

地球惑星内部科学講義ノート～木星型惑星の内部構造

吉田茂生

2022年11月2日

目次

第 1 章	惑星内部構造の基本	5
1.1	元素の太陽系存在度と惑星を構成する物質	5
1.2	惑星内部の圧力構造の基本～静水圧平衡	7
1.3	外惑星の状態方程式～ポリトロップ	8
1.4	惑星の半径-質量関係と圧力分布	9
第 2 章	高圧物性の基礎	13
2.1	不確定性原理と電子の圧力	13
2.2	超高圧極限としての理想自由電子ガス	14
2.3	水素の金属化	17
2.4	水素とヘリウムの液相不混和～土星の特徴	18
2.5	参考文献	19
第 3 章	重力と内部構造	21
3.1	重力ポテンシャルと慣性モーメント	21
3.2	ガス惑星の慣性モーメント	22
3.3	外惑星の内部構造	23
3.4	参考文献	23

本講義の私が担当する部分では、木星型惑星の内部構造を中心に講義する。

木星型惑星は、木星と土星のことである。天王星型惑星（天王星と海王星）についても少し触れる。木星型惑星と天王星型惑星を合わせて外惑星と呼ぶことも多い。これらの惑星は地球型惑星とは大きく異なる。地球とは異なるどのような特徴があるか、あるいは、木星と土星の違いを見てゆきたい。

これらの惑星は、地球とは違って基本的にリモートからしか観測ができないので（探査機が突っ込んだ例はあるが、そんなに長い間とどまれないし、それほど深くまでは行っていない）、内部構造に関する観測的証拠も限られる。観測で内部構造の証拠になるのは重力である。あとは、さまざまな推論によって内部構造を決めてゆく。

それで、4回の講義によって、主に以下の項目を講義してゆく。

- (1) 木星型惑星を構成する物質
- (2) 静水圧平衡；外惑星内部の圧力や密度構造
- (3) 木星型惑星の状態方程式
- (4) 木星型惑星の半径-質量関係
- (5) 高圧物性の基礎；電子の圧力、理想電子ガス
- (6) 水素の金属化
- (7) 土星の特徴；水素とヘリウムの液相不混和
- (8) 重力からもたらされる内部構造の情報

第 1 章

惑星内部構造の基本

地球惑星内部構造を考える基本として、ここではまず惑星構成物質の概観と静水圧平衡について解説する。

1.1 元素の太陽系存在度と惑星を構成する物質

惑星がどのような物質から構成されているのかを知るには、まず惑星がどのような元素から構成されているかを知る必要がある。そのために太陽系がどのような元素から構成されているかを見ていく（配布表）。これは、太陽の大気の観測から知ることができる。原始惑星系円盤と太陽は同じ分子雲から出来たものなので、もともとの原料は同じものであるとよい。そこで、太陽大気元素組成と原始惑星系円盤の組成は同じであると考えてよい。これらの元素は、ビッグバン、恒星の中、超新星爆発、中性子星の合体によって作られたものである（配布図）。

1. ビッグバン；宇宙初期のビッグバンで H, He, Li くらいまでができた。太陽系の大部分を占める H と He の原子数の比がほぼ 12:1 というのは、ほぼこのときに決まっている。
2. 小～中質量星^{*1}の中の核融合反応；恒星の中の核融合反応で $H \rightarrow He$ ができる。年老いてきて赤色巨星の段階になってくると、 $He \rightarrow C, O$ という反応が起こるとともに、わずからながら Fe より重い元素が s プロセス（ゆっくりした中性子捕獲とベータ崩壊の繰り返し）で作られる。とりわけ ^{88}Sr 、 ^{138}Ba 、 ^{208}Pb は安定なので多く作られる。なお、s プロセスの出発点となる Fe は星ができたときにすでにあっただけである。こうした星が寿命を迎えると、ガスを周囲の宇宙空間に放出する。太陽系の C や N の半分くらいはこういう過程でできたものだと考えられている。一方、星の中心付近の C, O は白色矮星として取り残される。
3. 大質量恒星^{*2}の中の核融合反応と重力崩壊型超新星爆発；重い星の中心では、核融合でさらに O, Ne, Mg, Si, S, Ar, Ca などができてくる^{*3}。偶数の原子番号のものが多くは、

*1 太陽質量の 8 倍よりも軽い恒星

*2 太陽質量の 8 倍よりも重い恒星

*3 太陽質量の 8～10 倍だと Ne までで終わり。

He が安定なため、He がくっついたり飛び出したりする核反応が起こりやすいためである。最終的に Fe, Ni までできる。やがて、星は超新星爆発を起こして、星の中でできた元素、ならびに超新星爆発の時にできた元素をまきちらす。その結果、He, C, O から鉄族に至る元素が放出される。

4. Ia 型超新星 ; 白色矮星が連星をなしていて、相手の星が赤色巨星だったり、距離が近かったりすると、ガスが白色矮星に急速に降り積もる。その結果、白色矮星が高密度になると、核融合に火がついて爆発する。その結果、鉄族元素ができる。なお、Ia 型超新星は白色矮星の合体により起こる可能性もあり、決着はついていない。
5. 中性子星の合体 ; Fe より重い元素は、中性子が多い環境で原子核がきわめて短時間に次々に中性子を取り込んでゆくことで作られる (r プロセス)。そのためには中性子が大量にある環境ができないといけない。それが中性子星の合体ということになる。とくに、Se, Xe, Pt 周辺の元素が多く作られる。金や白金、銀などの貴金属元素の多くがこの過程で作られる。

