

剛性率の測定

1 はじめに

弾性体力学と流体力学とを含めて、大きさのある（巨視的な）物体の変形の力学を扱う分野を連続体力学という。本実験では弾性体を取り扱う。弾性体とは、力を加えると変形し、力を抜くと元に戻るような力学的性質がある物体のことである。

連続体力学においては、単位面積当たりの力を考えて、応力と呼ぶ。圧力は応力の一種である。応力とは何だろうか？物質をミクロに見ると、原子は近所同士でしか力を及ぼし合わない。それを巨視的にみると、仮想的な面を挟んでその面の両側が力を及ぼし合っているのだと考えることができる。そのような力を面積力と呼ぶ。面積力の大きさは面積に比例するので、単位面積当たりの力を考えて、それを応力と呼ぶ。

応力にはいろいろあるけれども、**ずり応力（剪断応力）**を考えてみる。図1のように直方体の弾性体の下面を固定し、上面に面に平行な力を加える。このように面と平行に加わっている応力が剪断応力である。このとき側面が鉛直方向から ϕ 傾いたとする。その傾き ϕ は、上面に加えた応力（単位面積あたりの力）に比例する。逆に、 ϕ に比例する応力がかかっているはずだといっても良い。すなわち、直方体の上面の面積を S 、加えた力を F とすると、

$$\frac{F}{S} = n\phi \quad (1)$$

このとき、比例定数 n を剛性率という。そうすると、固体において変形が小さいときは、

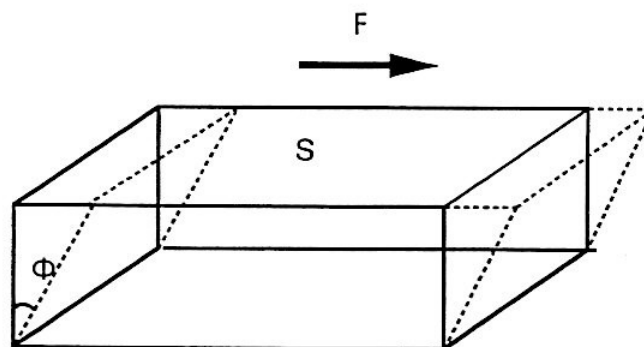


図 1: 直方体の弾性体の下面を固定し、上面に面に平行な力 F を加えた時の歪み。

応力と歪の度合い（この場合図の角度で測る）は比例すると考えられるだろう。その比例係数を「剛性率」という。

剛性率を測定するならば、まさに定義通り図1のような実験装置を作って測定するのが素直ではある。しかし、それはあまり手軽ではない。ひとつには、変形が小さいので、それを測るのが大変である。もう一つ考えてほしいことは、力の測定である。力は、ニュートンの運動方程式を通して現れてくる概念なので直接測定することができない（どうやって測定するか考えてみよう）。そこで、力の代わりに何を測定するのかを考えないといけない。

この実験で工夫されていることは、(1) 長くて細い針金をねじるということで、変形を大きくすること、(2) 力ではなくて時間を測っていること、(3) 円環以外の慣性モーメント I_0 を知らなくてよいことである。

2 実験の目的

ねじれ振子の周期を測定して、針金の剛性率を求める。

3 理論

基本的な方針としては、針金にねじれ振動をさせて、その振動周期から周期から剛性率を求める。針金の上端を固定し、下端に慣性モーメント I の剛体のおもりを吊るしてねじれ振動を行わせると、この振動に関する運動方程式は、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -L \quad (2)$$

となる。ここで θ は下端の回転角であり、 L はおもりにはたらく力のモーメントである。力のモーメント L が回転角 θ に比例するものとする、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -L = -\kappa\theta \quad (3)$$

と書ける。比例定数 κ は、ねじれ剛性率とよばれる。このとき、振動周期を T とすれば、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (4)$$

である。 T と I がわかっているならば、 κ を求めることができ、 κ と剛性率 n の関係がわかっているならば、 n が求められる。これが基本的な方針である。

