第７回　粘性流体、ナビエ・ストークス方程式
６月７日

本日の内容

Part 3　**粘性流体の基礎と簡単な流れ**

ここでは内部摩擦のある流れの基礎方程式を導き、簡単な流れの解き方の例をいくつか示す

3-1.　**粘性応力**

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v} \right) + \zeta \delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

3-2.　Navier-Stokes **方程式**

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v} \right) + \zeta \delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v} \right] + \rho g_i$$

3-3.　**非圧縮性流体の** Navier-Stokes **方程式**

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{v} &= 0 \\ \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} &= -\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \triangle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} \end{aligned}$$

3-4.　**境界条件**

本日のレポート問題

締切： 6 **月** 11 **日（金）昼**

[**問題** 3.1]　**２次元の速度勾配テンソルで回転に対して不変なものは、等方膨張（収縮）と回転に限ることを以下の手順で示せ（問題は裏面まで続く）**

(i) **座標系を角度** θ **だけ反時計回りに回転させると、任意のベクトル** u **の成分は**

$$u'_i = \sum_j R_{ij} u_j$$

のように変換されることを示せ。ただし、行列 R **は**

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。

(ii) (i) **を用いて、座標系の回転に対し、座標による偏微分は**

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j R_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

のように変換されることを、偏微分の変数変換の公式を用いて示せ。

(iii) (i)(ii) **を用いて、任意の２次元速度勾配テンソルは、座標系の回転に対し、**

$$D'_{ij} = \sum_{kl} R_{ik} R_{jl} D_{kl}$$

のように変換されることを示せ。ただし、速度勾配テンソルの定義は

$$D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

である。

（補足）以前、問題 1.5 でやったように、速度勾配テンソルに限らず、任意の２階テンソルは回転に際し上のように変換される。ここでは、速度勾配テンソルに限って直接的に変換則を示したことになる。

(iv) 任意の回転に対し、形が変わらない速度勾配テンソルは

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

という形をしていることを示せ。ここで、λ, μ は任意の数である。

（ヒント）任意のテンソルの形が回転に際して不変になることを示す方法は複数あり得るが、次のやり方が簡単である。まず、少数の簡単な角度の回転に対し不変である条件を求め（必要条件）、それで求められた形のテンソルが実際に任意の回転に際し不変であることを示せば良い（十分条件）。

(v) (iv) の形の速度勾配テンソルで、λ で表される部分は等方膨張、μ で表される部分は回転を示していることを説明せよ。