac{dl}{dt} \quad (2.33)$$

$$T(z = 0) = T_B \quad (2.34)$$

で与えられる。ここで L は潜熱である。

プレート半無限冷却モデルに倣って解を探す。まず、式が簡単になるように、規格化をする。 T の代わりに

$$\theta \equiv \frac{T - T_B}{T_L - T_B} \quad (2.35)$$

という変数を用いることにする。すると、方程式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (2.36)$$

で、境界条件は

$$\theta(z = l(t)-) = 1 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(z = l(t)-) = \frac{\rho L}{k(T_L - T_B)} \frac{dl}{dt} \quad (2.38)$$

$$\theta(z = 0) = 0 \quad (2.39)$$

となる。

次に、相似解を探すということで、解が以下の変数にのみ依存すると仮定してみる（これは結果的にうまくいけばOK）。

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (2.40)$$

つまり、 θ は、 η を通して z と t に依存するものとする。どうしてこういう変数の組み合わせを選ぶかというと、熱伝導方程式で、微分を割り算だと何となく思うと

$$\frac{\theta}{t} = \kappa \frac{\theta}{z^2} \quad (2.41)$$

という感じになって、 $z^2/\kappa t$ という組み合わせが無次元の変数として浮かび上がる。そこで相似解があるなら、 η のようなものだろうということがわかる。ファクター 2 は結果的に係数が簡単になるように付けたものでそれほど本質的ではない。

このような解が存在するために必要な条件は、 $z = 0$ と $t \rightarrow \infty$ 、 $t = 0$ と $z \rightarrow \infty$ がそれぞれ対応する初期条件と境界条件になっていることである。今の初期条件と境界条件はまずこれを満たしている。それから、境界の位置も

$$\eta = \frac{l(t)}{2\sqrt{\kappa t}} = \Lambda_L \quad (2.42)$$

のようになっていると仮定する。 Λ_L は解いた結果として求められる定数である。このとき

$$l(t) = 2\Lambda_L \sqrt{\kappa t} \quad (2.43)$$

のように境界が時間とともに動く。

次に、熱伝導方程式が η 1 変数のみで書き直せることを確認する。

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (2.44)$$

とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{z}{4\sqrt{\kappa t^3/2}} \frac{d}{d\eta} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d}{d\eta} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d}{d\eta} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2}{d\eta^2} \quad (2.47)$$

となるので、解くべき式は

$$-\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \quad (2.48)$$

$$\theta(\Lambda_L-) = 1 \quad (2.49)$$

$$\frac{d\theta}{d\eta}(\Lambda_L-) = 2St\Lambda_L \quad (2.50)$$

$$\theta(0) = 0 \quad (2.51)$$

$$(2.52)$$

となる。ここで、

$$St \equiv \frac{L}{c_p(T_L - T_B)} \quad (2.53)$$

は Stefan 数である（前の問題と少しだけ定義が違うので注意）。2階の微分方程式で境界条件が3つあるのは余分に見えるが、その余分の一つは Λ_L を決めるのに使われる。

これを解く。まず、式の形から自然に

$$\phi = \frac{d\theta}{d\eta} \quad (2.54)$$

と置く。すると、解くべき方程式は

$$-\eta\phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\eta} \quad (2.55)$$

となる。これは変数分離型なので、すぐに積分ができて

$$-\eta^2 = \ln \phi - \ln c_1 \quad (2.56)$$

$$\phi = c_1 e^{-\eta^2} \left(= \frac{d\theta}{d\eta} \right) \quad (2.57)$$

となる。境界条件を一つ使えば

$$\phi = 2St\Lambda_L e^{\Lambda_L^2 - \eta^2} \quad (2.58)$$

となる。もう一度積分すると

$$\theta = 2St\Lambda_L e^{\Lambda_L^2} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' = St\sqrt{\pi}\Lambda_L e^{\Lambda_L^2} \text{erf}(\eta) \quad (2.59)$$

となる。ここで、

$$\text{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \quad (2.60)$$

は誤差関数である（配布図）。最後に、使っていない境界条件 $\theta(\Lambda_L) = 1$ を用いると

$$\theta = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\Lambda_L)} \quad (2.61)$$

$$St\sqrt{\pi}\Lambda_L e^{\Lambda_L^2} \text{erf}(\Lambda_L) = 1 \quad (2.62)$$

となる。式 (2.62) は Λ_L を決める式である（配布図 Fig.11.7）。元の変数に直すと、

$$\frac{T - T_B}{T_L - T_B} = \frac{1}{\text{erf}(\Lambda_L)} \text{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \quad (2.63)$$

となり、これで温度が解けたとことになる。境界が

$$l(t) = 2\Lambda_L\sqrt{\kappa t} \quad (2.64)$$

のように動くということは、時間とともに進行速度が遅くなり、潜熱が大きくなると (St が大きくなると) 進行速度が小さくなる。

2.3 二成分系の Stefan 問題

次に、二成分系の固化問題を考える。二成分系になるとソリダスとリキダスの違いが出てきて、部分溶融状態が出てくる。しかし、部分溶融状態が出てくるかどうかはそれほど自明でもない。

主成分に対して、副成分があって、その濃度を C とする。リキダスを $T_L(C)$ 、ソリダスを $T_S(C)$ とする。それらの逆関数をそれぞれ $C_L(T)$ 、 $C_S(T)$ としておこう。相図としては配布図 (大川, 図 6-1) のようなものを考える。副成分によって凝固点降下が起きている状況を想定する。分配係数を

$$P \equiv \frac{C_S(T)}{C_L(T)} \quad (2.65)$$

と定義する¹。図の状況では $P < 1$ である。リキダスとソリダスが直線だとすると、

$$P = \frac{-dC_S/dT}{-dC_L/dT} = \frac{-dT_L/dC}{-dT_S/dC} \quad (2.66)$$

となる。

2.3.1 相境界が一定の速度で進む場合；組成的過冷却の問題

先に 2.2.1 節で考えたことの 2 成分版を考える。温度の拡散だけではなくて、副成分の拡散を考えるとポイントである。副成分の初期濃度は C_0 とする。

部分溶融状態が無く、相境界が平面でそれが一定の速度で進んでいる状態を考える。 z 軸 1 次元で考え、相境界を $z = l(t)$ としたとき、 $z > l$ が液相、 $z < l$ が固相とする。まずは、一番簡単な問題で、相境界 $l(t)$ が一定の速度 V で進む解を求める。

$$l = Vt \quad (2.67)$$

z 軸 1 次元で、 $z > l$ が液相、 $z < l$ が固相とする。

まず、副成分の拡散を考える。副成分は時間が経って落ち着くと配布図 (大川, 図 6-2) のようになると考えられる。最初は、図 6-1 で状態が A のところにあつたとする。冷えてゆくと B になる。すると、C の組成 PC_0 の固体が析出する。すると、余った副成分が液相側に押し出されて液相の副成分濃度が高くなり、平衡温度が低温側にずれる。その後さらに冷却が進むと液相の濃度が高くなる。このようにして、やがて固液界面での固相の濃度は C_0 (D 点)、液相の濃度は C_0/P (E 点)、温度は $T_S(C_0)$ に落ち着く。

¹図では、 P と同じものを偏析係数 k としてある。分配係数はふつう D と書くのだが、あとで拡散係数に D を使うのでここでは P とした。 k も熱伝導率と間違えやすいので避ける。 P も圧力と間違えやすいが、当面圧力は出てこないで良しとする。

この状態を解いてみる。固相側は $C = C_0$ という条件で解かなくてよい。副成分の濃度を支配するのは、拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (2.68)$$

である。境界条件は

$$C(z \rightarrow \infty) = C_0 \quad (2.69)$$

$$C(z = l(t)+) = C_0/P \quad (2.70)$$

である。

固液界面を原点としたとき定常になるような解を探す。独立変数を

$$\eta = \frac{V}{D}(z - Vt) \quad (2.71)$$

に取り替えて、 η のみに依存する解があるかどうかを探す。ここで、 η が無次元になるように、 V/D をかけてある。拡散方程式は

$$-\frac{dC}{d\eta} = \frac{d^2C}{d\eta^2} \quad (2.72)$$

となる。境界条件は

$$C(\eta \rightarrow \infty) = C_0 \quad (2.73)$$

$$C(\eta = 0+) = C_0/P \quad (2.74)$$

である。

微分方程式の解は

$$C = C_1 e^{-\eta} + C_2 \quad (2.75)$$

(C_1, C_2 は積分定数) で、境界条件を満たすように定数を決めると、

$$C = C_0 \left[1 + \frac{1-P}{P} e^{-\eta} \right] \quad (2.76)$$

となる。元の変数に戻すと、

$$C = C_0 \left\{ 1 + \frac{1-P}{P} \exp \left[-\frac{V}{D}(z - Vt) \right] \right\} \quad (2.77)$$

となる。

一方、温度分布は、以前 2.2.1 節で求めたように、液相側では

$$T = T_S(C_0) + [T_0 - T_S(C_0)] \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{V}{\kappa}(z - Vt) \right] \right\} \quad (2.78)$$

である。とくに界面付近で直線近似すると

$$\begin{aligned} T &\approx T_S(C_0) + [T_0 - T_S(C_0)] \frac{V}{\kappa}(z - Vt) \\ &= T_{L0} - \frac{mC_0}{P} + \left[T_0 - T_{L0} + \frac{mC_0}{P} \right] \frac{V}{\kappa}(z - Vt) \end{aligned} \quad (2.79)$$

である。ただし、リキダスとソリダスを直線近似して

$$T_L(C) = T_{L0} - mC \tag{2.80}$$

$$T_S(C) = T_{L0} - \frac{mC}{P} \tag{2.81}$$

と表した。温度分布と組成分布をまとめると図 2.1 のようになる。

一方、先に求めた組成分布におけるリキダス分布は

$$T_L(z) = T_L(C(z)) = T_{L0} - mC_0 \left\{ 1 + \frac{1-P}{P} \exp \left[-\frac{V}{D}(z - Vt) \right] \right\} \tag{2.82}$$

となり（大川, 図 6-3）、とくに界面付近では

$$T_L(z) \approx T_{L0} - \frac{mC_0}{P} + mC_0 \frac{1-P}{P} \frac{V}{D}(z - Vt) \tag{2.83}$$

となる。したがって、もしも

$$mC_0 \frac{1-P}{P} \frac{1}{D} > \left[T_0 - T_{L0} + \frac{mC_0}{P} \right] \frac{1}{\kappa} \tag{2.84}$$

ならば、界面付近では液相の温度がリキダスよりも下に来てしまう。通常は $D \ll \kappa$ なので、この条件は容易に満たされる。すなわち、拡散で考えると固液界面の近くは過冷却になる。これを組成的過冷却と呼ぶ（図 2.1；配布図 大川 図 6-3）。