そうすると、まず κ と n の関係を求める必要がある。そのためには L と n の関係を求めればよい。

長さ l 、半径 a 、剛性率 n の針金を中心軸の周りに θ ねじった時の力のモーメント L を求める。計算の方針としては、針金の内部に半径 r 、厚さ δr の円管を考え、その円管が及ぼす力のモーメント δL を足し合わせて L を求めることにする。この円管の上端を固定し下端を中心軸の周りに θ ねじったとすると、円管表面の鉛直線の鉛直軸からの傾き ϕ は図2を参照すると、

$$\phi = \frac{r\theta}{l} \quad (5)$$

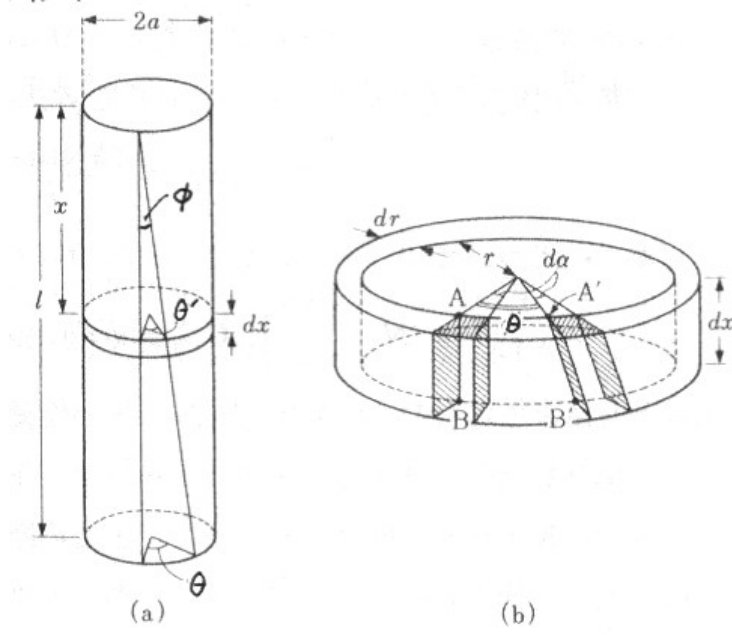


図 2: 長さ l , 半径 r , 厚さ δr の円管の上端を固定し, 下端を中心軸の周りに θ ねじった時の歪み。

となる。円管の断面積は $2\pi r\delta r$ であるから, 円管の下面に円周に沿って加えられた力 δF は, (1) 式と (5) 式から,

$$\begin{aligned}\delta F &= n\phi \cdot 2\pi r\delta r \\ &= n\frac{r\theta}{l}2\pi r\delta r \\ &= \frac{2\pi n\theta r^2\delta r}{l}\end{aligned}\tag{6}$$

となる。そこで, この力が円管に及ぼす力のモーメント δL は,

$$\delta L = r\delta F = \frac{2\pi n\theta r^3\delta r}{l}\tag{7}$$

となる。

従って, 半径 a の針金が中心軸の周りに一様に θ ねじられた時の力のモーメント L は,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^a dL \\ &= \int_0^a \frac{2\pi n\theta r^3}{l} dr \\ &= \frac{\pi n a^4 \theta}{2l}\end{aligned}\tag{8}$$

となる。

このことから, ねじれ剛性率は (8) 式より,

$$\kappa = \frac{\pi n a^4}{2l}\tag{9}$$

となり，振動周期を T とすれば，

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{2Il}{\pi na^4}} \end{aligned} \quad (10)$$

であるから，剛性率 n は，

$$n = \frac{8\pi Il}{a^4 T^2} \quad (11)$$

となる。(11) 式より，剛体の慣性能率 I が分かっている場合にはねじれ振動の周期 T を測定することによって剛性率 n が求まる。

ところが，図3のような複雑な形状をした金具の慣性モーメント I_0 は計算では求められない。そこで慣性モーメントが計算できる円環を2様に用いて I_0 を実験的に消去する方法を考える。