太陽系の元素組成は、宇宙の年齢とか太陽系周辺で起きた上述のような諸現象の積算の結果として決まる。その結果が配布した表のようなものである。これは太陽大気や隕石の組成から決められる（そのへんは地球化学の授業で聞いているはず）。

太陽系ができるときの物質の振る舞いで大事なのは、まずそれが気体であるか固体であるかである。液体状態になるのは条件が限られて、惑星が形成されてからの話になる。太陽系の主な元素が主にどのような物質を作って、それが原始太陽系星雲の普通の条件で気体か固体かを考えてゆく。

太陽系の形成を考えるとときには、太陽系を作る物質をおおざっぱに「ガス」「氷」「岩石」の3つに分ける。その意味は以下の通り。

- 「ガス」 ; 希ガス元素 (He, Ne, Ar) は化合物をつくらないので気体になる。最も大量にある水素もほとんどが気体の H_2 になる。これらを「ガス」と呼ぶ。
- 「氷」 ; 残りの元素のうち酸化数が負になりやすい元素 (C, N, O, S) は大量にある水素 (H) と結びついて CH_4 , NH_3 , H_2O , H_2S などになった。これらの元素は、Pauling の電気陰性度 (配布図) が 2.5 よりも大きい。水素 (H) の電気陰性度は 2.2 で、それよりも電気陰性度の大きな元素である。これらは、太陽系の外側領域では固体、内側領域では気体になった*4。これらを「氷」と呼ぶ。これらの元素からは有機物や酸化物 (珪酸塩も含む)、硫化物なども作られるが、水素が大量にある原始太陽系環境ではとりあえず無視しよう。
- 「岩石」 ; 酸化数が正になりやすい元素 (Na, Mg, Al, Si, Ca, Fe, Ni) は基本的には酸素 (O) と結びついて固体となった。これらの元素は、Pauling の電気陰性度が 2.0 よりも小さい。なお、酸素の電気陰性度は 3.44 で、これらの元素の電気陰性度は酸素よりも小さい。地球型惑星を構成する元素として考えなければならぬのはこれらの元素で、そのなかでも

*4 ただし、S の化学は複雑で、 H_2S の固体は存在しづらく、外惑星領域では FeS の固体になる (Pasek et al., 2005)。酸素が少なくなると MgS も現れる。

量が多いのは、O, Mg, Si, Fe の4元素であり、基本的にはこれらの元素が作る物質を考えることが地球を構成する物質を考えることになる。量的に言えば、Na, Al, Ca, Ni についてはその次に考えればよい。

外惑星の構成要素は、これら3つの組み合わせで考える。おおざっぱな議論では、「ガス」「氷」「岩石」がどのような割合で含まれているかということになる。太陽系の元素存在度からいえば、もともとの量は「ガス」≫「氷」>「岩石」である。

だから、原始太陽形成雲をそのまま固めたような惑星を作るとガス惑星になる。基本的にはそれが木星型惑星（木星、土星）である。

1.2 惑星内部の圧力構造の基本～静水圧平衡

次に、惑星内部の圧力構造を決める基本的な式として静水圧平衡の式を説明する。これはすでにいろいろなところで出てきていると思うが、復習しよう。

天体を考え、その内部は静止しているとしよう。そうすると、そこに働く力は圧力と重力だけであり、それらが釣り合っていないなければならない。連続体の場合に、それらが釣り合うというのがどういうことかを考える。

鉛直上向きを z 軸に取る。図 1.1 のように惑星内部に仮想的に直方体を考えて、その底面積を S 、高さを h としよう。すると、この仮想的な直方体には横からも上からも下からも圧力がはたらく。横方向の力は、圧力 p が z にしか依らなければ、右からの圧力と左からの圧力が釣り合う。上下方向の力は、圧力 p が z に依ることを考えると、下面にはたらく上方向の力と上面にはたらく下方向の力と全体に働く下方向の重力で釣り合う。この釣り合いのことを**静水圧平衡**という（**静力学平衡**ともいう）。密度を ρ 、重力加速度を g とすれば、力の釣り合いの式は h が小さいとして

$$p(z+h)S + \rho(z)ghS = p(z)S \quad (1.1)$$

となる。これから

$$\frac{p(z+h) - p(z)}{h} = -\rho(z)g \quad (1.2)$$

となる。 h が十分に小さければ、微分で書くことが出来て

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (1.3)$$

となる。これが**静水圧平衡**の式である。

次に、球対称な天体内部の圧力分布を考える。外向きの動径座標を r とする。圧力 p や密度 ρ は r のみの関数であるとする。さらには、天体内部を考えるような状況では重力加速度 g も r に依存する。先の場合と同様の直方体を考えると、全く同じ道筋で

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \quad (1.4)$$

が導かれる。これが球対称の場合の**静水圧平衡**の式で、大気のような z 方向1次元の式と同じ形になる。

天体内部構造を考えると、これに重力の式と状態方程式を組み合わせる。重力の式は

$$g = \frac{GM(r)}{r^2}$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (1.5)$$

である。状態方程式は圧力と密度の関係で

$$p = p(\rho) \quad (1.6)$$

と書けるとしよう。すると未知関数が p 、 ρ 、 g 、 $M(r)$ で式が4本あるから解けるはずである。

熱力学の状態方程式は、 ρ, p, T の関係だから、本当は、温度構造も考えないといけないのだけど、たとえば惑星内部は対流のため断熱的だとすると、圧力と密度は一意的に結び付けられる。

