第９回　Navier-Stokes 方程式, Reynolds 数
6 月 25 日

本日の内容

3-2.　Navier-Stokes 方程式

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) + \zeta\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right] + \rho g_i$$

3-3.　非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{v} &= 0\\ \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} &= -\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\triangle\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}\end{aligned}$$

3-4.　境界条件

case1) 考えている流体が容器や壁などの物体に接しているとき、物体が静止していれば

$$\underline{v} = \underline{0}$$

物体が速度 $\underline{v_s}$ で動いていれば

$$\underline{v} = \underline{v_s}$$

case2) 混じり合わない二つの流体が接している場合は
2 つの流体の速度が等しく

$$\underline{v_1} = \underline{v_2}$$

応力が連続

$$(\underline{\underline{\sigma_1}} - \underline{\underline{\sigma_2}}) \cdot \underline{n} = 0$$

case3) 自由表面では

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p_0\underline{n}$$

3-5.　Reynolds 数

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

3-6.　一方向の定常流

出発点：密度一定の Navier-Stokes 方程式

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\mathrm{grad}p^* + \mu\triangle\boldsymbol{v}$$

ただし、$p^* = p + \rho\Phi$ で Φ は重力ポテンシャルである。

最終的には、

$$\begin{aligned}u &= u(y,z)\\ p^* &= p^*(x)\end{aligned}$$

として、

$$\begin{aligned}\frac{dp^*}{dx} &= -\beta\\ \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u &= -\beta\end{aligned}$$

(β は定数) を解けば良いことが分かる。

本日のレポート問題

締切： 6 月 29 日 (金) 昼 (午後 1 時)

[問題 3.2] いろいろな流れの粘性応力とレイノルズ数を概算してみよう。

この問題では、物理量の大きさの桁を把握することが目標である。つまり、いわば有効数字 0 桁の問題である。答えもそのつもりで、せいぜい有効数字 1 桁程度にとどめておくこと。

粘性応力は $\mu U/L$ で概算できる。ここで、μ は粘性率、U は流れの代表的な速さ、L は流れの代表的な長さスケールである。レイノルズ数は UL/ν である。ここで、ν は動粘性率である。

以下の問題では、必要な数字は全部は与えられていない。与えられていない数字は自分で調べ、出典も明記すること。

(i) 温帯低気圧に関する粘性応力とレイノルズ数。ただし、大気現象に関しては、本当はいろいろなスケールが水平方向と鉛直方向で大きく異なるのだが、ここでは U, L は水平方向のスケールを考えること。また、粘性には空気の (分子) 粘性率を使って良い。(高度なことを知っている人のための注 : 渦拡散は使わない)

(ii) 水道の蛇口から流れる水流の粘性応力とレイノルズ数。

(iii) マントル対流の粘性応力とレイノルズ数。ただし、マントルの粘性は 10^{21} Pa s であるとし、速さはプレート運動と同程度、長さスケールはマントルの厚さ程度であるとせよ。