第12回　エントロピーの周辺
7月03日

本日の内容

4-6.　エントロピーの式と熱力学第二法則

4-7.　エントロピーと温度圧力

$$ds = \frac{c_p}{T}dT - \frac{\alpha}{\rho}dp \tag{1}$$

4-8.　断熱温度勾配

$$\frac{dT}{dz} = -\Delta_{ad}\rho g = -\frac{\alpha g T}{c_p} \tag{2}$$

4-9.　ポテンシャル温度（省略）

4-10.　熱伝導方程式の導出

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = -\,\mathrm{div}\,(k\ \mathrm{grad}\,T) + \underline{\underline{\sigma'}}:\ \mathrm{grad}\,\underline{v} \tag{3}$$

流体力学の方程式のまとめ（一成分系、ニュートン流体）

質量保存則（連続の式）	$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\ \mathrm{div}\,\underline{v}$
運動量保存則（Navier-Stokes 方程式）	$\rho\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\ \mathrm{grad}\,p +\ \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma'}} + \rho\underline{g}$
エントロピーの式	$\rho T\frac{Ds}{Dt} = -\ \mathrm{div}\,\underline{q} + \underline{\underline{\sigma'}}:\ \mathrm{grad}\,\underline{v}$
状態方程式	$\rho = \rho(p,T), \quad s = s(p,T)$
構成方程式（Newton 粘性）	$\sigma'_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\ \mathrm{div}\,\underline{v}\right) + \zeta\delta_{ij}\ \mathrm{div}\,\underline{v}$
構成方程式（Fourier の法則）	$\underline{q} = -k\ \mathrm{grad}\,T$

本日のレポート問題

締切：7月7日（金）

[問題 4.2]　マントルの断熱温度曲線

マントル内部の温度が断熱温度曲線に沿っているとすると、圧力と温度の関係は

$$\frac{dT}{dp} = \Delta_{ad} = \frac{\alpha T}{\rho c_p} \tag{4}$$

で表される。以下では、この関係がマントル内で成立していると仮定せよ。

(i) α, ρ, c_p が定数であるとき、上の関係を積分して温度 T を圧力 p の関数として表せ。

(ii) マントル内の圧力分布は、ほぼ

$$p = \rho g D \tag{5}$$

で表される。ここで D は深さで、$g = 10$ m s^{-2}（重力加速度：ほぼ一定としてかまわない）、$\rho = 4.5\times10^3$ kg m^{-3}（密度：ここでは一定と仮定する）である。いま、地表で（正確には、アセノスフェアの最上部というべきだが、その違いは無視する）$T = 1500$ K とするとき、コアマントル境界での圧力と温度を求めよ。ただし、コアマントル境界の深さは 2900 km、$\alpha = 10^{-5}$ K^{-1}、$c_p = 10^3$ J kg^{-1} K^{-1} とせよ。