1.3 外惑星の状態方程式～ポリトロープ

では、「ガス」「氷」「岩石」の状態方程式（断熱曲線）はどうなっているだろうか？後になってもう少し詳しい議論もしようと思うが、結果的には、配布図のような状態方程式（断熱曲線）になることが実験や理論計算の結果、わかっている。両対数グラフでだいたい直線なのだから、これはだいたい

$$p \propto \rho^{1+1/n} \quad (1.7)$$

と書いてよいだろう。このような状態方程式をポリトロープと呼ぶ*5。とくに外惑星「ガス」では $n \sim 1$ であることがわかっている。

あと比較的わかりやすい例は理想気体の場合で、等温なら $n = \infty$ 、断熱だとすると $1 + 1/n$ は比熱比になり、2原子分子なら $n = 5/2$ 、単原子分子なら $n = 3/2$ になる。要するに「硬く」

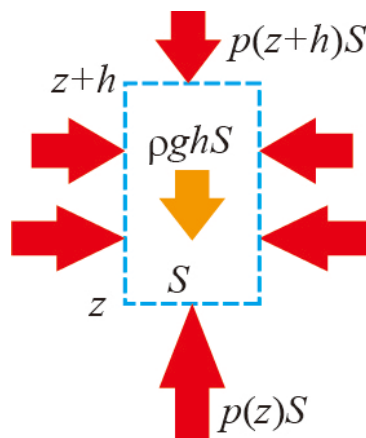


図 1.1 大気における静水圧平衡。仮想的な直方体（水色破線）にはたらく上下方向の力は、上面に働く圧力 $p(z+h)S$ （赤）、下面に働く圧力 $p(z)S$ （赤）、重力 ρghS （橙色）である。

*5 指数をこんな形にする理由は、あとで Lane-Emden 方程式を導いてみるとわかる。

なるほど n が小さくなる。等温に比べれば断熱だと圧縮で温度が上がる分硬くなる。さらに、外惑星内部は液体的なのでもっと「硬く」なる。

岩石の場合は、低圧では「硬い」が、圧力が上がるにつれてむしろ液体的になりだんだんと軟らかくなる。

1.4 惑星の半径-質量関係と圧力分布

ポリトロップの関係を用いると、惑星半径を R 、質量を M としておおざっぱに R と M の関係を求めることができる。静水圧平衡から中心圧力は

$$\rho g R \sim \frac{M}{R^3} \frac{GM}{R^2} R \sim \frac{GM^2}{R^4} \quad (1.8)$$

密度は

$$\rho \sim \frac{M}{R^3} \quad (1.9)$$

だから、ポリトロップの関係を用いると

$$\frac{M^2}{R^4} \propto \left[\frac{M}{R^3} \right]^{1+1/n} \quad (1.10)$$

のようなスケール則が成り立つと予想できる。これより

$$R \propto M^{\frac{n-1}{n-3}} \quad (1.11)$$

の関係があることがわかる。

わかること：

- (i) 物質が全く縮まなければ $n = 0$ で、 $R \propto M^{1/3}$ という当たり前の結果が得られる。
- (ii) 木星や土星のような $n = 1$ だと、半径 R は質量にほとんど依存しない。あとでより詳しく解析する。
- (iii) $n = 3/2$ のとき（断熱単原子分子理想気体や理想フェルミ気体；後述）のとき $R \propto M^{-1/3}$ で、質量が大きいほど半径が小さくなる。質量の小さい白色矮星はこれに相当する。
- (iv) $n = 5/2$ のとき（断熱二原子分子理想気体）のとき $R \propto M^{-3}$ で、やはり質量が大きいほど半径が小さくなる。
- (v) $n = 3$ だと質量は半径に依存しない。では、それでも質量が集まってきたらどうなるのか？実は、これが白色矮星のチャンドラセカール限界の存在と関係する。

一般の n の場合に静水圧平衡の式を解く方法を考えよう。解くべき式は

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2} \quad (1.12)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1.13)$$

$$p = K \rho^{1+1/n} \quad (1.14)$$

である。最初の2つの式から M を消去すると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (1.15)$$

となる。これにポリトロップの式を代入すると、

$$\frac{n+1}{n} \frac{K}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\rho^{(1/n)-1} r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (1.16)$$

となる。ここで、

$$\rho = \rho_c \theta^n \quad (1.17)$$

と置く。 ρ_c は中心の密度である。すると、

$$\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{(1/n)-1} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n \quad (1.18)$$

となる。さらに、

$$r = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{(1/n)-1} \right]^{1/2} \xi \quad (1.19)$$

と置くと、

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (1.20)$$

となる。これを係数 n の Lane-Emden 方程式という。境界条件は $\xi = 0$ で $\theta = 1, d\theta/d\xi = 0$ である。Lane-Emden 方程式は $n = 0, 1, 5$ の場合は解析的に解けることが知られている。

