

1 ベクトル・テンソル解析

皆さんの大部分は、すでにベクトル・テンソル解析の基礎的なところはすでに学部で習得していると思う。そこでここでは、ベクトルやテンソルが出てくる論理を、物理学や幾何学と関係させながら改めて整理する。ここで考えるのは3次元ユークリッド空間に限ることにする。本日第1回目の講義では、座標系はデカルト座標に限る。次回は、そうではない座標系の取り扱いも少しある。

1.1 ベクトルとテンソル

1.1.1 ベクトルとは何だろうか？～ベクトルが備えているべき性質

■1.1.1.1 ベクトルは矢印～ベクトルと座標変換 まず、ベクトルとは何かを改めて考えてみよう。ベクトルは基本的には「矢印」である。力学においても、基本的には、位置を表す矢印（位置ベクトル）とか力のベクトルなどが基本的な量で、図に描くときは矢印で表す。

座標系を決めると、ベクトル v は

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

というふうに成分で書くことができる。その意味では、ベクトルは3つの数字の組であるとも言える。しかし、「矢印」は単なる数字の組ではない。それは座標系を変えてみると分かる（下の問題の図参照）座標系を変えると、矢印は変わらなくても数字の組は変わるということで、いわば「矢印」であることが真の姿、成分は仮の姿である。

してみると、座標変換に対してどのように変換するかということが、ベクトルが単なる数字の組ではないことを示すメルクマールになる。今回の講義では、長さの尺度の決まったデカルト座標系しか考えないことにして、座標系の平行移動も考えないことにする（原点は固定する）。そうすると考えるべき座標変換は回転だけである（回転以外の座標変換を考えると道具立てが複雑になるので、今回は回転座標変換に留めるような条件を付けた）。座標変換を表す回転行列（直交行列）を

$$R = (R_{ij}) \quad (2)$$

と書くことにする。ただし、 R は回転行列なので、

$$(R^{-1})_{ij} = R_{ji} \quad (3)$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^3 R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk} \quad (4)$$

である。ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタと呼ばれる記号で

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (5)$$

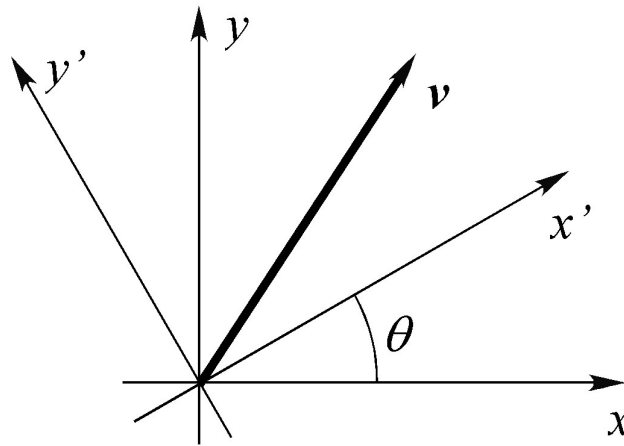


図 1 問題：ベクトルに対する座標の回転

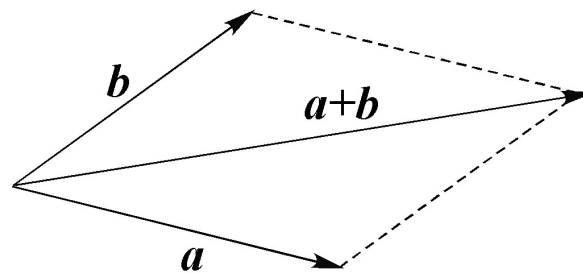


図 2 ベクトルの和

で定義されている。このとき、ベクトルの成分は回転座標変換に対して

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} v_j \quad (6)$$

のように変換される（というより、回転行列はこんなふうにして決める）。

[問題 1] 図 1 のような 2 次元の座標の回転に対する回転行列を求めよ。今の回転の定義では、矢印はそのまま、それを記述する座標系が変わったと考える。

■ 1.1.1.2 ベクトルの足し算と引き算～ベクトル空間 ベクトルは、足し算が出来たり、定数倍が出来たりしないと困る。力学では、2 つの力が加わった時、全体ではどのような力が働いたことになるのか、力を 2 倍にしたらどうなるか、といった問題に答えられないといけないからである。