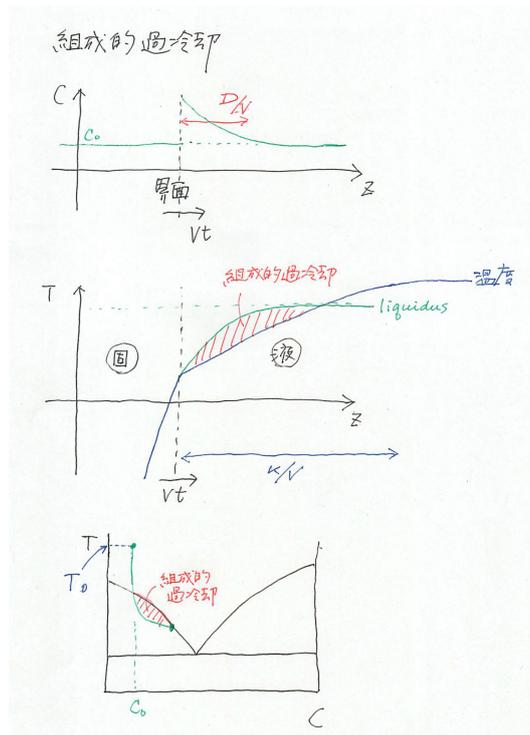


図 2.1: 組成的過冷却の説明図

組成的過冷却が起こると、樹枝状の結晶ができる（配布図 大川 図 6.4；Huppert Fig.19²）。界面で突出したところができる場所はより過冷却になっているのでますます伸びる。一方、谷間になったところには副成分が溜まるので成長が抑制される。

ここまでをまとめよう。

²参考サイト <http://www.phase-trans.msm.cam.ac.uk/dendrites.html>

- 2成分系になると solidus と liquidus があるから部分溶融状態が現れると簡単に言うことが多いけれども、それはバルク組成が一樣であることを暗に仮定した話で、そうでなければ自明ではない。
- そこで、液体と固体の組成の違いをきちんと考えて、固液界面が平面になる解を求めてみた。
- しかし、物質拡散が遅いという理由で、その解では、組成的過冷却領域が現れる。
- そのときは、樹枝状結晶が発達し、平らな界面で固体と液体が接するという事は無い。結局、それを巨視的にみれば部分溶融状態が現れるということになる。その場合、バルク組成は巨視的にみれば一樣に近くなるだろう。
- ただし、実際の岩石ではそれほど樹枝状の結晶は無い。樹枝状の結晶としては、komatiites の spinifex texture が有名だが、それ以外だとあまりない。実際のマグマだまりでは（なぜか）丸っこい結晶で部分溶融状態になるようだ。

2.3.2 固化前線

2成分系で見てきたことをマグマの多成分系に拡張して考えてみる。マグマでは、部分溶融状態ができて、solidus と liquidus にはさまれた**固化前線** (solidification front)³ ができる (配布図 Marsh Fig.2)。固化前線は、マグマ溜りの冷却とともにそれが流体内部に進む。2成分で言えば、結晶化度は図 2.2 のように変化する。巨視的に見れば、solidus と liquidus は空間的に分離する。多成分系ではもっと複雑になるだろう。

結晶化度によって、力学的な性質が変わるので、複数の領域ができる (配布図 Marsh Fig.3)。

1. **Rigid Crust:** 結晶化度 $N > 50-55\%$ 。ソリダスと臨界結晶化度の間に挟まれた領域。結晶どうしが支えあうネットワーク構造になっており、硬い。この部分は地表に噴出してこない。
2. **Critical Crystallinity Region:** $N \sim 50-55\%$ 。ここが、部分溶融固体と mushy 液体の間の遷移帯で粘性が大きく変わる。
3. **Mush Zone:** $25 < N < 50-55\%$ 。結晶だらけの流体という状態。結晶は相互の位置をあまり変えられないが、全体としては流体として振舞う。ここに来た結晶は固化前線内にトラップされる。
4. **Capture Front:** $N \sim 25\%$ 。これより外側 (N が大きい側) では結晶が抜けられなくなる。
5. **Suspension Zone:** $0 < N < 25\%$ 。結晶は自由に動ける。全体的な実効粘性は、液のみのときの 10 倍以内。

ただし、上の結晶化度の境目はマグマの組成や変形速度などによっても異なる。

次に、ちょっと横道にそれて対流を考えた後で、固化前線と対流が組み合わさると何が起こるかを考えてゆく。

³決まった訳語は無いが、ググってみるとそういう用語を使っている人はいる。

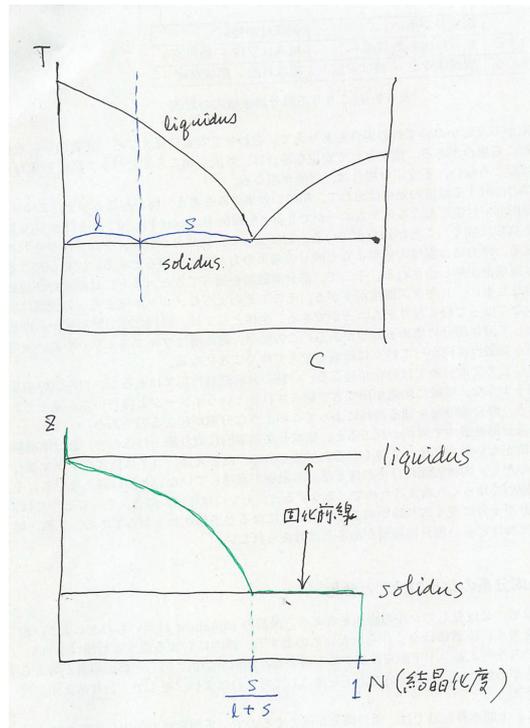


図 2.2: 2 成分系の固化前線の結晶化度を表す定性的な図。結晶化度は liquidus で 1、solidus では跳びが出る。

浮力源	液領域 (完全液体, suspension, mush)	固液共存領域 (rigid crust)
温度	熱対流	porous media 熱対流
組成	組成対流	porous media 組成対流
温度と組成	二重拡散対流	porous media 二重拡散対流
結晶濃度	「結晶集団対流」(結晶が多い部分と少ない部分の浮力の差による)	
泡	「泡集団対流」	

表 2.1: 対流の種類

2.4 マグマ溜り内の対流

マグマ溜り内で対流が起こるかどうかも熱的な進化にとっては重要である。単純に言えば、軽いものが上であれば成層は安定だし、軽いものが下であれば対流が起こる。

単純な熱対流は、上から冷やせば起こる。対流は伝導よりもはるかに速く熱を運ぶので、対流が起これば内部の温度は速やかに低下し、やがて superheat が無くなるとともに対流が停止する。

多成分系だと、対流にもいくつかの種類がありうるので、それらを表にした (表 2.1)。

対流の問題は、熱輸送の問題と物質分化の問題に関わる。それらに注目して、上のさまざまな対流を見てゆこう。

2.4.1 熱対流の基本概念

熱対流を流体力学的に簡単な場合に解いてみることをしてもよいのだが、今回はきちんとやらないことにして、結果的にわかるいろいろなことをまとめておく。

まず、流体力学では熱対流の基本として、平行平板間の熱対流（レイリー・ベナール対流 Rayleigh-Bénard convection）を考えることが多い。これは下面を暖めて上面を冷やすことによって起こる対流である。温度固定の境界条件で考える。上下の温度差を ΔT と、平板間距離を H とする。今回はあんまり詳しい解析はしないけれども、一応基礎方程式としてどんなものを使うかを鑑賞しておこう。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla\pi + \alpha g T \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.85)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.86)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T \quad (2.87)$$

ここで、 α は熱膨張率、 g は重力加速度、 κ は熱拡散率、 ν は動粘性係数である。

ここで、無次元化という操作を行う。そのことによって、重要なパラメタが何であるかを炙り出そう。無次元化の仕方にはいろいろな流儀がある。ここではその一つ（実はあまり普通の教科書では採用されていないが、私には一番しっくり来る）を紹介する。まず、長さのスケールは H 、温度のスケールは ΔT で良いであろう。速度は、マグマの対流だとある程度ねばねばしているから浮力と粘性のバランスで決まると考える。すると、

$$V = \frac{\alpha g (\Delta T) H^2}{\nu} \quad (2.88)$$

というスケールが浮かび上がる。時間のスケールは

$$\tau = H/V = \frac{\nu}{\alpha g (\Delta T) H} \quad (2.89)$$

である。そのうえで、

$$x, y, z = Hx_*, Hy_*, Hz_* \quad (2.90)$$

$$t = \tau t_* \quad (2.91)$$

$$\mathbf{v} = V \mathbf{v}_* \quad (2.92)$$

$$T = (\Delta T) T_* \quad (2.93)$$

$$\pi = V^2 \pi_* \quad (2.94)$$

と置く。アスタリスクを付けた量が無次元の変数である。すると、無次元化した方程式は

$$\frac{Ra}{Pr} \frac{D\mathbf{v}_*}{Dt_*} = -\nabla_* \pi_* + T_* \mathbf{e}_z + \nabla_*^2 \mathbf{v}_* \quad (2.95)$$

$$\nabla_* \cdot \mathbf{v}_* = 0 \quad (2.96)$$

$$Ra \frac{DT_*}{Dt_*} = \nabla_*^2 T_* \quad (2.97)$$

となる。ここで出てくる無次元数が流れを決定づけるパラメタということになり、それらは以下の2つである。一つは Rayleigh 数で

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\kappa \nu} \quad (2.98)$$

と定義される。熱対流を促進する要素が分子で、抑制する因子が分母に入っており、それらのせめぎ合いを表す量である。Rayleigh 数が対流の強さを決める最も重要な無次元数である。もうひとつの無次元数は Prandtl 数で

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.99)$$

と定義される。これは、流体のねばねば度と熱の伝わりやすさとの比である。これは分母も分子も対流を抑制する効果だが、分子のほうは動きにくさで対流を抑制する効果で、分母のほうは浮力をぼかすことで対流を抑制する効果である。

おおざっぱに言えば、 Ra が大きいほうが対流が強くなり、 Pr が大きいほうが対流がねばねばしてくる。実際のマグマではどれほどの値かといえば、仮に $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 、 $\nu = 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-14}$ 、 $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ 、 $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ 、 $\Delta T = 1 \text{ K}$ 、 $H = 10^3 \text{ m}$ とすると $Ra = 10^8$ 、 $Pr = 10^9$ ということになる。つまり、マグマはちょっとした温度差でも激しくねばねばした対流をする、ということがわかる。

熱輸送の観点から、対流の働きを表した式が、次の Nusselt 数 - Rayleigh 数関係である。

$$Nu \sim \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^b \quad (2.100)$$

ここで Nu は Nusselt 数、 Ra_c は臨界 Rayleigh 数、 b は 0.3 程度の数である。Nusselt 数は、熱伝導で運ばれる熱に対して、対流が起こると何倍の熱が運ばれるようになるかを表す量である。

$$Nu \equiv \frac{FH}{k\Delta T} \quad (2.101)$$

臨界 Rayleigh 数は、対流が起きるために必要な最低の Rayleigh 数で、 10^3 程度の量である。以下のように考えると $b = 1/3$ になるので、それが良く使用されるが、厳密にはそれより少し小さい。対流が激しく起こるとき、上昇（下降）流は、下（上）の境界層から上（下）の境界層に向かってまっすぐあまり形を変えずに流れると考えられる。そうすると、 F は H に依存しなくなると考えられる。 F が H に依存しなければ、 $Nu \propto H$ 、 $Ra \propto H^3$ だから、 $Nu \propto Ra^{1/3}$ でなければならない。ということで、 $b = 1/3$ が適切だと考えられる。