木星は $n = 1$ だったので、解析的に解けてしまう。 $n = 1$ の Lane-Emden 方程式を書くと、

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta \quad (1.21)$$

となる。 $\theta = \chi/\xi$ と書くと

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} = -\chi \quad (1.22)$$

となる。解は

$$\chi = \sin \xi \quad (1.23)$$

となるから、

$$\theta = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (1.24)$$

である。変数を元に戻すと

$$\rho = \rho_c \frac{\sin(kr)}{(kr)} \quad (1.25)$$

となる。ここで、 ρ_c は木星中心の密度で

$$k = \sqrt{\frac{2\pi G}{K}} \quad (1.26)$$

である。外側の境界条件から $kR = \pi$ とならないといけないので、

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{2G}} \quad (1.27)$$

となり、質量と無関係に半径が決まることがわかる。 $K = 2.1 \times 10^5 \text{ Pa}/(\text{kg}/\text{m}^3)^2$ であることがわかっている*6、 $R = 70,300 \text{ km}$ と求めることができる。実際の木星半径は $69,900 \text{ km}$ で、これに近い。

さらに、中心密度と平均密度の関係を求める。

$$\bar{\rho} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3} = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho_c \frac{\sin(kr)}{(kr)} r^2 dr \quad (1.28)$$

ここで、 $x = r/R$ と置くと

$$\bar{\rho} = 3 \int_0^1 \rho_c \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)} x^2 dx = \frac{3}{\pi^2} \rho_c \quad (1.29)$$

木星の平均密度は 1.33 g/cc だから (表 1.1)、中心密度は 4.38 g/cc であることがわかる。そして、中心圧力が 40 Mbar であることもわかる。この結果、木星内部の圧力と密度は図 1.2 のようであることがわかる。

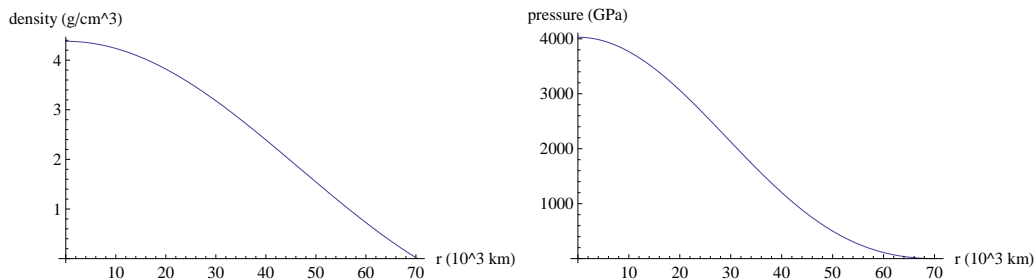


図 1.2 ポリトロープ $P = K\rho^2$ でモデリングした場合の木星内部の密度と圧力の分布。

とすると、次は土星はどういうことになるだろうか？土星の半径は木星半径よりも一回り小さい。単純に言えば K が小さければよいということになる。 K が小さいということは、圧力の割に密度が大きいということである。ということは、そこで「ガス」以外の「重い物質」が一様に混ざっていると考えるのが一つの仮説ということになるだろう (実際は氷・岩石コアがあると考えられてはいるが)。2種類の混合物の物質の密度は、おおむね「体積加法則」が成り立つとされている。「重い物質」の質量分率を y とすると、体積加法則は

$$\frac{1}{\rho(P)} = \frac{1-y}{\sqrt{P/K}} + \frac{y}{\rho_{\text{heavy}}} \quad (1.30)$$

と書ける。もしも、 $\rho_{\text{heavy}} \gg \rho y$ であれば

$$P = K_{\text{eff}} \rho^2 \quad (1.31)$$

*6 cgs では $K = 2.1 \times 10^{12}$

惑星	質量 (地球質量)	質量 (10^{24} kg)	a (km)	c (km)	扁平率 f
木星	317.83	1898	71492	66852	0.0649
土星	95.16	568.3	60268	54361	0.0980
天王星	14.54	86.83	25559	24973	0.0229
海王星	17.15	102.4	24764	24340	0.0171

惑星	体積 (10^{21} m ³)	平均密度 (10^3 kg/m ³)
木星	1431.3	1.33
土星	827.08	0.69
天王星	68.336	1.27
海王星	62.525	1.64

表 1.1 外惑星の質量、赤道半径 a 、極半径 $c = a(1 - f)$ 、扁平率 f 、体積、平均密度（理科年表平成 27 年版による）。

で、 $K_{\text{eff}} = K(1 - y)^2$ となる。つまり、状態方程式の形は同じで K が変わるだけと考えられる。土星の半径に合うように y を決めると $y \sim 0.2$ で、この「重い物質」の総量は地球質量の 15 倍程度となる。木星に同じだけ「重い物質」があったとしても、 $y \sim 0.05$ くらいにしかならないことに注意しよう。つまり、木星や土星の形成を考えると、最初に氷と岩石が集まって、それがガスを引き付けて誕生したという考え（水野不安定）があるが、そのとき最初にある氷と岩石の量が同じでも、結果的に引き付けられたガスの量の違いで木星と土星の違いができていると考えることができそうだ。

氷だけ、岩石だけでできた惑星の質量-半径関係は配布図のとおり。天王星、海王星は氷に近いので、「氷」が主成分なのだろうと考えることができる。が、それだけでもないようである。

第2章

高圧物性の基礎

先に、高圧水素の断熱状態方程式を $P = K\rho^{2*1}$ としたが、こういった状態方程式が決まる物理の基本を説明する。それと、それに関連して、超高圧下では多くの物質が金属になることを説明する。圧力に関してもうすこしちゃんという、超高圧の極限では電子の量子論的な効果による圧力が重要になることを説明する。それだと、 $P \propto \rho^{5/3}$ になるので、 $P \propto \rho^2$ が説明できるわけではないが、普通にイメージする固体 $P \propto \rho^{\text{大きな数}}$ と電子による圧力 $P \propto \rho^{5/3}$ の間のどこかになりそうということが分かればよい。前回配った断熱曲線の図でも、 $P \gtrsim 10^{13}$ Pa だと $P \propto \rho^{5/3}$ になっていそうなのがわかる。

