第 10 回　一方向の定常流
7 月 2 日

本日の内容

3-6.　一方向の定常流

出発点：密度一定の Navier-Stokes 方程式

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\mathrm{grad}p^* + \mu\triangle\boldsymbol{v}$$

ただし、$p^* = p + \rho\Phi$ で Φ は重力ポテンシャルである。

最終的には、

$$\begin{aligned} u &= u(y,z) \\ p^* &= p^*(x) \end{aligned}$$

として、

$$\begin{aligned} \frac{dp^*}{dx} &= -\beta \\ \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u &= -\beta \end{aligned}$$

(β は定数) を解けば良いことが分かる。

3-6-1.　2 枚の平行な板の間の流れ ~ Couette 流と Poiseuille 流

速度

$$u = \frac{\beta}{2\mu}y(h-y) + \frac{U}{h}y$$

全流量

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{\beta h^3}{12\mu} + \frac{Uh}{2}$$

3-6-2.　円管内の Poiseuille 流

基礎方程式

$$\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\beta$$

全流量

$$Q = \int_0^a u\cdot 2\pi r dr = \frac{\pi a^4\beta}{8\mu} = -\frac{dp^*}{dx}\frac{\pi a^4}{8\mu}$$

3-7.　球を過ぎる流れ

3-7-1.　問題設定：球を過ぎる流れ

3-7-2.　Stokes の流れ関数 (Stokes's stream function)

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

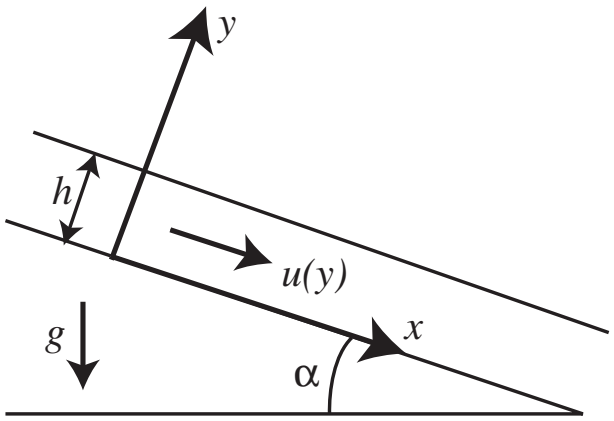
本日のレポート問題

締切： 7 月 6 日 (金) 午後 1 時

[問題 3.3] 斜面を流れ下る粘性流体の運動とそのマグマへの応用

(i) 斜面を流れ下る定常な粘性流の流速分布を求めよ。斜面に沿って x 軸、それに垂直に y 軸を取って考えよ。そして、流速 $u = u(y)$ を求めよ。ただし、流体の厚さは h で一定、斜面の角度は α で一定、流体表面の圧力は大気圧 $p_{\rm atm}$ で一定、重力加速度は g で一定であるものとせよ。また、流体表面は自由表面と考えて、接線応力 $\sigma'_{xy} = 0$ であるとせよ。

[ヒント : まずはじめに、$p^* = p_{\rm atm} - \rho g x \sin\alpha + {\rm const.}$ であることを導け。ただし、p^* を使わず、p だけを使うやり方もあり、そちらの方がわかりやすいと思う人もいるかもしれない。]



(ii) 実際 Etna 火山で、斜面を流れ下る定常な粘性流の関係を利用してマグマの粘性が推定されたことがある (Walker, G.P.L. 1967, *Nature*, **213**, 484-485)。それによると、1966 年 6 月の噴火のとき、ある溶岩のユニットでは、速さが 12.5cm/sec、溶岩流の厚さが 60cm、斜面の角度が 15 度であった。この溶岩流の粘性を推定せよ。溶岩の密度は 2 g/cm^3 とする。

[ヒント : (i) の答えから、表面での流速が

$$u(y=h) = \frac{\rho g h^2 \sin\alpha}{2\mu}$$

となることを用いよ。]