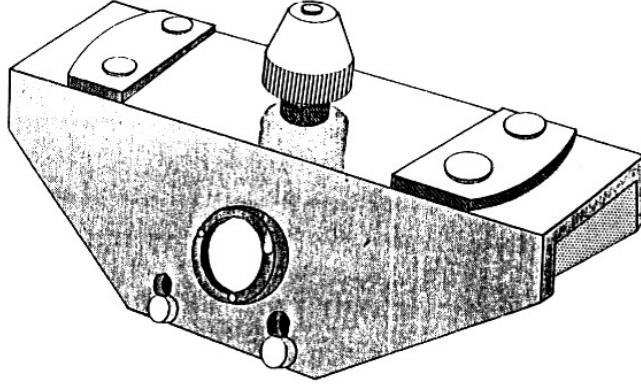


図 3: 円環を吊り下げる金具。

質量 M ，内径 $2b$ ，外径 $2c$ ，厚さ d の円環を水平に吊した時，円環の中心を通る鉛直軸の周りの慣性モーメントを I_1 ，円環を鉛直に吊した時，円環の重心を通る鉛直軸の周りの慣性モーメントを I_2 とすると，円環水平に吊した場合の全慣性モーメントは $I_0 + I_1$ ，円環を鉛直に吊した場合の全慣性モーメントは $I_0 + I_2$ となる (図4参照)。それぞれの場合のねじれ振動の周期を T_1 ， T_2 とすると，

$$T_1^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_0 + I_1}{\kappa} \quad (12)$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_0 + I_2}{\kappa} \quad (13)$$

である。(12) 式から (13) を差し引くと，

$$\begin{aligned} T_1^2 - T_2^2 &= 4\pi^2 \cdot \frac{I_1 - I_2}{\kappa} \\ &= 8\pi l \cdot \frac{I_1 - I_2}{na^4} \end{aligned} \quad (14)$$

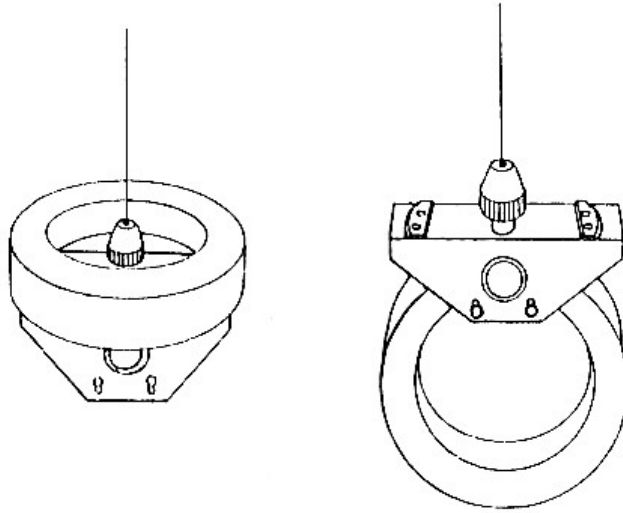


図 4: 円環を吊り下げ金具に水平に取り付けた場合と鉛直に取り付けた場合。

となる。従って，剛性率 n は，

$$n = \frac{8\pi l}{a^4} \cdot \frac{I_1 - I_2}{T_1^2 - T_2^2} \quad (15)$$

と求められる。 I_0 を知らなくても n が求められるようになったことがポイントである。ここで，円環の慣性モーメント I_1, I_2 は，

$$I_1 = M \cdot \frac{b^2 + c^2}{2} \quad (16)$$

$$I_2 = M \left[\frac{b^2 + c^2}{4} + \frac{d^2}{12} \right] \quad (17)$$

で与えられる（課題）。(15) 式に (16) 式と (17) 式を代入すると，

$$n = \frac{2\pi l}{3a^4} \cdot \frac{3b^2 + 3c^2 - d^2}{T_1^2 - T_2^2} \cdot M \quad (18)$$