2.1 不確定性原理と電子の圧力

量子力学は学んだことがない人が多いだろうが、超高圧物性を考えるには本質的である。その重要な帰結は、超高圧下では 0K でも電子が圧力を担うということである。このことを量子力学未履修者にも感じがつかめるように話してゆく。

量子力学の原理の一つに不確定性原理がある。これは、電子の運動量と位置の両方を正確に決めることができず

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar \quad (2.1)$$

のような形で書ける。ここで、 \hbar はプランク定数である。このこと（だけではないが）が原因となって、大きさが L の領域に閉じ込められた電子は最低でも

$$p \sim \frac{\hbar}{L} \quad (2.2)$$

程度の運動量を持ち、

$$E_k = \frac{p^2}{2m_e} \sim \frac{\hbar^2}{2m_e L^2} \quad (2.3)$$

程度の運動エネルギーを持つことが帰結される。ここで m_e は電子の質量である。大事なことは、電子は 0K でも動き回っていて、マクロには圧力を及ぼす。閉じ込められている領域が狭い

*1 前章では圧力を小文字の p で書いていたが、本章では小文字の p は電子の運動量に使い、圧力には大文字の P を使うことにする。

ほど、その2乗に反比例して運動エネルギーが高まる。2乗に反比例しているので、超高压ではクーロン力によるポテンシャルエネルギーよりも電子の運動エネルギーの方が大きくなり、電子の運動がものごとを支配するようになる。

この意味で、水素が超高压になる密度を求めてみよう。それはクーロン力によるポテンシャルエネルギーと電子の運動エネルギーが等しくなるときである。

$$\frac{\hbar^2}{2mL^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{L} \quad (2.4)$$

ここから

$$L \sim a_B \equiv 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.53 \text{ \AA} \quad (2.5)$$

となる。ここで、 a_B はボーア半径と呼ばれる。ボーア半径は、だいたい水素原子の大きさなのだが、原子はクーロン力で電子を閉じ込めているものなので、ここで水素原子の大きさが出てくるのは不思議ではない。

水素がボーア半径程度の間隔で並んでいるときの密度を求めてみよう。水素の場合、これより高密度なのが超高压の世界である。

$$\rho_{\text{HP}} = \frac{m_p}{a_B^3} = \frac{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^3} = 1.1 \times 10^4 \text{ kg/m}^3 = 11 \text{ g/cc} \quad (2.6)$$

となり、木星程度だとそこまで超高压ではないが（前回の結果だと中心密度が 4.38 g/cc）、近くってはきているので、超高压の極限を考えることは有用である*2。

2.2 超高压極限としての理想自由電子ガス

超高压の極限（といっても中性子星ほどではない）で物質がどうなるかを考えよう。この節でやることは木星に応用できるわけではないが、水素の金属化の原理や物質の圧力の起源を理解してもらうことが目標である。

高密度では、電子雲の重なりが大きくなるので、電子は系全体に広がって自由に動けるようになる。電子の海の中に原子核が浮いているような状態になる。原子核は重くてそれほど動かないので、電子の海が圧力などを決めるようになる。温度は 0K として温度の影響は考えないことにする。

圧力を上げると物質が金属になる理由は、電子が動ける範囲が狭いと前節の説明のように運動エネルギーが上がってしまう点にある。電子はできるだけ広い範囲を動けた方がエネルギーが下がる。高密度になってくると隣合う原子核が作るポテンシャルの重なりが増えてくる。すると、電子が広い範囲を動くための障壁が下がり、電子が動ける範囲が広がってエネルギーが下がる。これが高密度で物質が金属になる理由である。

ここまでの話だと、高密度では、電子は閉じ込められておらず、自由に動けるから、温度が低ければ、運動量が大きくなるのではないかと思える。ところが、そうではなくて、低温でも

*2 白色矮星になるとこの極限があてはまる。

大きな運動量を持った電子があってそれが圧力を発生するということを説明する。そこでキーになるのは、量子力学のもう一つの重要な原理があるパウリの排他律である。異なる電子は、同じ状態になれないという不思議な原理で、これのために小さな運動エネルギーの電子ばかりになるということができず、小さな運動エネルギーから大きな運動エネルギーの電子までが存在しなければならない。なので、自由電子になったとたんに運動エネルギーがゼロになるというわけでもない。その効果を計算してみよう。

ここまでは波動関数を使わずに済んだけれども、ここからある程度ちゃんとした計算をしようとすると、波動関数が必要になる。電子の状態は波動関数なるもので表されるということは認めてください。古典力学だと位置と運動量という6つの数字だけで電子の状態が表現できた。ところが量子力学になると $\psi(x, y, z)$ という関数で電子の状態を表現する。 $|\psi|^2$ が電子がそこにいる確率密度を表す。

まず、1つの電子が一辺が L の立方体の中にいるとする（体積 $V = L^3$ ）。この箱は十分に大きな箱で仮想的なものである。計算の結果としては、この箱の存在は関係がなくなる。電子には何の力も働いていないとする（自由粒子）。箱の端では周期境界条件を付ける*3。そうすると、波動関数は