もう少し丁寧に言えば、以下の描像が考えられる。対流層の上下の温度差を ΔT とする。対流層の内部は上下境界の温度の間になっているとする。下から暖められた流体の底部には、熱境界層が $\delta \sim \sqrt{\kappa t}$ で発達してくる。この熱境界層の Rayleigh 数が臨界値に達すると、プルームがはがれて対流が起こる。そこで、

$$\frac{\alpha g ((\Delta T)/2) \delta^3}{\kappa \nu} = Ra_c \quad (2.102)$$

すなわち

$$\frac{Ra}{2} \left(\frac{\delta}{H} \right)^3 = Ra_c \quad (2.103)$$

これより、

$$\frac{\delta}{H} = \left(\frac{2Ra_c}{Ra} \right)^{1/3} \quad (2.104)$$

である。このとき

$$F = k \frac{(\Delta T)/2}{\delta} \quad (2.105)$$

⁴これは 900°C の dacite くらいなのでけっこうねばねばしている。The encyclopedia of volcanology, 2nd ed., p.123 参照。

と見積もることができるすると、

$$Nu = \frac{H}{2\delta} = 2^{-4/3} \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{1/3} \sim \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{1/3} \quad (2.106)$$

となる。

2.4.2 組成対流

組成対流というのは、液体の組成の違いによって密度が変わることで対流が起こるというものである。方程式系は、熱対流と類似のものである。温度 T を組成 C に、熱拡散係数 κ を物質拡散係数 D に、熱膨張率 α を密度の組成依存性 β に置き換えれば、熱対流と平行に議論が進む。

マグマの場合は、おおむね mafic なものは重く、silicic なものは軽い。おおむね SiO_2 の割合が多いと軽くなると考えればよい。

ただし、マグマ溜りの場合は、最終的には冷却が駆動する対流なので、境界条件が異なる。熱対流の場合は、理想的状態として、温度固定とか熱流固定を想定しうるが、組成対流の場合は、組成固定とか組成流束固定を想定することはほぼありえない。固化に伴う成分の分配が、組成の不均一を生むので、その意味では、固化の進行と分離して議論することはできない。

2.4.3 二重拡散対流

二重拡散対流には広い意味と狭い意味がある。広義の二重拡散対流は、温度と組成の両方が浮力に効くような対流のことである。これは、おおざっぱに言えば、温度の効果と組成の効果をし合わせるだけでよい。狭義の二重拡散対流は少し後で説明する。

温度の効果と組成の効果が逆になる場合がとくに興味深い。ひとつには、冷たいほうが軽いという熱対流とは逆のことが起こる場合がある。マグマ溜りが固化しているときは、組成と温度の関係が liquidus に縛られる。通常の分化では、温度が冷えてゆくと液が silicic になってくるので、冷たいほうが軽くなるという通常の熱対流と逆のことが起こる。そのとき、冷たいものが上昇し、暖かいものが下降するということになるので、対流が起きても熱を暖かいほうから冷たいほうに輸送することにならないことがある。

もう一つは狭義の二重拡散対流である。狭義の二重拡散対流は、以下のようなものである。温度と組成の一方が安定、他方が不安定な成層を形成し、両方足すと安定になるにもかかわらず、温度と組成の拡散係数の違いが原因となって対流が起こるというタイプの対流である。温度の拡散係数は組成の拡散係数よりもはるかに大きい。以下の2つのタイプがある（配布図 小屋口 図 10.2）。ここでは、注目する化学成分の濃度が濃いほど重いとする。

- salt finger 型 (b) 温度は安定な成層、化学成分は不安定な成層
- diffusive 型 (c) 温度は不安定な成層、化学成分は安定な成層

いずれも両方の効果を足すと成層は安定になるものとする。このような場合にどうして不安定になるかは、配布図（小屋口 図 10.5）のように均一な2つの流体層が重なっている状態を考えるのがわかりやすい。

- (a) の salt finger の場合を考えよう。この状態で、熱拡散が起こったとしよう。物質拡散は小さいのでほとんど起こらない (図 2.3)。すると、密度は2層の境界の上下で逆転する。これが不安定を起こす。
- (b) の diffusive の場合に同様に熱だけ拡散させると (図 2.3)、今度は密度はそれぞれの層内の境界付近で不安定になる。これが不安定を起こす。

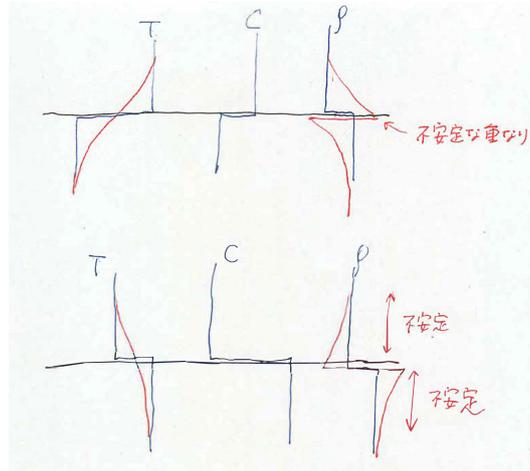


図 2.3: 二重拡散対流のしくみの模式図

配布図 10.5 はちょっと違った言い方で不安定を説明している。

- (a) の salt finger の場合は、2層境界が少しでこぼこになったとする。熱は拡散して均一になるから、組成の効果が現れ、飛び出た部分は周囲より軽いということになる。それで飛び出た部分はどんどん飛び出ていって、salt finger が形成する。
- (b) の diffusive 型の場合は、境界の乱れは抑えられる。組成の効果は安定だからである。一方、それぞれの層内では、上の層は下から暖められ、下の層は上から冷やされるので、熱対流が駆動される。その結果、対流層が重なるような状態ができてくる。

配布図 10.3,4 はまた別の言い方で不安定を説明している。

- 10.3 の salt finger の場合は、流体の塊を少し下げると、温度はすぐに拡散するので、化学成分の効果が現れて周りより重いということになる。そこでさらに下降する。このようにして、多数の細長いプルームが出現する。これを salt finger と呼ぶ。たとえば、乾燥した地域の塩湖では、表面から水分が蒸発して、上に向かって高温高塩分になる。そこで、salt finger が観察される。
- 10.4 の diffusive 型の場合は、流体の塊を少し上げると、温度はすぐに拡散するので、化学成分の効果が現れて周りよりとても重くなる。温度拡散による時間遅れで、流体の塊は元に戻るのではなく、さらに行き過ぎる。行き過ぎた後で、温度拡散のため、周囲より軽くなり、また上昇する。ただし、また温度拡散による時間遅れでさらに行き過ぎる。このようにして振動的に対流に至る。

2.4.4 結晶集団対流

結晶が浮遊していてその数密度が高い部分が全体として周囲より重くなって対流を起こすということも考えられる。そのような部分が落ちて沈むと集積岩になる。場合によっては、上のほうから落ちてきたものがマグマ中心部の熱いところを通るときに再溶融するという循環が起きるかもしれない。

2.4.5 porous media 対流

固化前線内部では、固体のネットワークの中を液が対流するというタイプの対流が起こる。これを多孔質媒質中の対流 (convection in porous media)、浸透流の対流などという。

多孔質媒質中の対流と通常の粘性流体の対流の大きな違いは、粘性抵抗の働き方である。通常の粘性流体では、抵抗が

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.107)$$

という形で働くのに対して、多孔質媒質では

$$-\frac{\nu}{K} \mathbf{u} \quad (2.108)$$

という形で働く。ここで、 K は浸透率である。浸透率はだいたい空隙の大きさの自乗程度である。すなわち、通常の粘性流体では、抵抗が対流の波長に依存するのに対して、浸透流では依存しないという違いがある。このため、たとえば熱対流ならば、関係する Rayleigh 数は

$$Ra_{porous} = \frac{\alpha g \Delta T K H}{\nu \kappa} \quad (2.109)$$

ということになる。

2.5 固化の進行と対流が同時に起こる系における冷却と分化

さて、本当にマグマ溜りを考えようと思ったら、固化の進行と対流が同時に進行している系を考えなければならない。固化は、固化前線という一定の幅を持って起こることと、対流の種類によっていくつもの組み合わせがある。

注目点は、熱輸送と分化である。まずは、簡単な系で熱輸送についていろいろ考えていって、その後分化も含んだ問題を考えてゆく。

2.5.1 固化を伴わないシルの冷却

まず、水平に（シル状に）マグマが貫入して、それが冷却するという問題を考え、それによる冷却速度を考えよう。

シルの熱進化を支配する式は、基本的には

$$\rho H c_p \frac{d(T - T_B)}{dt} = -F \quad (2.110)$$

である。ここで T はマグマ溜り中心部の温度、 T_B は上下境界の温度である。

まず、対流が起こらなくて完全に熱伝導だけなら

$$F \sim 2 \times \frac{k(T - T_B)}{(H/2)} \quad (2.111)$$

で⁵、温度変化を支配する式は

$$\frac{d(T - T_B)}{dt} = -4 \frac{(T - T_B)}{\tau_{\text{diff}}} \quad (2.112)$$

where

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{H^2}{\kappa} \quad (2.113)$$

となる。容易にわかるように、 $\tau_{\text{diff}}/4$ という拡散時間でマグマ溜りは冷却することになる。これは、たとえば、 $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 、 $H = 10^3 \text{ m}$ とすると、

$$\tau_{\text{diff}} = 10^{12} \text{ s} = 3 \times 10^4 \text{ y} \quad (2.114)$$

となり、 $\tau_{\text{diff}}/4$ は 1 万年くらいになる。

一方、熱対流があって、 F は熱対流のときにやった $b = 1/3$ 則に従うと思えば、

$$F = k \left(\frac{\alpha g}{Ra_c \kappa \nu} \right)^{1/3} (T - T_B)^{4/3} \quad (2.115)$$

と書くことができる。温度変化を支配する式は

$$\frac{d(T - T_B)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{diff}}} \left(\frac{\alpha g H^3}{Ra_c \kappa \nu} \right)^{1/3} (T - T_B)^{4/3} \quad (2.116)$$

となる。これはいろいろな係数が定数だと変数分離型ですぐに解くことができ、

$$T - T_B = (T_0 - T_B) \left[\frac{1}{\frac{t}{3\tau_{\text{diff}}} \left(\frac{Ra_0}{Ra_c} \right)^{1/3} + 1} \right]^3 \quad (2.117)$$