高校生でも知っている通り、ベクトルの和は、2 つの矢印の原点をそろえて書くと、2 つの矢印が作る平行四辺形の対角線に向かう矢印になる（図 2）。成分で言えば、成分ごとの足し算ということになる。これで和が定義できている。

定数倍の方は、矢印で言えば、方向が同じで 2 倍の長さにすることであり、成分で言えば、全部の成分にその定数をかけることである。

数学屋さんには集合で考えないといけないから、そのような和や定数倍が定義されたベクトル全体の集合を考えて、それをベクトル空間と呼ぶ。

■ 1.1.1.3 ベクトルに対する線形演算～ベクトルの基底 ベクトルを成分を使って表すということは、別の表現法では、座標軸方向の単位ベクトル e_1, e_2, e_3 を用いて

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \boldsymbol{e}_i \quad (7)$$

と書くということでもある。このような単位ベクトルの組 e_1, e_2, e_3 を基底 (あるいは 基本ベクトル) という (正確には、これは基底の一種で、正規直交基底という)。

こう書くことの利点は2つくらいある。

ひとつは、ベクトルに対する線形演算は、基底に対する演算の結果がわかっていればすべてわかるということである。なぜなら、線形演算を T と書くと、 T の線形性から

$$T(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^3 v_i T(\boldsymbol{e}_i) \quad (8)$$

と書けるからである。

もうひとつは、ベクトルの実体が矢印であって、成分の方がみかけのものであるということが陽に表現されていることにある。たとえば、座標変換に際して、矢印そのものは変わらないけれども成分は変わるということ

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^3 v'_i \boldsymbol{e}'_i \quad (9)$$

というふうに表現することができる。座標変換に対して成分が

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} v_j \quad (10)$$

と変換されるときに、基底は

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \boldsymbol{e}_j (R^{-1})_{ji} = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \boldsymbol{e}_j \quad (11)$$

と変換される。それは、 $\sum_{i=1}^3 v'_i \boldsymbol{e}'_i$ を計算してみると

$$\sum_{i=1}^3 v'_i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i,j,k=1}^3 R_{ij} v_j R_{ik} \boldsymbol{e}_k = \sum_{j,k=1}^3 \delta_{jk} v_j \boldsymbol{e}_k = \sum_{j=1}^3 v_j \boldsymbol{e}_j \quad (12)$$

となることからわかる (今のところ R は直交行列に限っていることに注意する)。

■ 1.1.1.4 [参考] ベクトル空間としての関数空間 関数もベクトルだと考えることもできる (詳しくは、関数解析の教科書を参照すること)。本講義でも、第2章の1回目でそのような考え方が出てくる。関数にも和やスカラー倍が定義できる。関数を作るベクトル空間を関数空間と言う。

フーリエ変換の式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (13)$$

は、 $f(x)$ がベクトルで、 $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ が基底、 $\tilde{f}(k)$ がその基底に対する成分であるというふうに見ることができる。

1.1.2 テンソルとは何だろうか？

テンソルとは、数学的にはどういう量であるべきだろうか？浸透率テンソルを例にして考えてみよう。

■ 1.1.2.1 浸透流と浸透率 浸透流の話はお馴染りでないかもしれないが、地下水の流れを記述するのに良く使われる。ここは流体力学の講義ではないので、あまり細かい定義や内容には触れずにおおざっぱな雰囲気導入してみる。地下水の流れは、水を押す力である圧力勾配に比例すると考える。

$$\mathbf{q} \propto \nabla p \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{q}$ は流れ (正確な定義は省略する)、 ∇p は圧力勾配 (勾配 grad は次回にやるけれども、皆さん知っているでしょう) である。その比例係数を

$$\mathbf{q} = \frac{K}{\mu} \nabla p \quad (15)$$

のように書く。ここで、 K は浸透率と呼ばれる量で、土や砂の中を流体 (地下水) が通る時の通りやすさを表す。 μ は流体 (地下水) の粘性率である。つまり、 K は媒質 (土や砂) の通りやすさ、 μ は中を通る流体の流れにくさを表す。

■ 1.1.2.2 浸透率テンソル ところで、土や岩が層構造をしていたり、断層があったりすると、単純な比例関係ではたぶんいけない。というのは、断層があったりすると、そちらの方向に水が通りやすいだろうから、押した方向に対して斜めの方向に水が出てきたりするだろうからだ。

