

## 第8回 Navier-Stokes 方程式, Reynolds 数

6月16日

### 本日の内容

#### 3-3. 非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}\end{aligned}$$

#### 3-4. 境界条件

case1) 考えている流体が容器や壁などの物体に接しているとき、物体が静止していれば

$$\underline{v} = \underline{0}$$

物体が速度  $\underline{v}_s$  で動いていれば

$$\underline{v} = \underline{v}_s$$

case2) 混じり合わない二つの流体が接している場合は  
2つの流体の速度が等しく

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2$$

応力が連続

$$(\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2) \cdot \underline{n} = 0$$

case3) 自由表面では

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = -p_0 \underline{n}$$

#### 3-5. Reynolds 数

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

#### 3-6. 一方向の定常流

出発点：密度一定の Navier-Stokes 方程式

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p^* + \mu \Delta \mathbf{v}$$

ただし、 $p^* = p + \rho\Phi$  で  $\Phi$  は重力ポテンシャルである。

最終的には、

$$\begin{aligned}u &= u(y, z) \\ p^* &= p^*(x)\end{aligned}$$

として、

$$\begin{aligned}\frac{dp^*}{dx} &= -\beta \\ \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u &= -\beta\end{aligned}$$

( $\beta$  は定数) を解けば良いことが分かる。

3-6-1. 2枚の平行な板の間の流れ ~ Couette 流と Poiseuille 流  
速度

$$u = \frac{\beta}{2\mu}y(h-y) + \frac{U}{h}y$$

全流量

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{\beta h^3}{12\mu} + \frac{Uh}{2}$$

3-6-2. 円管内の Poiseuille 流  
基礎方程式

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\beta$$

全流量

$$Q = \int_0^a u \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi a^4 \beta}{8\mu} = -\frac{dp^*}{dx} \frac{\pi a^4}{8\mu}$$

## 本日のレポート問題

締切：6月20日(金) 昼(午後1時)

[問題 3.2] いろいろな流れの粘性応力とレイノルズ数を概算してみよう。

この問題では、物理量の大きさの桁を把握することが目標である。つまり、いわば有効数字0桁の問題である。答えもそのつもりで、せいぜい有効数字1桁程度にとどめておくこと。

粘性応力は  $\mu U/L$  で概算できる。ここで、 $\mu$  は粘性率、 $U$  は流れの代表的な速さ、 $L$  は流れの代表的な長さスケールである。レイノルズ数は  $UL/\nu$  である。ここで、 $\nu$  は動粘性率である。

以下の問題では、必要な数字は全部は与えられていない。与えられていない数字は自分で見積もるとか調べるとかせよ。その際、レポートには数字の根拠あるいは出典を明記すること。

(i) 温帯低気圧に関する粘性応力とレイノルズ数。ただし、大気現象に関しては、本当はいろいろなスケールが水平方向と鉛直方向で大きく異なるのだが、ここでは  $U, L$  は水平方向のスケールを考慮すること。また、粘性には空気の(分子)粘性率を使って良い。(高度なことを知っている人のための注：渦拡散は使わない)

(ii) 水道の蛇口から流れる水流の粘性応力とレイノルズ数。

(iii) マントル対流の粘性応力とレイノルズ数。ただし、マントルの粘性は  $10^{21}$  Pa s であるとし、速さはプレート運動と同程度、長さスケールはマントルの厚さ程度であるとせよ。