となる。ここで、 T_0 は初期温度、 Ra_0 は初期の Rayleigh 数である。冷却にかかる特徴的な時間は

$$\tau_{\text{T.conv}} = 3\tau_{\text{diff}} \left(\frac{Ra_c}{Ra_0} \right)^{1/3} \quad (2.118)$$

となる。単なる熱伝導の 1/100 程度 (いろいろなパラメータに依存するが) になることがわかる。

2.5.2 1 成分の固化するシルにおける冷却

しかし、固化がが入ると、対流が抑制される。

一成分系を考える。一成分系だからといって、実際のマグマに応用できないわけではない。実際の岩石は多成分系だから一つの融点があるわけではないが、ここで融点といているのは、対流融点⁶ (convective liquidus) に相当する。対流融点とは、固化前線の critical cristallinity

⁵最初の 2 は上下両面からという意味。 $H/2$ は中心と境界までの距離。

⁶そのような訳語があるわけではないが、この講義ではそう呼んでおく。

region かそれより少し mush 寄りのところで、マグマ溜り全体の対流システムに組み込まれるかどうかの境目の結晶化度のところのリキダスである。熱輸送や冷却の問題を考えると、第0近似的には、対流融点を融点とする一成分系と考えてもよい。分化の問題はもちろんこれでは考えられない。

まず、最初から superheat が無い場合を考える。一成分系では、superheat がなければ対流は起こらない。というのも、superheat が無ければ、固化前線の先端では上下とも温度が融点になるので、鉛直方向の温度勾配がなくなるからである。すると、内部で熱対流は起こらないことになる。すると、冷却にかかる時間は、基本的には熱拡散時間になる。もう少し正確に言えば、半無限冷却問題(2.2.2節)の解では、固液境界が

$$l = 2\Lambda_L \sqrt{\kappa t} \quad (2.119)$$

のように動くのだったから、これを流用するすれば、上下冷却でマグマ溜りが固化するのにかかる時間は

$$\frac{H}{2} = 2\Lambda_L \sqrt{\kappa t} \quad (2.120)$$

から求められて

$$\tau = \frac{1}{16\Lambda_L^2} \tau_{\text{diff}} \quad (2.121)$$

ということになる。潜熱の効果で、単純な熱伝導時間よりやや長くなると考えられる。

次に、最初に superheat がある場合を考える。簡単のため、上からの冷却を考えよう。そのときに周囲の岩石が融けることもありうるとして、境界がどのように動くのかを考えつつどう冷えるかを考察しよう。固体側の初期温度を T_{s0} 、液体側の初期温度を T_{m0} とする。周囲の岩石もマグマも同じ物質だとして、融点を T_m としよう。もちろん、 $T_{s0} < T_m < T_{m0}$ である。この問題を厳密に解くのは面倒なので、これまで求めてきた式から推測する。固相側の熱流は、仮に境界の動かないプレートの冷却問題と同じに書けるとすると、

$$F_s = k \frac{(T_m - T_{s0})}{\sqrt{\pi \kappa t}} \quad (2.122)$$

である⁷。時間依存性は $F_s \propto t^{-1/2}$ である。一方、液相側では対流が起こるので、式(2.115)、(2.117)、(2.118)を組み合わせると

$$F_l = k \left(\frac{\alpha g}{Ra_c \kappa \nu} \right)^{1/3} (T_{m0} - T_m)^{4/3} \left[\frac{1}{\frac{t}{\tau_{T.\text{conv}}} + 1} \right]^4 \quad (2.123)$$

となる。時間依存性は、 $t < \tau_{T.\text{conv}}$ のとき $F_l \propto t^0$ 、 $t > \tau_{T.\text{conv}}$ のとき $F_l \propto t^{-4}$ となる。これをグラフに描くと図2.4のようになる。 $F_s > F_l$ だと固化、 $F_l > F_s$ だと溶融が起こるので、この場合、時間的には、固化→溶融→固化の順に進むことになる(配布図、小屋口、図9.9)。時間がたつと、液相が superheat を失って融点に達する。すると、あとは前述のように固相の熱伝導だけで固化が進む。

このような過程を実際に計算してみたのが、配布図(小屋口、図9.11 or Koyaguchi and Kaneko, 1999)である。図9.10の3つの場合で計算した。Case 1 が先に説明したように、境界が動いて、かつ、液体が対流する場合である。Case 2 は境界は移動するが、対流が起こらない場合である。Case 1, 2 ともに、固体も液体も同じ物質で融点は同じとする。Case 3 は液

⁷この表式はこの講義では前に出していないが、半無限プレート冷却問題の解からすぐに出せる。

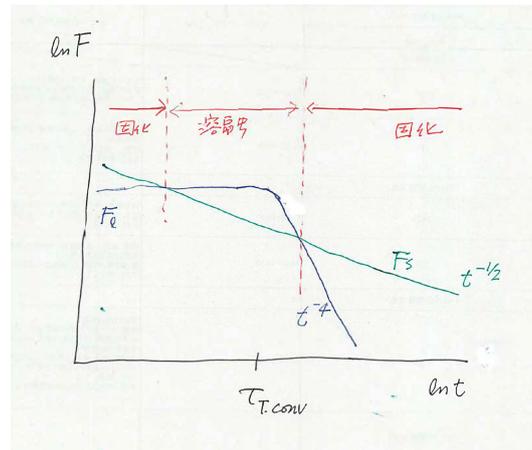


図 2.4: 上から冷やされるシルの固相側と液相側の熱輸送

体は対流するが、境界は移動しない場合である。周囲の岩石の融点が高く、マグマの融点が高い場合に相当する。この計算では $\tau_{\text{diff},s} \sim 5 \times 10^4 \text{ yr}$ 、 $\tau_{\text{T,conv}} \sim 90 \text{ yr}$ となることを用いると、この図をおおむね説明できる。Case 1 の場合は、液体は $\tau_{\text{T,conv}}$ という時間スケールで冷却する。これは熱対流による熱輸送が決めている。いったん融点まで温度が下がってしまうと、それ以上温度が下がらなくなる。対流も止まる。Case 2 は対流が無いので、単に熱伝導の時間スケール $\tau_{\text{diff},s}$ で冷却している。融点に達すれば、それ以上は全部固まるまで温度が下がらない。Case 3 は対流はあるものの、固体の熱伝導で時間スケールが決まる。その理由は以下のとおり。境界面での温度が固定されていないので、対流で一生懸命熱を運んでも、固体部分が熱を運んでくれないと、境界面の温度が上がることによって対流が弱まる。そこで、結局固体部分の熱輸送でものごとが律速されてしまう。

実際のマグマでの状況を考えると、superheat がある場合は、以下のようにまとめられる。ただし、簡単のため組成対流もしくは組成による成層の安定化の効果は考えていない。それらを考えるとまた複雑になる。

- マグマと周囲の岩石の融点が近く、固化もしくは溶融が起こって、液体マグマの周縁部の温度が融点でバッファされる場合：最初マグマは対流によって急冷し、融点付近に達すると対流が止まって熱伝導でゆっくり冷えるようになる。固化前線は徐々にマグマ溜り内部に進行する。
- マグマの融点が低く、周囲の岩石の融点が高い場合：熱輸送は周囲の岩石の熱伝導で律速される。マグマが融点よりも高温のうち、マグマはゆるやかに対流しているかもしれない。やがてマグマが融点に達すると、対流が止まり、固化前線が徐々に内部に進行する。
- マグマの融点が高く、周囲の岩石の融点が高い場合（これは上では説明してこなかった）：マグマは周囲の岩石を大量に融かし、組成が周囲の岩石に近づいてゆく。マグマは融かした岩石との混合によって冷却する。それらの過程によって、上の第 1 の場合に接近してくる。

2.5.3 分化がおきる条件

2 成分以上の系を考えるときの重要なポイントは分化 (fractionation) である。

	副成分が重い	副成分が軽い
上から冷える	組成対流+ 熱対流+	組成は安定 - 熱対流+
下から冷える	組成は安定 - 熱は安定 -	組成対流+ 熱は安定 -

表 2.2: 起こりうる部分溶融層内の対流

対流は基本的にものを混合するので、それだけでは分化が起こらない。分化が起こるには、固相と液相の間に相対運動があることが必要である。そのためには、主として2つの過程が考えられる。

1. 部分溶融層 (rigid crust) の中を液が運動すること (固化前線内部で起こる)
2. 液の中を結晶が沈降すること (粘性流体領域で起こる)。これには2つあって、結晶一つ一つが沈降してゆくモード (Bowen 的) と「結晶集団対流」として塊で沈降してゆくモードがありうる。後者の場合も、最終的には結晶一つ一つが沈降することで、液と結晶が分離する。

第2の過程が重要と考えるかどうかで、立場が分かれる。これには核生成の問題 (寅丸さんが得意なやつ) が関係しており、なかなか決着がつかない。固化前線の考え方を提唱した Marsh の立場を取って説明しておく。Marsh によれば、結晶化は固化前線の内部でのみ起こる。すると、マグマ溜りの中で結晶は、固化前線からあまり分離しない。分離したとしてもマグマ溜り内部の熱い部分まで来ると再び融ける。それで、基本的には結晶化は固化前線という形でのみ起こり、結晶の沈降による分化は起こらないし、集積岩もできない。結晶の沈降による分化が起こるのは、マグマが貫入してきたときにすでに結晶ができていた場合に限る。

そこで、以下、しばらくは第1の過程の考察をし、後で、初期に結晶がある場合を考察する。

2.5.4 部分溶融体内部の対流と分化

部分溶融体 (rigid crust) の中の液の運動について考える。

まずは、拡散は遅いので巨視的に見れば平均組成が変わらないということを考える。すると、rigid crust 層の中では相図にしたがって組成勾配ができる。ここで、副成分が重い場合、軽い場合、上から冷える場合、下から冷える場合の4通りを考える (表 2.2)。

すると、組成と熱の効果で部分溶融層の液相の成層が安定な場合と不安定な場合が出てくるのがわかる。組成と熱の効果が同じ場合は、話が簡単である。異なる場合は、両方合わせたものが安定か不安定かのいずれの場合もありえて、合わせて安定に見えても (狭義の) 二重拡散対流が起こる場合がある。結果として安定な場合は、対流が起こらず、バルク組成も変わらず、分化は起こらない。不安定な場合は、対流が起こる。

以下、浮力に対する温度の効果は忘れて、組成の効果のみを考え、何が起こるかを見てゆく。部分溶融層内部で対流が起こるとチムニーができることが知られている。副成分が軽く、下から冷やされる場合を考える。浮力には温度の効果よりも成分の効果の方が効いているとする。固化が起こると液相には副成分が押し出される。そこで、部分溶融層を通過してきたメルトには副成分が濃集し軽くなるとともに、リキダス温度が下がる。そこでそのようなメルトが集まる上昇流域は固体成分が少なくなると軽くなりチムニーができる。全体としては、対流は部分溶融層から副成分を掃き出して液体部分に集める効果がある。この結果、液体層はリキダスよりやや高い温度を保ちながら共融点に向かって徐々に組成を変えてゆくことになる。