このときは、もうちょっと一般的な比例関係ということで、方向性は問わないけれども線型性があるということを要請する。すなわち、

$$\mathbf{q} = K(\mathbf{f}) \quad (16)$$

ただし

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mu} \nabla p \quad (17)$$

と書いて、水の通りやすさを表す関数 K が線型性を持っていることを要請する。すなわち、

$$K(\lambda \mathbf{f}) = \lambda K(\mathbf{f}) \quad (18)$$

$$K(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) = K(\mathbf{f}_1) + K(\mathbf{f}_2) \quad (19)$$

が成り立つものとする。上の式は、圧力勾配が2倍になれば流れも2倍になるということで、自然である。下の式は、たとえば、圧力勾配を x 方向と y 方向に分解しておいて、それぞれの圧力勾配による流れを足すと全体の流れを求めることができるということで、これもまた自然である。このとき、この線型関数 K を浸透率テンソルと呼ぶ。

次に、ベクトル $\mathbf{q}$ と $\mathbf{f}$ とを基底で表現して

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^3 q_i \mathbf{e}_i \quad (20)$$

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{e}_i \quad (21)$$

と書くことにする。そうすると、

$$\sum_{i=1}^3 q_i \mathbf{e}_i = K \left(\sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{e}_i \right) \quad (22)$$

となる。右辺に K の線形性を用いると

$$\sum_{i=1}^3 q_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 f_i K(\mathbf{e}_i) \quad (23)$$

と書くことができる。さらに、 $K(\mathbf{e}_i)$ は一つのベクトルだから

$$K(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j K_{ji} \quad (24)$$

と書くことが出来て

$$\sum_{i=1}^3 q_i \mathbf{e}_i = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_j K_{ji} f_i \quad (25)$$

と書き直せる。両辺の成分を比べると

$$q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} f_j \quad (26)$$

となる。このようにして、浸透率テンソルは行列の形 K_{ij} で書けることが分かった。これを浸透率テンソルの成分という。

■ 1.1.2.3 テンソルの定義 ~ 線形写像その 1 上でやったことを一般化して、(2 階の) テンソルはベクトルからベクトルへの線形写像であると定義できる。この意味でのテンソルを T と表す。

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) \quad (27)$$

テンソルの成分は

$$T(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j T_{ji} \quad (28)$$

もしくは内積 (後から出てくるが、皆さん知っているはず) を使って

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot T(\mathbf{e}_j) \quad (29)$$

から定義できて、1.1.2.1 と同じことをすれば

$$v_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} u_j \quad (30)$$

と書くことができる。

とくに

$$I(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \quad (31)$$

(恒等写像) となるテンソルを恒等テンソルという。成分で書けば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \quad (32)$$

となる。

■ 1.1.2.4 テンソルの定義 ~ 線形写像その2 テンソルの定義は、上で述べたものに限らない。写像を使った定義としては、2階のテンソルを、2つのベクトルからスカラーへの双線形写像と定義するやり方もある。すなわち、

$$s = T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (33)$$

として、双線型性

$$T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \quad (34)$$

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + T(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) \quad (35)$$

$$T(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (36)$$

を要請する。ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \quad (37)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \quad (38)$$

とすると、双線型性から

$$s = \sum_{i,j=1}^3 u_i T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) v_j \quad (39)$$

となる。ここで、

$$T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (40)$$

と定義すれば

$$s = \sum_{i,j=1}^3 u_i T_{ij} v_j \quad (41)$$

と書くことができる。

この定義 (33) と、先の定義 (27) とはどのような関係になるのだろうか? (33) で定義された T からベクトルからベクトルへの線形写像

$$\tilde{T}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 T(\mathbf{e}_i, \mathbf{u}) \mathbf{e}_i \quad (42)$$

を構成することができる。このテンソル $\tilde{T}$ の成分は

$$\tilde{T}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{T}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \sum_{k=1}^3 T(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = T_{ij} \quad (43)$$

となって、ちょうど T の成分と一致する。逆に (27) で定義された $\tilde{T}$ から、2つのベクトルからスカラーへの双線形写像

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \tilde{T}(\mathbf{v}) \quad (44)$$

を構成することができる。このテンソル T の成分は

$$T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{T}(\mathbf{e}_j) = \tilde{T}_{ij} \quad (45)$$