となる。

4 実験方法

1. 円環内径 $2b$ ，外形 $2c$ ，厚さ d ，針金の直径 $2a$ ，針金の長さ l を測定する。内径 $2b$ ，外形 $2c$ ，厚さ d ，針金の直径 $2a$ については異なる場所で 5 回測定し平均値を求める。また，針金の長さ l についても 5 回測定して平均値を求める。
2. 金具に円環を水平に載せる。
3. 円環の原点（円環に付けた印）を定めて，振子を吊るしている針金と原点と手前のアクリル製のついたての中央線が一致するように配置する。

4. 金具をわずかにねじって、針金を鉛直軸の周りで微小な回転運動をさせる (静止位置から約 90° 以内のねじれに止める)。このとき、回転運動以外の運動を与えないように注意する。ついたての中央線上を円環の原点が横切る瞬間をとらえて回数を数えて (往復で 1 回) 10 回毎に時間を記録して 90 回まで測定する。
5. 次に円環を鉛直に吊るし、円環を水平に吊るした時と同様の実験を行う。
6. 測定値を式 (18) に代入して針金の剛性率 n を求める。
7. 別の針金について、同様の実験を行い剛性率を求めよ。

なお、計算においては、円環の質量 M は 3.10 kg, その誤差 ΔM は 0.01 kg とせよ。

5 実験結果

1. 円環を水平に吊るした時の周期 T_1 の測定

表 1: 円環を水平に吊るした時の 50 振動の時間。

回数	時刻 (分 秒)	回数	時刻 (分 秒)	50 振動の時間 (分 秒)
0		50		
10		60		
20		70		
30		80		
40		90		

2. 円環を鉛直に吊るした時の周期 T_2 の測定

表 2: 円環を鉛直に吊るした時の 50 振動の時間。

回数	時刻 (分 秒)	回数	時刻 (分 秒)	50 振動の時間 (分 秒)
0		50		
10		60		
20		70		
30		80		
40		90		

6 実験上の注意

1. ねじれ振動の 10 回毎の周期はストップウォッチを止めずに測定開始からの経過時間を記録した後に、経過時間の差から求めること。
2. 10 回の周期の間に 1/2 周期以上の差があるときには、振動数の数え間違いの可能性が高いので最初から測定し直すこと。
3. 円環の配置を変えるときや針金の長さを測るときに、針金を折り曲げないように注意すること。
4. 円環が重いので落とさないようにすること。常に円環の真下からずれた位置に足を置くこと。
5. 隣の実験との間隔が狭いので、隣の実験装置に当たらないようにすること。できれば、窓側からは離れておくこと。

7 レポートに書くこと

1. 実験の目的と概要（テキストがあるので、要点だけで良い）
2. 実験手順（テキストがあるので、要点だけで良い）
3. 実験結果（とくに 2 つの針金の剛性率を求めること。また、剛性率の誤差を評価すること。）
4. 考察（求めた剛性率から、実験に用いた針金の材質を推定する。針金の色も参考にすると良い。針金の材質は、特殊なものではなく、ホームセンターに売っているようなものである。）
5. 課題（円環の慣性モーメント I_1, I_2 が (16) 式, (17) 式で与えられることを示せ。）

定量的に書くときには、いつでも有効数字と単位に気を使うこと。

8 誤差の評価

後述の 9 節で説明するような誤差とその伝播の法則にしたがって計算を行う。

まず、直接測定量の推定値とその誤差は以下のように求める。5 回測定している量に関しては、後述の式 (57) の考え方に従って誤差を求める。すなわち、たとえば、針金の径 a の測定値を a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 とすると、真の値の推定値 $\bar{a}$ とその誤差 Δa は

$$\bar{a} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 a_i \quad (19)$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{1}{5} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (a_i - \bar{a})^2} \quad (20)$$

である（他の諸量も同様）。

剛性率はそうした測定量を用いて、

$$n = \frac{2\pi l}{3a^4} \cdot \frac{3b^2 + 3c^2 - d^2}{T_1^2 - T_2^2} \cdot M \quad (21)$$

で与えられる。ここで、

$$\alpha = 3b^2 + 3c^2 - d^2 \quad (22)$$

$$\beta = T_1^2 - T_2^2 \quad (23)$$

とおくと (21) 式は、

$$n = \frac{2\pi l}{3a^4} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot M \quad (24)$$