このようにして2成分系では分化が起こる。一種の分別結晶作用ではあるが、岩石学の初歩で単純に習うような、単純に結晶が出てきて除去されるというイメージとはだいぶ違うことに注意しよう。部分溶融層を通る流れによってこのような分別が起こるのである。

さらに、部分溶融層内で対流が起こると、副成分が効果的に取り除かれるので、部分溶融層の厚さは対流がない場合に比べて薄くなると予想される。たとえば、コアは巨大なマグマ溜りのようなものだが、内核表面にはそれほど部分溶融層が発達していないと私は考えている。それはコアが極めてゆっくり冷えるためで、そうすると、一つには圧密が効き、もうひとつには、対流で副成分が十分に速く取り除かれるということになると予想されるからである。実際、地震学的にもそれほど厚い部分溶融層があるとは考えられない。

2.5.5 2成分系のシルの冷却と分化

以上を受けて、2成分系のシルの冷却を考える。最初の superheat は無いものとしよう。相図は共融系を考え、固溶体は全く作られないものとする。浮力に対する温度の効果は忘れて、組成の効果のみを考える。上下から冷却すると考える。副成分が重い場合と軽い場合が考えられるが、一方がわかれば、もう一方は上下を逆にして考えればよい。そこで、とりあえず副成分は重いと考えよう。

そうすると、下側境界付近では、重い成分が出てくるので、下側境界での固化前線内は成層が安定になって、分化が起こらず、静かに熱伝導で冷えてゆく。一方、上側境界付近では、重い副成分のために対流が起こる。対流で重い副成分が効果的に取り去られれば、固化前線は狭くなる。マグマ溜り内部では対流のため副成分濃度は一様になり、時間とともに濃度が増えてゆく。液体部分の温度は、副成分の濃度に対応する liquidus になって、対流は熱をほとんど運んでいない。そこで、冷却は伝導で固化前線が前進するのに応じてゆっくり起こる。温度は、副成分の濃度の上昇に伴い liquidus が下がるのに応じて低下する。

マグマ溜り内部の副成分濃度がちょうど共融点に達すれば、主成分と副成分の両方の固相が析出し、温度、組成とも共融点でバッファされるので、対流は止まって、1成分系の固化と同様になる。その結果、図2.5のような分布になると予想される。

例として Anorthite-Diopside 系を考える（配布図）。玄武岩で最もよく見られる鉱物が斜長石と輝石なので、その端成分である anorthite と diopside は現実のマグマを2成分系で近似するときの代表的な組み合わせである⁸。anorthite はテクトシリケート⁹で、diopside はイノシリケート¹⁰で、構造がだいぶ違うので、固溶体を作らない共融系である。初期は、Anorthite-rich だとしよう。というのは、Di-An 2成分系では、高压下での共融点は1 bar での共融点よりも anorthite-rich だからである¹¹。この場合、主成分は anorthite、副成分は diopside である。両者は全く固溶体を作らない。液体よりも固体の方が重く、液体の中では副成分が多いほど重くなる¹²。

⁸ どの端成分を選ぶかは、玄武岩の中でも Ca 量の違いでいろいろありうるので一概には言えない。ここでは、Ca を含んだ anorthite $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$ と diopside $\text{CaO} \cdot \text{MgO} \cdot 2\text{SiO}_2$ を選んだ。化学式を見てもわかるとおり、化学組成上は Al_2O_3 と MgO を入れ替えると一方が他方になるという単純な関係にある。

⁹ SiO_2 が複雑な網目状構造を作る

¹⁰ SiO_2 が鎖状につながる

¹¹ ただし、diopside を mafic 成分の代表、anorthite を silicic 成分の代表と考えるという立場だと、mafic から silicic に分化が進むのが普通だから、diopside-rich にしておくのが自然である。

¹² 逆の場合は、上下ひっくり返して考える。

この結果を現実と比べてみると定性的には合っている（配布図；Jaupart and Tait, Fig.1）。下では対流が組成によって抑制され固液共存域ができる。上では anorthite が析出する¹³。

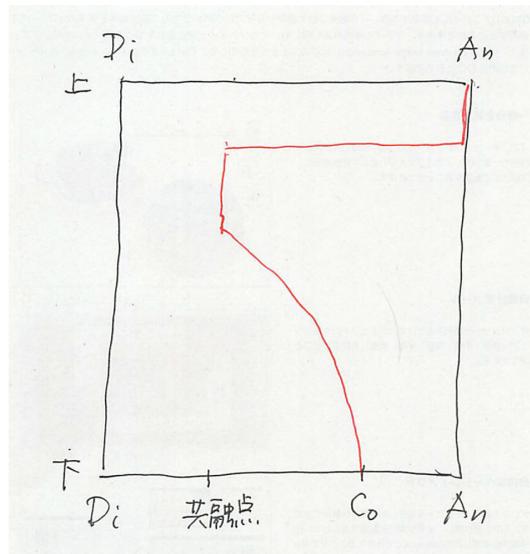


図 2.5: 2 成分系シルで定性的に予想される組成分布。anorthite が主成分、diopside が副成分。

図を見ると、sill が厚いほうが分化し、薄いと分化しないことがわかる。これは薄いと固液共存領域での対流が抑制されるためであると定性的には考えられる。ただし、定量的にそれで説明になっているのかわからない。というのも、普通に Rayleigh 数を考えると 10 m 程度の厚さがあれば十分に対流が起こりそうなものだからである。

2.5.6 結晶の沈降と分化

先に説明したように、経験的には 100 m 程度より薄い sill では固化前線内の対流が抑制されて、周囲からの固化では分化が起こらなくなるようである。しかし、もしも貫入してきたときにすでに斑晶があれば分化が起こる。

以下、基本的には Marsh (1996) の考えにしたがって説明する。ここで、マグマ溜りの初期条件が重要である。貫入してきたときにすでに斑晶が有るか無いかである。なぜ、これが重要な区別になるかというと、Marsh は貫入後の結晶の核形成と成長は固化前線内のみで起こり、マグマ溜りの液体部分では起こらないと考えているからである。仮に少し沈降 (or 浮上) する粒子があったとしても高温のマグマ溜り中心部まで行くと再び融けると考えている。したがって、結晶の沈降 (浮上) による分化があるとすれば、最初から結晶がある場合に限られる。しかし、これはすべての人に受け入れられているわけではなくて、マグマ溜りの液体部分で結晶の核形成と成長が起こると考えている研究者もいる。もしそうなら、以下の最初から結晶がある場合とほぼ同じことになる。核形成や成長はカイネティクス (寅丸さん得意技) や冷却速度や粘性 (西脇君の得意技) などさまざまな条件に依存するので、簡単に結論が出ない問題である。

まず、最初から結晶があるとしよう。その結晶の落下速度と固化前線の進行速度の競合が問題となる。落下が非常に速ければ集積岩をつくることになるが、そこまで速くないとする。結晶は液よりも重いとする。天井の固化前線を考える。固化前線が前進してきて capture front に

¹³最近の研究をあまり知らないで、このようなモデルがあるかどうかはわからない。

入ったところで、斑晶として固定される。固化前線の前進速度は時間とともに遅くなってゆくから、捕獲効率は時間とともに落ちてくる。一方、床の固化前線では反対のことが起きる。固化前線の前進速度が遅くなっていくほど、上から結晶が落ちてくるので捕獲効率が上がる。このようにして、斑晶の濃度が S 字型になってゆく。この結果が典型的に Shonkin Sag ラコリスで見られる（配布図、Marsh、Fig.4）。

一方、最初結晶は無いとしよう。固化前線内でできた結晶は、はがれてマグマ溜り中心の液体部に入るかもしれないが、そこは高温で再び融けてしまう。その結果、最終期を除いて、結晶が生き残る可能性は少ない。結晶の塊がブルームとして下まで落ちることはありうるが、それは下の固化前線を太らすだけで、分化には寄与しない。ということで、マグマの噴出しうる液体部分は、最初に斑晶が無ければ分化しないと考えられる。これを Null Hypothesis という（配布図、Marsh、Fig.5）。実際、Fig.5 の Penepplain sill では、最初に斑晶が無かったと推測され、中央付近の大部分では組成が一様で分化が見られない。上のほうに珪長質な部分があるが、これは上側の固化前線が剥がれてきたものと見られる。

2.5.7 その他、分化に関わること

これで、分化に関わる主なことは説明したが、そのほかにも重要になるかもしれない過程がある。軽く列挙する。

- 部分溶融層の熱的效果；部分溶融層では熱的には有効熱容量が大きくなる。
- 3成分以上の効果。
- 結晶の核形成に関わる kinetic な問題。核形成と成長。
- 側面冷却の問題。側面冷却は、マグマ溜りの形状とも関係する。側面が上向きにすぼんでいるか、開いているか。それによって、重力流（浮力流）が壁に沿うかどうか異なる。
- 二重拡散対流と分化；マグマ溜り内部の液ばかりのところでも、diffusive 型の二重拡散対流が起きていれば、組成が階段状に変化するということが起こるかもしれない。
- flow differentiation；重い粒子が流されるとき、粒子は流れの中心付近に集まる傾向がある。マグマでは、組成分布が D 字型になる。バルク組成が primitive な方が中心付近に来て、evolved な組成のほうに周縁部に来る。
- 固化前線のはがれ。固化前線の固体部分が重ければ、天井の固化前線が剥がれ落ちる。軽ければ、底部の固化前線が剥がれて浮く。分化した液体部分はそのまま天井（or 底部）に残る。

そのほか現実的にはマグマ溜りの「外」が関係する

- 新しいマグマの供給。
- 他のマグマとの混合。
- 周囲の岩石が融けて混合すること。

も重要だと考えられている。というわけで、現実まではなかなか遠いわけである。

2.6 マグマ溜りの冷却と分化のまとめ

以上まとめると、2成分系を考えると、1成分系とは違って格段にいろいろな要素が現れる。これまでそれらの要素と組み合わせをいくつか考えてきたが、組み合わせはそのほかにもたくさん考えられるので、なかなか列挙しうるものではないし、世の中でもきちんと整理されていない。まとめとして、要素のうちで重要な事項を列挙してみる：

- 冷却の時間スケールは、熱拡散が律速すれば $\tau_{\text{diff}} = H^2/\kappa$ であり、熱対流が温度固定条件で起こればそれより桁で小さくなる。
- 上から冷えるか、下から冷えるか、あるいは側面から冷えるか → 対流に影響。熱対流は上から冷えた場合と、側面から冷えた場合に起きる。これは1成分系でも同じだが、2成分以上の系の場合は組成対流にも影響する。
- 部分溶融状態ができるかどうか？部分溶融層内で対流が起こらなければ、厚い部分溶融層ができるが、起これば、部分溶融層は薄くなる。
- 分化は主に固化前線内の対流で起きる。対流が起きなければ、拡散は遅いので、分化は起こらない。結晶の沈降による分化もあるかもしれないが、最初に結晶が無ければ、それほど効かないようである。
- 最初に結晶があるかどうか？最初に結晶があれば S-profile、なければ液相部は分化しにくい。

これらの要素の組み合わせで、様々の冷却と分化のパターンが出現する。

2.7 本章の参考文献

- Huppert, H.E. (1990) The fluid mechanics of solidification, *J. Fluid Mech.*, **212**, 209-240, doi:10.1017/S0022112090001938
- Jaupart, Claude; Mareschal, Jean-Claude (2011) *Heat Generation and Transport in the Earth*, Cambridge University Press の 11 章
- Jaupart, Claude; Tait, Stephen (1995) Dynamics of differentiation in magma reservoirs, *Journal of Geophysical Research*, **100**, 17615-17636, doi:10.1029/95JB01239
- Jennings, Eleanor S.; Holland, Tim J.B.; Shorttle, Oliver; MacLennan, John; Gibson, Sally A. (2016) The composition of melts from a heterogeneous mantle and the origin of ferropicrite: Application of a thermodynamic model, *Journal of Petrology*, **57**, 2289-2310, doi:10.1093/petrology/egw065
- 小屋口剛博 (2008) 火山現象のモデリング, 東京大学出版会
- Marsh, Bruce, D. (1989) Magma chambers, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **17**, 439-474.