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.7)$$

となる。ただし、

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x \quad (2.8)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L} n_y \quad (2.9)$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L} n_z \quad (2.10)$$

$$n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.11)$$

である。この意味は、電子が取りうる状態はたくさんあって、その状態は n_x, n_y, n_z の組で指定されるということである。運動量は

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = 2\pi\frac{\hbar}{L} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

となる。運動エネルギーは

$$E_k = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m_e L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (2.13)$$

である。箱が大きく (L が大きく) になると、運動量やエネルギーは低くなる。前述のように、これが金属結合の源である。しかし、これでは電子が圧力の源にならないように見える。しかし、電子が複数あると、前述のようにパウリの排他律のために話が変わる。

*3 変な気がするかもしれないが、伝統的テクニックである。たくさんの粒子を考えると、十分に大きな箱ならば結果に影響しない。

というわけで、電子が複数あるとする。電子どうしの相互作用は一切無視するものとする^{*4}。量子力学の場合は、相互作用が無くても、先のパウリの排他律によって、電子は他の電子の影響を受けてしまう（何の相互作用が無くても、電子は他の電子が何をしているか感じてしまう！）。1つの電子が1つの n_x, n_y, n_z の組にあると、別の電子は他の n_x, n_y, n_z の組を持たざるを得ない。正確に言えば、スピンの自由度があるので、1つの n_x, n_y, n_z の組を選べるのはスピン上向きと下向きの2つの電子である。電子がたくさんあると、 $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ の小さい方から順番に n_x, n_y, n_z の組を2つずつ電子が占めてゆく。電子が占める状態は \mathbf{k} 空間で描くとひとつの球になる。これをフェルミ球という。この球の半径をフェルミ波数 k_F と呼ぶ。フェルミ波数は以下のようにして求められる。電子の数を N とすると、

$$\frac{4}{3}\pi k_F^3 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \frac{N}{2} \quad (2.14)$$

となる。これから

$$k_F = \frac{2\pi}{L} \left(\frac{3N}{8\pi}\right)^{1/3} \quad (2.15)$$

となる。電子の数密度を $n_e = N/L^3 = N/V$ と書くと

$$k_F = (3\pi^2 n_e)^{1/3} \quad (2.16)$$

このフェルミ波数を持つ電子のエネルギーをフェルミエネルギーという。

$$\varepsilon_F = \frac{\mathbf{p}_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n_e)^{2/3}}{2m_e} \quad (2.17)$$

全エネルギー（今は理想自由電子ガスなので、運動エネルギーだけを勘定すればよい）はエネルギーの小さいものからフェルミエネルギーのものまで全部足し合わせて

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{(2\pi/L)^3} \int_0^{k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} 4\pi k^2 dk \\ &= \frac{V\hbar^2}{2\pi^2 m_e} \int_0^{k_F} k^4 dk \\ &= \frac{V\hbar^2}{10\pi^2 m_e} k_F^5 \\ &= \frac{3N\hbar^2}{10m_e} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3} \\ &= \frac{3}{5} N \varepsilon_F \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。状態方程式はこれを体積で微分することにより

$$P = -\frac{dE}{dV} = \frac{\hbar^2}{5m_e} (3\pi^2)^{2/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \quad (2.19)$$

^{*4} もちろん電子間にはクーロン力が働くのだが、後述のように電子1個あたりの運動エネルギー $\propto n_e^{2/3}$ 、クーロン力のエネルギー $\propto n_e^{1/3}$ のため超高压極限ではクーロン力を無視して構わない。

となる。

ここで実際に考えたいのは、水素の高圧状態であったことを思い出すと、電子が1個に対して陽子が1個あるから、その密度は

$$\rho = m_p \frac{N}{V} \quad (2.20)$$

である。そこで、状態方程式は

$$P = -\frac{dE}{dV} = \frac{\hbar^2}{5m_e} (3\pi^2)^{2/3} \left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3} \quad (2.21)$$

すなわち、 $P \propto \rho^{5/3}$ ということになる。先のポリトロープで言えば、単原子分子理想気体の断熱曲線と同じになる。ただし、自由電子ガスの方は0Kであり木星の中心よりもさらに高圧力状態の話である。他の元素なら、原子番号を Z 、質量数を A として

$$\rho = \frac{A}{Z} m_p \frac{N}{V} \quad (2.22)$$

と考えればよい。

これが高圧物性を考えるための基礎の基礎で、実際はそこまで超高压ではないので、ほかのいろいろな効果を考えないといけない。それはたいへんなので、本講義では省略する。

ここまでのところをまとめると、以下の通り。

- 原子間距離がボーア半径に満たないような超高压状態では、電子の海に原子核が浮いているような状態になる。これはもちろん金属状態である。
- そのような状態では圧力は電子の量子力学的効果が起源となっており、状態方程式は絶対零度で $P \propto \rho^{5/3}$ となる。このことは物質の種類によらない。

2.3 水素の金属化

前節のような取扱は現実の木星に応用するには高圧すぎる。実際の木星に適用できるような水素の高圧下の物性は、もっと複雑で、理論と実験の両面から研究されている。

実験は、衝撃圧縮という方法が主に用いられる。弾丸を撃ち込むものと、強力なレーザーをぶつけるものと2通りのタイプがある。いずれにしても、高温と高圧が発生するのはごく短時間で、試料のサイズはきわめて小さいので、物性の測定は難しい。それでもいろいろな工夫をして、状態方程式を決めるための情報が得られている。