と書ける。

そうすると、次はこのような間接的な量 α, β, n の推定値と誤差を求める必要がある。
真の値の推定値は、単純に

$$\bar{\alpha} = 3\bar{b}^2 + 3\bar{c}^2 - \bar{d}^2 \quad (25)$$

$$\bar{\beta} = \bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2 \quad (26)$$

$$\bar{n} = \frac{2\pi\bar{l}}{3\bar{a}^4} \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \cdot \bar{M} \quad (27)$$

で良い。誤差は、誤差伝播の法則 (68) にしたがって計算を行う。すなわち

$$(\Delta\alpha)^2 = (6\bar{b})^2(\Delta b)^2 + (6\bar{c})^2(\Delta c)^2 + (2\bar{d})^2(\Delta d)^2 \quad (28)$$

$$(\Delta\beta)^2 = (2\bar{T}_1)^2(\Delta T_1)^2 + (2\bar{T}_2)^2(\Delta T_2)^2 \quad (29)$$

とした上で、(27) 式の両辺の対数を取り、辺々微分するところから、

$$\left(\frac{\Delta n}{\bar{n}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + 4^2 \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\bar{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{\bar{M}}\right)^2 \quad (30)$$

となる。左辺にある Δn が誤差を与える。なお、おもりの質量については、 $\bar{M} = 3.10 \text{ kg}$, $\Delta M = 0.01 \text{ kg}$ とせよ。

9 解説：誤差の統計学的な取扱い

9.1 偶然誤差と系統誤差

誤差には、偶然誤差と系統誤差とがある。

- 偶然誤差：ある値の周りに測定値が適当にバラつくことで生じる誤差。統計学で扱うことができる。偶然誤差が小さいことを precise という。

- 系統誤差：測定値が真の値からいつでも同じようにずれることで生じる誤差。たとえば、定規が熱で伸びていることで生じる誤差。系統誤差が小さいことを accurate という。

以下、扱うのは主として偶然誤差である。系統誤差はケースバイケースで考えないといけないことが多い。

9.2 母集団と母数

統計学では母集団というものを考える。これは、無限回測定ができたと仮定したときの測定値全体の集合である。実際の測定は、母集団の中から有限個の標本を取り出したものだと考える。観測や測定の目的は、有限個の標本から母集団の性質（平均値など）を推定することだと考えられる。

データは、測定ごとにバラつくという意味で確率変数である。いま、問題にしている確率変数が一つであるとして、それを X と書く。以後、確率変数は大文字のアルファベットで表す。確率変数 X が x から $x+dx$ の間の値を取る確率を $f(x)dx$ と書く。関数 $f(x)$ を確率密度関数という。確率密度関数は、母集団の性質を数学的に記述するものである。確率の定義により、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (31)$$

が成立する。

母集団の確率密度関数を特徴づける量を母数と呼ぶ。代表的なものが母平均と母分散である。母平均 μ は、母集団の平均値で

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (32)$$

で定義される。母分散 σ^2 は、確率変数とその平均値のまわりにバラつく度合いを表す量で、

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 \quad (33)$$

で定義される。

一般に、期待値と分散とを次のように定義する。確率変数 X の関数 $F(X)$ （これも確率変数）の期待値 $E[F(X)]$ とは、 $F(X)$ の平均値で

$$E[F(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)f(x)dx \quad (34)$$

で定義される。この期待値を用いると、

$$\mu = E[X] \quad (35)$$

$$\sigma^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (36)$$

と書ける。また、確率変数 $F(X)$ の分散 $V[F(X)]$ を

$$V[F(X)] = E[(F(X) - E[F(X)])^2] \quad (37)$$

と定義すると。これを用いると、

$$\sigma^2 = V[X] \quad (38)$$

と書ける。

9.3 母数の推定値

標本量から求められる量で、母平均、母分散に対応する量として、標本平均 $\bar{x}$ 、標本分散（もしくは不偏分散） s^2 を定義する。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (39)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (40)$$