- Marsh, Bruce, D. (1996) Solidification fronts and magmatic evolution, *Mineralogical Magazine*, **60**(1), 5–40.
- 大川章哉 (1977) 結晶成長 (応用物理学選書 2) , 裳華房
- Worster, M. Grae; Huppert, Herbert E.; Sparks, R. Stephen J. (1990) Convection and crystallization in magma cooled from above, *Earth and Planetary Science Letters*, **101**, 78-89

第3章 1次元火道流

火山噴火には、大きく分けると非爆発的 (effusive) 噴火と爆発的 (explosive) 噴火がある。この差を生むのは、気相 (主に水蒸気、二酸化炭素) の存在である。マグマには最初から気相が数 % 溶け込んでいるのが普通である。それが地下を上昇してきて低圧になるとマグマから分離 (exsolve) する。その分離したガスがどこかに行ってしまうと、非爆発的な噴火になる。分離したガスがマグマとともに上昇すると、ガスは体積を増して噴火は爆発的になる。

その極端な2つの場合を1次元定常火道流モデルを使って見てゆく。1次元定常火道流としてモデリングできる噴火には、溶岩ドームを作るような噴火とプリニー式噴火がある。溶岩ドームを作るような噴火では、非爆発的噴火で、じわじわと長時間をかけてマグマが出てくる。プリニー式噴火は、大規模で爆発的な噴火で、噴火が数日間続くことがある。どちらも第一近似的には定常流だとみなしてよいだろう。これらは、最も穏やかな噴火と最も激しい噴火という2つの極端な場合である。

3.1 気相のない一方向定常流～溶岩ドームを作るような噴火

円管中をゆっくり粘性流体が流れるという問題を考える。Poiseuille 流と呼ばれる。これは溶岩ドームを作るような非爆発的な噴火のモデルとなる。

この問題は学部レベルの流体力学でやってもよさそうだが、どうやらやっていない感じなので、ここで説明する。

これは厳密に言えば一次元流ではなく、一方向の流れである。鉛直方向を z 方向として、一次元流というのは z にのみ依存する流れのことで、一方向の流れというのは速度が z 成分のみを持つという意味である。

3.1.1 一方向の定常流

まず、密度が一定としたときの Navier-Stokes 方程式から出発する。

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu_l \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.2)$$

なお、粘性はマグマのものであることを強調するために添字 l を付けておいた。密度が一定であることを利用して書き換えると

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p^* + \mu_l \Delta \mathbf{v} \quad (3.3)$$

ただし、

$$p^* = p + \rho \Phi \quad (3.4)$$

で、 $\Phi = gz$ は重力ポテンシャルである。 p^* は圧力の静水圧からのずれを示す。

次に、定常であるとする、

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p^* + \mu_l \Delta \mathbf{v} \quad (3.5)$$

となる。流れは z 方向のみで、 z 方向の速さを w とする。すると、円筒座標系 (r, ϕ, z) での Navier-Stokes 方程式の各成分と連続の式は、

$$\rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (3.6)$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial r} \quad (3.7)$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial \phi} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

となる。(3.9) 式より

$$w = w(r, \phi) \quad (3.10)$$

(3.7), (3.8) 式より

$$p^* = p^*(z) \quad (3.11)$$

が得られる。これらの式を (3.6) に代入すると、

$$0 = -\frac{dp^*}{dz} + \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right] \quad (3.12)$$

となる。これを

$$\frac{dp^*}{dz} = \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right] \quad (3.13)$$

と書き換えると、左辺は z のみの関数、右辺は (r, ϕ) のみの関数だから、これは定数でなければならない。その定数を $-\beta^1$ と置くと

$$\frac{dp^*}{dz} = -\beta \quad (3.14)$$

$$\mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right] = -\beta \quad (3.15)$$

となる。

3.1.2 Poiseuille 流

半径 a の火道内の軸対称流を考える。(3.15) の軸対称な場合は

$$\mu_l \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = -\beta \quad (3.16)$$

¹負の符号をつけたのは、下のほうが圧力が高いときに β を正にしたいから

となる。火道の場合は、地表を $z = 0$ 、マグマ溜りを $z = -D$ として、マグマ溜りの圧力は、周囲の岩石（密度 ρ_0 ）の静水圧で決まっているとすると

$$p(z = 0) = p_{atm} \quad (3.17)$$

$$p(z = -D) = p_{atm} + \rho_0 g D \quad (3.18)$$

したがって、マグマの密度を ρ とすると、

$$p^*(z = 0) = p_{atm} \quad (3.19)$$

$$p^*(z = -D) = p_{atm} + (\rho_0 - \rho)gD \quad (3.20)$$

である。したがって、

$$\beta = (\rho_0 - \rho)g \quad (3.21)$$

となる。

式 (3.16) の一般解は

$$w = -\frac{\beta}{4\mu_l}r^2 + A \ln r + B \quad (3.22)$$

となる (A, B は定数)。 $r = 0$ で流速は有限、 $r = a$ で流速は 0 となることから、

$$A = 0 \quad (3.23)$$

$$B = \frac{\beta}{4\mu_l}a^2 \quad (3.24)$$

なので、

$$w = \frac{\beta}{4\mu_l}(a^2 - r^2) = \frac{(\rho_0 - \rho)g}{4\mu_l}(a^2 - r^2) \quad (3.25)$$

となる。このような流れを Poiseuille 流という。円管を流れる全体積流量は

$$Q_V = \int_0^a w \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi a^4 \beta}{8\mu_l} = \frac{\pi a^4 (\rho_0 - \rho)g}{8\mu_l} \quad (3.26)$$

となる。

これを雲仙の 1991 年の溶岩ドーム形成噴火に当てはめてみる。わかっているのは、

$$Q_V = 10^5 \text{ m}^3/\text{day} \sim 1 \text{ m}^3/\text{s} \quad (3.27)$$

であるということである。これからマグマの粘性を推定してみる。

$$a = (10 \sim 100) \text{ m} \quad (3.28)$$

$$\rho_0 - \rho = (10 \sim 100) \text{ kg m}^{-3} \quad (3.29)$$

$$g = 10 \text{ m s}^{-2} \quad (3.30)$$

ということなので、

$$\mu_l \sim 3 \times (10^5 \sim 10^{10}) \text{ Pa s} \quad (3.31)$$

ということになる。dacite 溶岩の粘性は $(10^5 \sim 10^8) \text{ Pa s}$ 程度とされているので、もっともらしい数字である。

ところで、Poiseuille 流を利用して、流体が細い管の中を流れ下る時間から粘性を求める方式の粘度計のことを細管式粘度計という。原理としては今の雲仙溶岩の粘性を見積もったのと同じである。

3.2 気相を伴う1次元定常流～プリニー式噴火

3.2.1 気液混相流体の密度

火道流においては、気相の有無が本質的に重要である。気相がなければ、単なる Poiseuille 流で、浮力と壁面摩擦が釣り合って静々と上がってゆくだけになる。これが溶岩流とか溶岩ドームを作る非爆発的な (effusive) 噴火である。

一方、気相が含まれているとどうなるかを考えよう。気相を含んだマグマの状態方程式は、体積加法則が成り立つとして、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{nRT}{p} + \frac{1-n}{\rho_l} \quad (3.32)$$

である。ここで、 ρ が密度、 p が圧力、 n がガスの質量分率、 R が揮発性成分の気体定数、 T が絶対温度、 ρ_l が液相の密度である。なお、揮発性成分の状態方程式は

$$p = \rho_g RT \quad (3.33)$$

となるものとしている²。

マグマの熱容量は大きいので、通常は等温としてエネルギー方程式を解かない。ガスの等温音速

$$C_g^2 = RT \quad (3.34)$$

を用いると、状態方程式は

$$\frac{1}{\rho} = \frac{nC_g^2}{p} + \frac{1-n}{\rho_l} \quad (3.35)$$

となる。ガスの体積分率 ϕ は、右辺の2つの項の比で

$$\phi = \frac{\frac{nC_g^2}{p}}{\frac{nC_g^2}{p} + \frac{1-n}{\rho_l}} = \frac{1}{1 + \frac{1-n}{n} \frac{p}{\rho_l C_g^2}} \quad (3.36)$$

となる。

n や ρ_l を定数とすると (gas の exsolution やマグマの圧縮を考えない)、これから p と ϕ の関係がわかる。

$$n = 0.05 \quad (3.37)$$

$$\rho_l = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (3.38)$$

$$C_g = 700 \text{ m/s} \quad (3.39)$$

とすると、図 3.1 のような圧力とガス分率の関係になる。

図からわかるとおり、5% 程度の水が入っていれば、大気圧に近くなるとガス分率は9割を超えてほとんどがガスという状況になる。

このとき密度は図 3.2 のようになる。密度は、深さ 10 km (圧力 2.5×10^8 Pa) から地表までで2桁以上も変わることになる。

²したがって、この気体定数 R は1モルあたりのものではなく、単位質量あたりのものである。

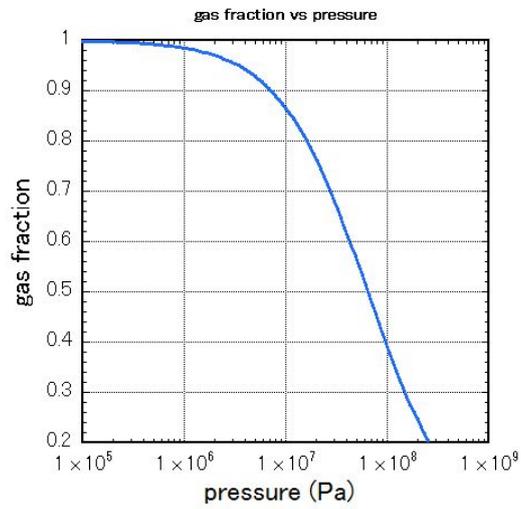


図 3.1: 圧力とガス分率の関係。ガスの質量分率は 5% とする。

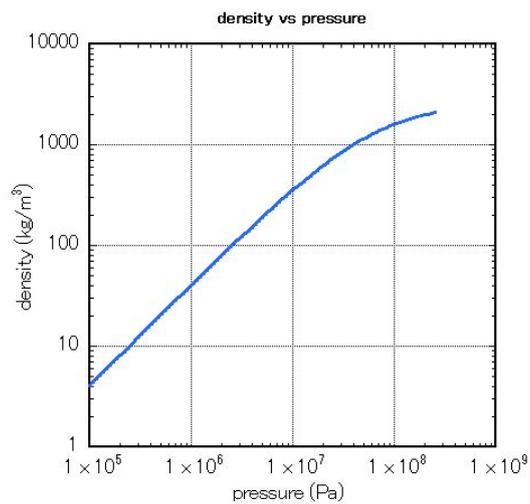


図 3.2: 密度と圧力の関係。ガスの質量分率は 5% とする。

3.2.2 火道内の流れのレジーム

配布図小屋口図7.2は、爆発的噴火において火道を通して上昇するマグマの流れの模式図である。ガス成分を含んだマグマが上昇していったら圧力が下がると、ガス成分が溶けきれなくなって分離する。これを発泡開始面と呼んでおく。数 wt% の揮発性成分が含まれているとすると、この深さは地下数 km である。その後は、気液 2 相流体として上昇する。

