第 8 回　粘性応力, Navier-Stokes 方程式

6 月 18 日

本日の内容

2-6.　**渦度（と理想流体の渦度方程式、渦度保存則）**

$$\underline{\omega} = \mathrm{rot}\underline{v}$$

2-7.　**補足：流線、２次元非圧縮流れにおける流線関数**

2-8.　**流線、流跡線、流脈線**

流れを線で表現する方法

Part 3　**粘性流体の基礎と簡単な流れ**

ここでは内部摩擦のある流れの基礎方程式を導き、簡単な流れの解き方の例をいくつか示す

3-1.　**粘性応力**

$$\sigma'_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) + \zeta\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

3-2.　Navier-Stokes **方程式**

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) + \zeta\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right] + \rho g_i$$

3-3.　**非圧縮性流体の** Navier-Stokes **方程式**

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{v} &= 0 \\ \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} &= -\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\triangle\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} \end{aligned}$$

3-4.　**境界条件**

case1) **考えている流体が容器や壁などの物体に接しているとき、物体が静止していれば**

$$\underline{v} = \underline{0}$$

物体が速度 $\underline{v_s}$ **で動いていれば**

$$\underline{v} = \underline{v_s}$$

case2) **混じり合わない二つの流体が接している場合は**
２つの流体の速度が等しく

$$\underline{v_1} = \underline{v_2}$$

応力が連続

$$(\underline{\underline{\sigma_1}} - \underline{\underline{\sigma_2}}) \cdot \underline{n} = 0$$

case3) **自由表面では**

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p_0\underline{n}$$

3-5.　Reynolds **数**

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

本日のレポート問題

締切：6 月 22 日（金） 午後１時

[問題 3.1] **２次元の速度勾配テンソルで回転に対して不変なものは、等方膨張（収縮）と回転に限ることを以下の手順で示せ**

(i) **座標系を角度** θ **だけ反時計回りに回転させると、任意のベクトル** u **の成分は**

$$u'_i = \sum_j R_{ij} u_j$$

のように変換されることを示せ。ただし、行列 R **は**

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。

(ii) (i) **を用いて、座標系の回転に対し、座標による偏微分は**

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j R_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

のように変換されることを、偏微分の変数変換の公式を用いて示せ。

（ヒント）偏微分の変数変換の公式は、熱力学の時に配った偏微分公式を参考にすること。２つの独立変数を (x, y) **から** (u, v) **のように変えたときの偏微分の関係はそこでやっている。**

(iii) (i)(ii) **を用いて、任意の２次元速度勾配テンソルは、座標系の回転に対し、**

$$D'_{ij} = \sum_{kl} R_{ik} R_{jl} D_{kl}$$

のように変換されることを示せ。ただし、速度勾配テンソルの定義は

$$D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

である。

（補足）速度勾配テンソルに限らず、任意の２階テンソルは回転に際し上のように変換される。ここでは、速度勾配テンソルに限って直接的に変換則を示したことになる。

(iv) **任意の回転に対し、形が変わらない速度勾配テンソルは**

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

という形をしていることを示せ。ここで、λ, μ **は任意の数である。**

（注）「形が変わらない」の意味は、上の行列で表されたテンソルの形が変わらないということである。図形の形が変わらないという意味ではない。

（ヒント）任意のテンソルの形が回転に際して不変になることを示す方法は複数あり得るが、次のやり方が簡単である。まず、少数の簡単な角度の回転に対し不変である条件を求め（必要条件）、それで求められた形のテンソルが実際に任意の回転に際し不変であることを示せば良い（十分条件）。

(v) (iv) **の形の速度勾配テンソルで、** λ **で表される部分は等方膨張、**μ **で表される部分は回転を示していることを説明せよ。**

（ヒント）いろいろな説明の仕方がありうるが、以下のような素朴なやり方でも良い。単純に等方的な膨張、回転を示す流れの例をを一つずつ考えて、その流れを図示し、その流れの速度勾配テンソルが (iv) **で求めた形をしていることを示す。**