ただし、 i は標本の番号で、 n は標本の個数である。さらに、標本分散の平方根 s を標準偏差と呼ぶ。以下に説明するように、標本平均、標本分散は、それぞれ、母平均、母分散の良い推定値となっている。

良い推定値の条件にはいくつかある。ひとつは一致性である。これは $n \rightarrow \infty$ のときに、推定値が母数に一致するということである。さて、確率変数 X の取りうる範囲（ここでは実数全体とする）を Δx の幅で区切って、区切り目を $x_j (j = -\infty, \dots, \infty)$ とする。 n が十分に大きい時は、 X が x_j から $x_j + \Delta x$ の間の値を取る個数は $n f(x_j) \Delta x$ となる。これを用いると、標本平均、標本分散は、それぞれ、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j f(x_j) \Delta x \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu \quad (41)$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &\rightarrow \frac{n}{n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_j - \bar{x})^2 f(x_j) \Delta x \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2 \end{aligned} \quad (42)$$

となり、母平均、母分散の一致推定量であることがわかる。上の式で、添字 i と j は全く意味が異なることに注意されたい。前者は標本の番号、後者は値の番号である。

良い推定値の条件として、もうひとつ不偏性がある。これは、推定値の期待値が母数に一致することである。標本平均の場合、

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu \quad (43)$$

なので、標本平均は母平均の不偏推定量である。次に、標本分散の不偏性を確かめる。まず、確率変数としての標本分散を次のように変形する。

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (44)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left\{ (X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu) \right\}^2 \quad (45)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - \frac{n}{n-1} (\bar{X} - \mu)^2 \quad (46)$$

こうしておいて、両辺の期待値を取ることを考える。各項について

$$E[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2 \quad (47)$$

であり、

$$E[(\bar{X} - \mu)^2] = E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right)^2\right] \quad (48)$$

$$= E\left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)\right] \quad (49)$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right] + \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i \neq j} (X_i - \mu)(X_j - \mu)\right] \quad (50)$$

である。ここで、右辺第2項は、各測定が他の測定の影響を受けなければ（統計的に独立ならば）0 になるので、その場合は

$$E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} \quad (51)$$

となる。したがって、

$$E[S^2] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] - \frac{n}{n-1} E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{n}{n-1} \sigma^2 - \frac{n}{n-1} \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \quad (52)$$

となり、標本分散が母分散の不偏推定量であることが分かった。標本分散の定義に入っている $n-1$ が不偏性を確保するためのものであることがわかるだろう。ただし、標準偏差 s は σ の不偏推定量ではない。 σ の不偏推定量を求めるのは面倒なので、普通やらない。

良い推定値の条件は他にもあり得るけれども、ここでは省略する。ここまでの説明は、各測定が独立であれば、確率密度関数の形に依らず成立することに注意しておく。

9.4 母平均の推定値の誤差（複数回の測定をした場合の誤差）

推定値の誤差は、推定量の分散の平方根であると考ええる。推定量を $F(X)$ と書くと

$$Err[F(X)] = \sqrt{V[F(X)]} \quad (53)$$

である。

母平均の推定値は標本平均で、その誤差は

$$Err[\bar{X}] = \sqrt{V[\bar{X}]} \quad (54)$$

となる。式 (51) を用いると

$$V[\bar{X}] = E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n} \quad (55)$$

であるから、

$$Err[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (56)$$

である。実際に使うときは、母分散 σ をその推定値である標本分散 s で置き換えて

$$Err[\bar{X}] = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (57)$$

として標本平均の誤差、すなわち複数回の測定の誤差を推定する。誤差が、測定回数の平方根に反比例して小さくなることに注意しよう。

9.5 間接量の推定値とその誤差

確率変数 Z が、確率変数 X, Y と

$$Z = \phi(X, Y) \quad (58)$$

の関係にあるとする。

このとき Z の母平均 μ_z の推定値 $\hat{z}$ は、単純に考えると

$$\hat{z} = \phi(\bar{x}, \bar{y}) \quad (59)$$

となるであろう。実際、本実験ではそのようにして推定することにする。しかし、良く考えると、一般には

$$E[\hat{Z}] = E[\phi(\bar{X}, \bar{Y})] \neq \phi(E[\bar{X}], E[\bar{Y}]) = \phi(\mu_x, \mu_y) = \mu_z \quad (60)$$

