

# 第8回 粘性流体、ナビエ・ストークス方程式

6月05日

## 本日の内容

### 3-2. Navier-Stokes 方程式

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v} \right] + \rho g_i$$

### 3-3. 非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \end{aligned}$$

### 3-4. 境界条件

case1) 考えている流体が容器や壁などの物体に接しているとき、物体が静止していれば

$$\underline{v} = \underline{0}$$

物体が速度  $\underline{v}_s$  で動いていれば

$$\underline{v} = \underline{v}_s$$

case2) 混じり合わない二つの流体が接している場合は  
2つの流体の速度が等しく

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2$$

応力が連続

$$(\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2) \cdot \underline{n} = 0$$

case3) 自由表面では

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = -p_0 \underline{n}$$

### 3-5. Reynolds 数

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

### 3-6. 一方向の定常流

出発点：密度一定の Navier-Stokes 方程式

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{grad} p^* + \mu \Delta \mathbf{v}$$

ただし、 $p^* = p + \rho\Phi$  で  $\Phi$  は重力ポテンシャルである。

最終的には、

$$\begin{aligned} u &= u(y, z) \\ p^* &= p^*(x) \end{aligned}$$

として、

$$\begin{aligned} \frac{dp^*}{dx} &= -\beta \\ \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u &= -\beta \end{aligned}$$

( $\beta$  は定数) を解けば良いことが分かる。

## 本日のレポート問題

締切：6月9日（金）昼（午後1時）

[問題 3.1] 2次元の速度勾配テンソルで回転に対して不変なものは、等方膨張（収縮）と回転に限ることを以下の手順で示せ

(i) 座標系を角度  $\theta$  だけ反時計回りに回転させると、任意のベクトル  $u$  の成分は

$$u'_i = \sum_j R_{ij} u_j$$

のように変換されることを示せ。ただし、行列  $R$  は

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である。

(ii) (i) を用いて、座標系の回転に対し、座標による偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j R_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

のように変換されることを、偏微分の変数変換の公式を用いて示せ。

(iii) (i)(ii) を用いて、任意の2次元速度勾配テンソルは、座標系の回転に対し、

$$D'_{ij} = \sum_{kl} R_{ik} R_{jl} D_{kl}$$

のように変換されることを示せ。ただし、速度勾配テンソルの定義は

$$D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

である。

（補足）速度勾配テンソルに限らず、任意の2階テンソルは回転に際し上のように変換される。ここでは、速度勾配テンソルに限って直接的に変換則を示したことになる。

(iv) 任意の回転に対し、形が変わらない速度勾配テンソルは

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

という形をしていることを示せ。ここで、 $\lambda, \mu$  は任意の数である。

（注）「形が変わらない」の意味は、上の行列で表されたテンソルの形が変わらないということである。図形の形が変わらないという意味ではない。

（ヒント）任意のテンソルの形が回転に際して不変になることを示す方法は複数あり得るが、次のやり方が簡単である。まず、少数の簡単な角度の回転に対し不変である条件を求め（必要条件）、それで求められた形のテンソルが実際に任意の回転に際し不変であることを示せば良い（十分条件）。

(v) (iv) の形の速度勾配テンソルで、 $\lambda$  で表される部分は等方膨張、 $\mu$  で表される部分は回転を示していることを説明せよ。