3.2.1 節で見たとおり、火道を通る間、減圧膨張によってガスの体積分率は大きく増大する。さらに、減圧すると溶解度が下がるのでガスの質量分率も増大する。そこで、流れのレジームも気泡流から噴霧流へと大きく変わる（図 3.3；配布図、小屋口図 7.2, 7.3）。気泡流とは、液相の中に気泡が浮いている状態の流れで、噴霧流とは、気相の流れに乗って火山灰やマグマの液滴が運ばれるような状態である。その遷移のところはいろいろ複雑な状態が考えられる（配布図小屋口図 7.3）が、マグマが粉々になるという意味で一括して「破碎 (fragmentation)」と呼ぶことも多い（配布図小屋口図 7.2）。破碎が起こるのは、気相の体積分率が 0.7–0.8 程度のときである。

ガスの体積分率が極めて大きくなるということは、以下の 2 つの意味でマグマを加速する (1) 密度が下がって浮力が大きくなる (2) 粘性が下がって抵抗力が著しく下がる。これらのことによって、噴火が爆発的になる。

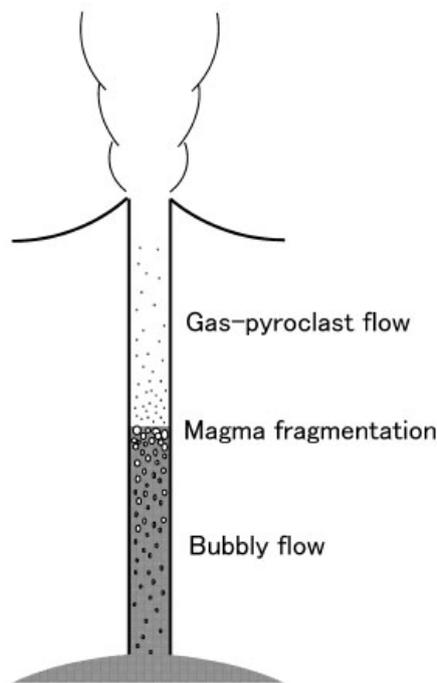


Fig. 1. Schematic illustration of magma flow in a conduit assumed in the many flow models.

図 3.3: 定常火道流の概略図（小園・三谷, 2006）。

3.2.3 気液相対速度無しの1次元流の基礎方程式とその解

基本的には以下の方程式を解く。気体と液体は平均的には一緒の速度で動くものとする。

$$\rho w A = Q(\text{const.}) \quad (3.40)$$

$$\rho w \frac{dw}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \rho g - F_{wall} \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{n C_g^2}{p} + \frac{1-n}{\rho_l} \quad (3.42)$$

それぞれ質量保存則、運動量保存則、状態方程式である。状態方程式は既に (3.35) として紹介した。これに質量保存側と運動量保存側を加えたものである。

記号は、 z が鉛直座標、 w が鉛直速度、 A が火道断面積、 Q が質量流量、 g が重力加速度、 F_{wall} が壁面摩擦、 n がガスの質量分率、 R が揮発性成分の気体定数、 T が絶対温度、 ρ_l が液相の密度である。

Poiseuille 流を求めたときと違って、この式は、完全に1次元、独立変数は z のみとする。ということは、 w は流速の平均値というべき量である。すなわち、

$$w = \frac{Q}{\rho A} = \frac{Q_V}{A} \quad (3.43)$$

で定義される量である。

これを解くと（配布図小屋口図 7.14; 図 3.4）のような解が得られる。3.2.2 節で見たように、気泡流が破碎を経て噴霧流へと移り変わる。マグマ溜りを出たときは気泡流で、圧力が下がることで気泡の体積分率が増加し、 $\phi = 0.8$ となったところで気泡流から噴霧流に移り変わるとしてある。方程式の上では気泡流と噴霧流とでは F_{wall} を大きく変えてある。気泡流領域では、壁面抵抗が大きく、噴霧流になると極端に小さくなる。説明は後からするが、具体的には

$$F_{wall} = \frac{8\mu_l}{a^2} w \quad \text{気泡流} \quad (3.44)$$

$$F_{wall} = \frac{C_{fric}\rho}{4a} w^2 \quad \text{噴霧流} \quad (3.45)$$

とする。ここで、 μ_l はマグマの粘性、 a は火道径、 C_{fric} は乱流摩擦係数である。

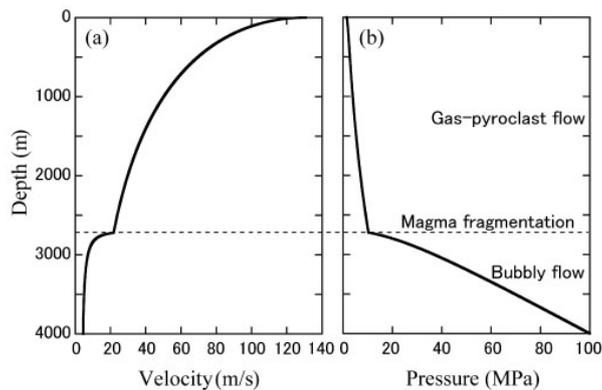


Fig. 2. A representative result from a simplified 1-dimensional steady conduit flow model. Variation of (a) velocity and (b) pressure along the conduit.

図 3.4: 典型的な定常火道流の解の一例（小園・三谷, 2006）。

これが、プリニー式噴火のモデルの基本である。以下、より丁寧に何が起こるかを見てゆくとともに、破碎面深度がどのようにして決まるのかを考察してゆく。

3.2.4 気泡流の解～壁面摩擦と浮力の釣り合い

まず、簡単な解として気泡流を考える。この場合、加速度項が無視できるだろう。 A は一定とする。基本的には Poiseuille 流である。ただし、平均流速 w を使って定式化してゆく。

抵抗則は、Poiseuille 流から求める。Poiseuille 流では

$$Q_V = \frac{\pi a^4 (\rho_0 - \rho) g}{8\mu_l} \quad (3.46)$$

であった。ここで a は火道径、 μ_l はマグマの粘性である。これは

$$(\rho_0 - \rho)g = \frac{8\mu_l}{\pi a^4} Q_V = \frac{8\mu_l}{a^2} w \quad (3.47)$$

の釣り合いからでてきたと解釈できるから、壁面摩擦則は

$$F_{wall} = \frac{8\mu_l}{a^2} w \quad (3.48)$$

と求めることができる。すると、解くべき方程式は、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g - \frac{8\mu_l}{a^2} \frac{Q}{\rho A} \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{n C_g^2}{p} + \frac{1-n}{\rho_l} \quad (3.50)$$

ということになる。

まず、簡単のため気泡流領域では気相の体積は小さいとして $\rho = \rho_l$ とする。もちろんきちんとした計算では密度変化も考慮しないといけないが、先の計算結果を見ても、破砕面より 500 m よりも下では速度が一定であり、その部分ではおおむね密度が一定ということである。すると基礎方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\rho_l g - \frac{8\mu_l}{a^2} \frac{Q}{\rho_l A} \\ &= -\rho_l g (1 + \Pi_1) \end{aligned} \quad (3.51)$$

where

$$\Pi_1 = \frac{8\mu_l Q}{\rho_l^2 g a^2 A} \quad (3.52)$$

と書ける。右辺は定数だから、先の解で言えば、圧力が直線的に減少している部分のことである（配布図小屋口図 7.14 の気泡流部分で圧力が直線的に減少しているところ。平均流速はほぼ一定。）。

次に、気泡流部分の長さ l_{bubbly} と流量 Q （ということは Π_1 ）の関係を求めよう。(3.51) 式より

$$\frac{p_{in} - p_{frag}}{l_{bubbly}} = \rho_l g (1 + \Pi_1) \quad (3.53)$$

となる。ここで、 p_{in} はマグマ溜りの圧力である。これより、気泡流領域の長さは

$$l_{bubbly} = \frac{l_h}{1 + \Pi_1} \quad (3.54)$$

where

$$l_h = \frac{p_{in} - p_{frag}}{\rho_l g} \quad (3.55)$$

と表現できることがわかる。

3.2.5 噴霧流の解その1～静水圧近似

噴霧流領域になると、まず第1に気体の圧縮性が重要となる。まずは、その効果を見てゆく。壁面摩擦は小さく、体積のほとんどは気体だとして

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{nC_g^2}{p} \quad (3.57)$$

という方程式系で考える。これらから

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{H} \quad (3.58)$$

となる。ここで、

$$H = \frac{nC_g^2}{g} \quad (3.59)$$

はスケールハイトである。解は

$$p = p_{ex} e^{-z/H} \quad (3.60)$$

となる。ここで、 p_{ex} は出口圧力である。すなわち、圧力はスケールハイト H で指数関数的に減少する。数値として

$$n = 0.05 \quad (3.61)$$

$$C_g = 700\text{m/s} \quad (3.62)$$

$$g = 9.8\text{m/s}^2 \quad (3.63)$$

とすると、

$$H = 2.5\text{km} \quad (3.64)$$

となる（配布図小屋口図 7.14 の噴霧流部分の圧力分布参照）。

これに対応して平均流速は

$$w = \frac{Q}{\rho A} = \frac{QnC_g^2}{pA} = \frac{QnC_g^2}{p_{ex}A} e^{z/H} \quad (3.65)$$