なので、 $\hat{z}$ が良い推定値（不偏推定値）になるとは限らない。しかしながら、良い推定値が何であるかは ϕ の形や確率分布関数の形に依存してややこしいので、ここではこれ以上深入りしない。実用的には、この推定で十分である。

次に Z の推定値 $\hat{Z}$ の誤差 $Err[\hat{Z}]$ がどれほどになるかを考える。ここで、誤差は

$$Err[\hat{Z}] = \sqrt{V[\hat{Z}]} = \sqrt{E[(\hat{Z} - \mu_z)^2]} \quad (61)$$

であるとする。いま、測定値のバラつきが小さいものとして、 ϕ をテイラー展開して考える。

$$\hat{Z} = \phi(\bar{X}, \bar{Y}) \simeq \phi(\mu_x, \mu_y) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(\mu_x, \mu_y)(\bar{X} - \mu_x) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(\mu_x, \mu_y)(\bar{Y} - \mu_y) \quad (62)$$

したがって、

$$\hat{Z} - \mu_z \simeq \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(\mu_x, \mu_y)(\bar{X} - \mu_x) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(\mu_x, \mu_y)(\bar{Y} - \mu_y) \quad (63)$$

となる。そこで、

$$V[\hat{Z}] = E[(\hat{Z} - \mu_z)^2] \quad (64)$$

$$\simeq E \left[\left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (\bar{X} - \mu_x) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) (\bar{Y} - \mu_y) \right\}^2 \right] \quad (65)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 E[(\bar{X} - \mu_x)^2] + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 E[(\bar{Y} - \mu_y)^2] \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) E[(\bar{X} - \mu_x)(\bar{Y} - \mu_y)] \end{aligned} \quad (66)$$

となる。ここで、もしも X と Y の測定がお互いに影響を受けなければ（統計的に独立ならば）、 $E[(\bar{X} - \mu_x)(\bar{Y} - \mu_y)] = 0$ となる。そこで、

$$V[\hat{Z}] \simeq \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 V[\bar{X}] + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 V[\bar{Y}] \quad (67)$$

となる。そこで、誤差に関して言えば

$$(Err[\hat{Z}])^2 \simeq \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 (Err[\bar{X}])^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 (Err[\bar{Y}])^2 \quad (68)$$

となる。これを誤差伝播の法則という。これは、 X と Y が独立であり、誤差があまり大きくなければ、確率分布関数の形に依らず成り立つので良く使われる。

なお、これとは異なる誤差評価方法もある。これは、 X と Y が独立かどうかはわからないと考えられるときに、誤差に余裕を持たせる意味で最大誤差

$$ErrMax[F(X)] = \max |X - E[X]| \quad (69)$$

を考えるものである。すなわち、テイラー展開の式

$$\hat{Z} - \mu_z \simeq \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (\mu_x, \mu_y) (\bar{X} - \mu_x) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) (\mu_x, \mu_y) (\bar{Y} - \mu_y) \quad (70)$$

から

$$|\hat{Z} - \mu_z| \leq \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right| |\bar{X} - \mu_x| + \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right| |\bar{Y} - \mu_y| \quad (71)$$

となるので、

$$ErrMax[\hat{Z}] \leq \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right| ErrMax[\bar{X}] + \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right| ErrMax[\bar{Y}] \quad (72)$$

とするという考え方である。三平方の定理からわかるように、このように誤差伝播をすることになると、通常の誤差伝播の法則 (68) よりも常に大きな値を与えることになる。誤差の見積もりに安全性を見越して余裕を持たせたいときや、独立でない系統誤差があるとき（たとえば、同じ定規で複数の量を測定するために、定規の狂いが同じように測定量に入ってしまうとき）には、こちらの見積もりを採用した方が良い。