

第7回 粘性流体、ナビエ・ストークス方程式

5月29日

本日の内容

Part 3 粘性流体の基礎と簡単な流れ

ここでは内部摩擦のある流れの基礎方程式を導き、簡単な流れの解き方の例をいくつか示す

3-1. 粘性応力

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v}$$

3-2. Navier-Stokes 方程式

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] + \rho g_i$$

3-3. 非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \end{aligned}$$

3-4. 境界条件

case1) 考えている流体が容器や壁などの物体に接しているとき、物体が静止していれば

$$\underline{v} = \underline{0}$$

物体が速度 \underline{v}_s で動いていれば

$$\underline{v} = \underline{v}_s$$

case2) 混じり合わない二つの流体が接している場合は
2つの流体の速度が等しく

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2$$

応力が連続

$$(\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2) \cdot \underline{n} = 0$$

case3) 自由表面では

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = -p_0 \underline{n}$$

3-5. Reynolds 数

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

本日のレポート問題

締切：6月2日(金) 昼(午後1時)

[問題 2.2] 次の 2 次元非圧縮流 (密度は ρ_0 で一定とする) について以下の問いに答えよ。

$$v_x = -Ax \tag{1}$$

$$v_y = Ay \tag{2}$$

ただし、 A は正の定数である。

(i) この流れが非発散 $\text{div} \mathbf{v} = 0$ であることを確かめよ。

(ii) この流れの歪み速度テンソルと回転テンソルとを計算せよ。

(iii) この流れの流線関数を求め、その等値線 (すなわち流線) の概形を描け。流線上で流れの方向も矢印で示しておくこと。

(iv) この流れの加速度 $D\mathbf{v}/Dt$ を計算せよ。

(v) この流れが運動方程式を満たすように圧力分布を求めよ。ただし、応力は圧力のみとし (理想流体)、重力はないものとせよ。