理論モデリングは大きく分ければ2通りある。

- (1) 化学的描像モデル。プラズマをイオン、電子、分子、原子などの集まりとして表す。それぞれの化学種の自由エネルギーを計算して、それらを混合した自由エネルギーを求め、それを最小化することからそれぞれの化学種の組成を求める。このやりかたの欠点は異なる化学種の間での相互作用があまり正確でないことである。

(2) 第一原理シミュレーション。電子と陽子があるという条件だけで量子力学シミュレーションをする。密度汎関数分子動力学法（低温で有効）や経路積分モンテカルロ法（高温で有効）などがある。

どちらの方法のほうが信用できるかはまだ確定していない。徐々に第一原理シミュレーションの信頼度が上がってきているようである。

水素は、低圧では分子で、超高压では金属になるのだから、その間のどこかで絶縁体・金属転移があるはずである。木星内部の水素が金属化していることは内部磁場の存在からも明らかである。現在想定されている水素の相図を配布する。絶縁体・金属転移が起こると考えられているのは 0.5–5 Mbar あたりである。前に 1.4 節で説明したように、木星中心圧力は 40 Mbar くらいなので^{*5}、木星内部には金属水素があると考えられる。実際、木星内部で磁場が作られているということから、木星の水素の大部分は金属でなければおかしい。

相図全体で見ると、水素は低温で圧力を上げると、今まで説明してきた理由で金属になる。一方、低圧で温度を上げると、水素が解離して次に電離することでプラズマになる。これまた一種の金属である。木星や土星の条件は、その両方の効果があるが、前者の効果が大きくて金属になっていることが相図からわかる。

絶縁体・金属転移が一次の相転移（プラズマ相転移 Plasma Phase Transition PPT）なのか、連続的なのかは昔から議論があって、まだ決着が付いていない。臨界点のある PPT という結果が多くて、配布図もそのようになっているが、木星や土星の条件では連続的だという結果もある。どちらが正しいかによって木星内部の対流パターンに影響があるだろうし、それによって温度分布も変わるだろう。相転移で対流が妨げられれば内部が高温ということになる。もしそうなれば、内部が低密度になるので、それを補償するのに重元素が多いなどという話につながり、形成論にも影響する。

衝撃実験で初めて高温の金属水素を作ったのは Weir et al. (1996)^{*6} である。

2.4 水素とヘリウムの液相不混和～土星の特徴

水素は木星内部の高压で金属になる。ヘリウムも超高压では金属になるにしても、木星圧力程度では金属にならない。金属と非金属では結合様式が全く異なるので、水と油のように混ざらない2つの流体になるであろう。といっても温度が高ければやっぱり混ざるだろうから、混ざる領域と混ざらない領域の境目があるだろう。それを計算したのが配布図である。図には2つの境界線が描かれているが、このうち赤く書いてあるほうが信頼できる。Lorenzen (2009)^{*7}は計算方法に問題があるので信頼できない。

^{*5} ただしコアがあれば、3.3 節の図にあるようにもっと高くなる。その場合 40 Mbar は水素の層の底の圧力と解すべきである。

^{*6} Weir et al. (1996) Metallization of fluid molecular hydrogen at 150 GPa (1.4 Mbar), *Phys. Rev. Lett.*, 76, 1860.

^{*7} Lorenzen et al. (2009) Demixing of hydrogen and helium at megabar pressures, *Phys. Rev. Lett.*, 102, 115701, doi:10.1103/PhysRevLett.102.115701

青線で書かれているのが、惑星内部の温度分布である。木星や土星は最初は高温だったので水素とヘリウムは混ざり合っている。それが惑星の進化とともに温度が下がって行って、やがて不混和が起こる。木星のほうは不混和が起きるかどうかが結構微妙なところである。それに対して土星は不混和が実際に起きていると考えられている。

土星で起こっている不混和には重要な意味があると考えられている。それを解き明かした Stevenson (1980) という論文は地球惑星科学の論文の中で私が最も好きなものなので、紹介する (配布図; 土星内部)。土星には木星と比べて次のような大きな特徴がある。

- (1) 大気中の He が少ない。大気中の He の量の推定値は歴史的には紆余曲折があってややこしいが、最新の値 (Koskinen and Guerlet, 2018) は、体積比で $11 \pm 2 \%$ 、質量分率 $Y = 0.16\text{--}0.22$ 。これは原始太陽系星雲雲の値 $Y = 0.275 \pm 0.01$ や木星の値 $Y = 0.23$ に比べて有意に小さい。
- (2) 土星が出している熱 (赤外線) は、単純な冷却から期待されるものよりも大きい。
- (3) 土星磁場は軸対称であり、大きさもスケールリング則から期待されるものより小さい。軸対称な磁場を作ることは出来ないという定理 (カウリングの定理) もあるのにこれはどうしたことか？

これらのことが水素とヘリウムの不混和によって説明できる。

- (1) 不混和が起こると、重たい He に富んだ液が沈む。そのため大気中の He が減ってくる。その代わり内部の He の割合は増えていると予測される。
- (2) 重たい He が沈むということは重力エネルギーが解放されるということで、そこで発生した熱が外に放出される。
- (3) 相分離が起きている領域は安定成層になっていると予想される。そこでは、おそらく差動回転が起こるだろう (つまりは東西風が吹くということ)。すると、内部磁場の非軸対称成分が遮蔽されて、外では軸対称磁場に見える。