となり、指数関数的に増大することがわかる。

以上のことを用いて、噴霧流部分の長さ l_{mist} と出口圧力 p_{ex} の関係を求めよう。(3.60) 式より

$$\frac{p_{ex}}{p_{frag}} = e^{-l_{mist}/H} \quad (3.66)$$

となる。これより、噴霧流領域の長さは

$$l_{mist} = -H \ln \Pi_2 \quad (3.67)$$

where

$$\Pi_2 = \frac{p_{ex}}{p_{frag}} \quad (3.68)$$

と表現できることがわかる。

3.2.6 噴霧流の解その2～choking

密度が図 3.2 のように 2 桁以上変わるとすると、速度は

$$w = \frac{Q}{\rho A} \quad (3.69)$$

のように密度の逆数に比例するから、こちらも 2 桁以上変わることになる。すると、たとえば、深部での初速度が 1 m/s だとすると、地表に達するときには 100 m/s を超えることになり、場合によっては音速を超えることもありうることになる。

もう一つの問題としては、気液混合系の音速の問題がある。混合系の状態方程式

$$\frac{1}{\rho} = \frac{nC_g^2}{p} + \frac{1-n}{\rho_l} \quad (3.70)$$

を p について解くと

$$p = nC_g^2 \frac{1}{\frac{1}{\rho} - \frac{1-n}{\rho_l}} \quad (3.71)$$

となる。これから気液混合系の音速は

$$\begin{aligned} C_{\text{mix}}^2 &= \frac{dp}{d\rho} \\ &= \frac{nC_g^2}{\rho^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1-n}{\rho_l}\right)^2} \\ &= \frac{nC_g^2}{\left[1 - \frac{\rho}{\rho_l}(1-n)\right]^2} \\ &= \frac{nC_g^2}{\phi^2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

となり、とくに低圧では $1/\rho \gg (1-n)/\rho_l$ (or $\phi \approx 1$) となるから、

$$C_{\text{mix}}^2 \approx nC_g^2 \quad (3.73)$$

すなわち、

$$C_{\text{mix}} \approx \sqrt{n}C_g \quad (3.74)$$

となる。つまり、混合物の音速は、気体の音速の 1～2 割程度ということになる。たとえば、 $C_g = 700$ m/s、 $n = 0.05$ とすると、 $C_{\text{mix}} = 160$ m/s にしかならない。音速が小さくなる理由は、音速 $\sim\sqrt{(\text{弾性率})/(\text{密度})}$ で、気液混合物では、弾性率は弾性率の小さな気体が担い、密度は密度の大きな液体が担うためである。音速が遅いので、気液混合マグマは簡単に音速に達する。

すると、運動方程式の加速度項が無視できなくなる。このとき何が起こるかを考える。加速度項を加えた基礎方程式は、

$$\rho w A = Q \quad (3.75)$$

$$\rho w \frac{dw}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \rho g \quad (3.76)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = C_{\text{mix}}^2 \quad (3.77)$$

ということになる。ただし、主に噴霧流領域を見るので、壁面摩擦は無視した。混合物の音速を用いれば、解くべき方程式は、

$$\rho w A = Q \quad (3.78)$$

$$\rho w \frac{dw}{dz} = -C_{\text{mix}}^2 \frac{d\rho}{dz} - \rho g \quad (3.79)$$

となる。 ρ を消去すれば

$$\frac{Q}{A} \frac{dw}{dz} = -C_{\text{mix}}^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{Q}{wA} \right) - \frac{Qg}{wA} \quad (3.80)$$

となる。 A が一定とすると、

$$\left(\frac{C_{\text{mix}}^2}{w^2} - 1 \right) \frac{dw}{dz} = \frac{g}{w} \quad (3.81)$$

となる。このことから、数式上は $w = C_{\text{mix}}$ 、すなわち、速度が音速に達するとき $dw/dz = \infty$ となることがわかる。物理的には、音速に達してしまうと、もはや流体は地表が大気圧だという情報を知らないことになるので、地表における境界条件が $p = p_{\text{atm}}$ (大気圧) ではなくて、 $w = C_{\text{mix}}$ ということになる。これを chocking 条件という。つまり、火道内では流体の流速は音速を超えることができず、その代わりに、噴出時の圧力は大気圧を超える。

choking という意味は、以下のとおりである。マグマ溜りの圧力を徐々に高くしてゆくと w は増加するが、音速に達するとそれ以上は速度が増えられなくなる。これが「窒息」ということになる。マグマ溜りの圧力をいくら上げて、マグマの体積流量には上限が存在し

$$Q_{V,\text{max}} = C_{\text{mix}} A \quad (3.82)$$

である。ただし、マグマ溜りの圧力を上げれば、出口圧力は高くなるので、出口密度も高くなり、質量流量は上がる。具体的には、火口での密度は

$$\rho_{\text{ex,choke}} = \frac{Q}{C_{\text{mix}} A} \quad (3.83)$$

となり、圧力は

$$p_{\text{ex,choke}} \approx C_{\text{mix}}^2 \rho_{\text{ex,choke}} = \frac{C_{\text{mix}} Q}{A} \quad (3.84)$$

となる。

C_{mix} が定数 ($\approx nC_g^2$) とすれば、(3.81) は簡単に解ける。

$$\left(\frac{C_{\text{mix}}^2}{w} - w \right) dw = g dz \quad (3.85)$$

と変数分離型になるので、解くと

$$C_{\text{mix}}^2 \ln \frac{w}{C_{\text{mix}}} - \frac{1}{2} (w^2 - C_{\text{mix}}^2) = gz \quad (3.86)$$

となる。整理すると

$$\ln \frac{w}{C_{\text{mix}}} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{w}{C_{\text{mix}}} \right)^2 - 1 \right] = \frac{z}{H} \quad (3.87)$$

が得られる。

3.2.7 火口形状の問題

前節でマグマの流速が音速を超えなかった一つの理由は、実は A を定数としたことにある。先の方程式 (3.80) で A が変わるものとする

$$\left(\frac{C_{\text{mix}}^2}{w^2} - 1\right) \frac{dw}{dz} = -\frac{C_{\text{mix}}^2}{w} \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} + \frac{g}{w} \quad (3.88)$$

となる。 w が音速になるときにちょうど具合よく右辺がゼロになって符号を変えれば、すなわち、火口付近が開いた形状になれば、 $dw/dz > 0$ が常に成り立って超音速が実現するということがありうる。つまり超音速で噴出する解もある。このように火口の形状は噴火様式を決定する重要な要因である。

これは工学的にもラバルノズルの問題として良く知られているし、式の形の上では太陽風が超音速になる Parker の解と同じことになっている。上の式だけ見ていると、超音速の解は偶然のようにも思えるが、時間変化問題を調べてみると、ちゃんと実現することがわかっている。

3.2.8 破砕面深度と流量の決まり方

気泡流と噴霧流の解はわかったところで、この2つの解がどの深さで接続するかを見てゆく。すなわち、破砕面深度がどこになるかということである。それと同時に流量の決まり方もわかる。

火道断面積 A は一定の問題に戻る。火道の長さ l_{tot} ならびに入口圧力 p_{in} は与えられているとし、出口圧力 p_{ex} は choking 条件から決まるものとする。

$$p_{\text{ex}} = p_{\text{ex,choke}} \approx \frac{C_{\text{mix}} Q}{A} \quad (3.89)$$

すると、気泡流部分の長さ l_{bubbly} ならびに噴霧流部分の長さ l_{mist} と流量 Q の関係は (3.54) 式と (3.67) 式とが使えるものとして、

$$l_{\text{bubbly}} = \frac{l_h}{1 + \Pi_1} \quad (3.90)$$

$$l_{\text{mist}} = -H \ln \Pi_2 \quad (3.91)$$

where

$$l_h = \frac{p_{\text{in}} - p_{\text{frag}}}{\rho_l g} \quad (3.92)$$

$$H = \frac{C_{\text{mix}}^2}{g} \quad (3.93)$$

and

$$\Pi_1 = \frac{8\mu_l}{\rho_l^2 g a^2 A} Q \quad (3.94)$$

$$\Pi_2 = \frac{p_{\text{ex}}}{p_{\text{frag}}} = \frac{C_{\text{mix}}}{A p_{\text{frag}}} Q \quad (3.95)$$

となる。破砕面の位置と流量 Q は

$$l_{\text{tot}} = l_{\text{bubbly}} + l_{\text{mist}} \quad (3.96)$$

からわかるはずである（配布図小屋口図 7.16）。この図は、横軸に $\ln Q$ 、縦軸に l_{bubbly} 、 l_{mist} を取った図で、それらの和が l_{tot} になるところを探せば、 Q と破砕面深度がわかるという仕掛けになっている。このグラフの横軸は $\Pi_1 \propto Q$ で $\Pi_2 \propto Q$ であることから $\ln \Pi_1$ 軸と $\ln \Pi_2$ 軸であると見ることもできる。ただし、その相対的な位置関係は Π_2/Π_1 によって変わる（配布図小屋口図 7.17）。

いま、 $p_{in} = \rho_l g l_{tot} \gg p_{frag}$ とすれば、 $l_h = l_{tot}$ となる。このとき (3.96) 式は

$$l_{tot} = \frac{l_{tot}}{1 + \Pi_1} - H \ln \Pi_2 \quad (3.97)$$

となり、

$$\Pi_3 \equiv \frac{l_{tot}}{H} \quad (3.98)$$

と定義すると

$$-\frac{1}{\Pi_3} \ln \Pi_2 = 1 - \frac{1}{1 + \Pi_2(\Pi_2/\Pi_1)^{-1}} \quad (3.99)$$

と書き直せる。これをグラフにしたのが、配布図小屋口図 7.18 である。右下がりの直線が左辺、右上がりの曲線群が右辺である。この交点が解になる。縦軸は、噴霧流領域の割合を示し、横軸は、流量 Q を無次元化したものになる。

3.3 本章の参考文献

- [総説] 小園誠史, 三谷典子 (2006) 一次元定常火道流のモデリング・総説, 岩石鉱物科学, **35**, 166-176
https://www.jstage.jst.go.jp/article/gkk/35/3/35_3_166/_article/-char/ja/
<https://doi.org/10.2465/gkk.35.166>
- 小屋口剛博 (2008) 火山現象のモデリング, 東京大学出版会
- [論文] Yoshida, Shigeo; Koyaguchi, Takehiro (1999) A new regime of volcanic eruption due to the relative motion between liquid and gas, *Journal of volcanology and geothermal research*, **89**, 303–315.

第4章 レポート問題

本講義のどこでも好きな部分を自分の言葉で文章にして A4 5 枚以上にまとめよ。単に講義のまとめでも良いし、それに自分で調べたことを付け加えても良い。あまり内容を薄くしたくないので、最大の単位は1つの章とする。講義の時に参考にした文献のリストは配布する。

コピペは不可。コラージュも不可。図はコピペしても構わないが、それは A4 5 枚以上の分量には含めないものとする。英語文献を単に訳したものは（やや能はないものの）レポートとして認める。日本語文献を単に写したものはコピペとし、不可とする。とくに、あまり講義ノートに引きずられず、自分の言葉で語るようにすること。英語と日本語の違いは、翻訳するには理解するプロセスが必要であることによる。

締め切り：8月24日（月）

提出先：moodle（手書きの場合は、写真に取るとかスキャナでスキャンするとかすること。字が読める（解像度、コントラスト）ことを予め確認しておくこと。）