2.5 参考文献

- [総説] Burkhard Militzer, François Soubiran, Sean M. Wahl, William Hubbard (2016) Understanding Jupiter's interior, *Journal of Geophysical Research: Planets*, **121**, 1552–1572
doi:10.1002/2016JE005080
- [論文] D.J. Stevenson (1980) Saturn's luminosity and magnetism, *Science*, **208**, 746–748

第3章

重力と内部構造

地球の内部構造を決めるための最も重要な観測は地震波であることは知っているだろう。ところが、他の惑星ではそのような観測はまだできていないから（将来はできるかもしれないが）、探査機によって観測できるような量を手がかりにしないとイケない。その最も重要なものが重力である。今日は時間がないので、とくに重力から慣性モーメントを求める論理のあらすじだけを話す。

3.1 重力ポテンシャルと慣性モーメント

重力については金嶋先生が詳しく講義をするはずなので、ここでは必要最低限のことだけを述べる。

万有引力のポテンシャル V は、惑星の外ではラプラス方程式

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.1)$$

を満たす。この方程式の一般解は金嶋先生の講義で出てくるはずだが、そのうちで最も基本的な2つの項だけを書くと

$$V(r, \varphi) = \frac{GM}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{3 \sin^2 \varphi - 1}{2} \right] \quad (3.2)$$

となっている*1。ここで、 G は万有引力定数、 M は惑星質量、 r は動径座標、 φ は緯度である。 a は赤道半径である。最初の項 GM/r は地球の全質量が中心に集中している場合のポテンシャルで、球対称である。定数 $J_2 (> 0)$ を含んだ項が、等ポテンシャル面が赤道方向に膨らんだ楕円体であることを表現している。

これに対して、重力ポテンシャル W は、万有引力のポテンシャル V に自転の遠心力のポテンシャル Φ を足したものである。

$$W = V + \Phi \quad (3.3)$$

*1 ただし、符号は普通のポテンシャルと逆向きに定義している。

惑星	$3J_2/m + 1$	式 (3.6)
木星	1.494	0.258
土星	1.316	0.220
天王星	1.357	0.230
海王星	1.407	0.241

表 3.1 J_2 の数値と (3.6) 式を用いて予測した I_3/MR^2 の値。

と書いて

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \varphi = \frac{GM}{r} \frac{1}{2} m \left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos^2 \varphi \quad (3.4)$$

である。ここで、

$$m = \frac{\omega^2 a^3}{GM} \quad (3.5)$$

である。これは、遠心力と万有引力の比で、自転速度 ω がわかっているならば計算できる量である。自転速度は、磁場の模様の動きから推定する。

これから示すことは、 J_2 と m から慣性モーメントが求められるということである。質量が中心付近に集中していれば慣性モーメントが小さくなり、そうでなければ大きくなるので、慣性モーメントは質量分布に対する制約条件になる。

J_2 から慣性モーメントが求める理論は極めて面倒なので、正確な理論にはあまり立ち入らず、結果のみを述べる。 J_2/m が大きいと慣性モーメントが大きいということになる。近似式として Radau-Darwin の式が知られている。

$$\frac{I_3}{MR^2} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3J_2/m + 1} - 1} \right] \quad (3.6)$$

Radau-Darwin の式を用いて計算した慣性モーメントを表 3.1 とした。詳しい内部構造計算によっても、土星の慣性モーメントは 0.2197 くらいが正しいと考えられている (Saturn from Cassini-Huygens, p.76)。

3.2 ガス惑星の慣性モーメント

以上説明してきたようにして慣性モーメント I_3 が求められたとして、ガス惑星の場合にその値がどうなるかを考えてみる。ガス惑星の場合は

$$p = K\rho^2 \quad (3.7)$$

であって、その場合

$$\rho = \rho_c \frac{\sin(kr)}{kr} \quad (3.8)$$

となるのであった。すると、慣性モーメント I_3 は

$$\begin{aligned} \frac{I_3}{MR^2} &= \frac{\int_0^R \rho(r)r^4 dr \int_{-1}^1 \sin^2 \theta d(\cos \theta)}{R^2 \int_0^R \rho(r)r^2 dr \int_{-1}^1 d(\cos \theta)} \\ &= \frac{(4/3) \int_0^R \frac{\sin kr}{kr} r^4 dr}{2R^2 \int_0^R \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここで、 $x = r/R$ と置くと、 $kR = \pi$ ゆえ

$$\begin{aligned} \frac{I_3}{MR^2} &= \frac{2 \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi x} x^4 dx}{3 \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi x} x^2 dx} \\ &= \frac{2 \int_0^1 x^3 \sin(\pi x) dx}{3 \int_0^1 x \sin(\pi x) dx} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{6}{\pi^2} \right) = 0.26 \end{aligned} \quad (3.10)$$

が得られる。木星の I_3 はこれとほぼ同じだから、基本的にはガス惑星である。土星はそれより少し小さく、コア（氷+岩石）がありそうだということになる。

3.3 外惑星の内部構造

実際は、状態方程式と重力とを考慮して、それと合うように内部構造を決める。その結果、たとえば木星の場合は、配布図のような構造になっていると考えられている。この配布図では、木星でも土星と同様に水素とヘリウムの不混和が起こっていることになっているが、それは確立しているわけではない。

3.4 参考文献

- [総説] Burkhard Militzer, François Soubiran, Sean M. Wahl, William Hubbard (2016) Understanding Jupiter's interior, *Journal of Geophysical Research: Planets*, **121**, 1552–1572
doi:10.1002/2016JE005080