となって、やはり $\tilde{T}$ の成分と一致する。こうして、定義 (33) と定義 (27) とは一対一に対応していることが分かる。そこで、場合に応じて便利な方の定義を用いればよいことになる。

さらに今までのことを拡張して容易に高階のテンソルを定義できる。たとえば、4階テンソルの一つの定義の仕方は、2階テンソルから2階テンソルへの線形写像である。実際、たとえば、弾性率テンソル (4階テンソル) は、歪テンソル (2階テンソル) から応力テンソル (2階テンソル) への線形関数である。

■ 1.1.2.5 テンソルを表す記号 ベクトルは、よく太字で $\mathbf{v}$ のように表したり、上に矢印を付けて $\vec{v}$ のように表したりする。字の下に $\sim$ を付ける人もいる。それに比べると、テンソルはあまり決まった表し方がなくて、 $T, \mathcal{T}, \mathbb{T}, \mathbf{T}$ のように表したりする。しかし、それではテンソルの階数を表現できない。テンソルの階数を含んだ表し方としては、ベクトル (1階のテンソル) を $\underline{v}$ 、2階のテンソルは $\underline{\underline{T}}$ 、3階のテンソルは $\underline{\underline{\underline{T}}}$ のようにするものがある。

■ 1.1.2.6 テンソルの足し算と引き算と定数倍 テンソルに対して足し算、引き算、定数倍を定義する。テンソルは写像なので自然な定義は、関数の和、差、定数倍と同じように定義すればよい。

(27) で定義された2階テンソルの場合は

$$(T + S)(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) + S(\mathbf{u}) \quad (46)$$

$$(T - S)(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) - S(\mathbf{u}) \quad (47)$$

$$(\lambda T)(\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u}) \quad (48)$$

となる。成分で書けば

$$(T + S)_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \quad (49)$$

$$(T - S)_{ij} = T_{ij} - S_{ij} \quad (50)$$

$$(\lambda T)_{ij} = \lambda T_{ij} \quad (51)$$

となる。高階テンソルでも同様である。これによってテンソルの作る集合も線型空間 (ベクトル空間) になる。

このような演算が必要であることは、たとえば弾性体での応力に関して、2つの異なるソースの影響を足し算するとか、ソースが2倍になったら応力も2倍になるといったようなことを行うことからわかるであろう。

和に関する単位元 (零元) として零テンソルがある。それは、どんなベクトル $\mathbf{u}$ に対しても

$$O(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (52)$$

となるようなテンソル O のことである。その成分はすべて0になる。

■ 1.1.2.7 テンソルと座標変換 ベクトルの時と同様、テンソルであることの特徴は、成分の回転座標変換に対する変化に現れる。浸透率テンソルで考えてみよう。

$$q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} f_j \quad (53)$$

回転座標変換によって、ベクトルの成分は

$$q'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} q_j \quad (54)$$

$$f'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} f_j \quad (55)$$

のように変化するのであった。浸透率テンソルは

$$q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} f_j \quad (56)$$

$$q'_i = \sum_{j=1}^3 K'_{ij} f'_j \quad (57)$$

の関係を満たしていなければならないから、(54) と (55) とを (57) に代入して

$$\sum_{j=1}^3 R_{ij} q_j = \sum_{j,k=1}^3 K'_{ij} R_{jk} f_k \quad (58)$$

が得られ、これに (56) を代入して

$$\sum_{j,k=1}^3 R_{ij} K_{jk} f_k = \sum_{j,k=1}^3 K'_{ij} R_{jk} f_k \quad (59)$$

となっていなければならない。どんなベクトル f に対してもこの関係が成り立つから

$$\sum_{j=1}^3 R_{ij} K_{jk} = \sum_{j=1}^3 K'_{ij} R_{jk} \quad (60)$$

が成り立っているはずで、両辺に $(R^{-1})_{kl} = R_{lk}$ をかけて k で和を取ると

$$K'_{il} = \sum_{j,k=1}^3 R_{ij} R_{lk} K_{jk} \quad (61)$$

が得られる。これが、テンソルの成分の回転座標変換の規則を与える。

[問題 2] z 軸の周りに 180 度回転する座標変換の時に浸透率テンソルはどのように変換されるか計算せよ。得られた結果を図を用いて説明せよ。

■ 1.1.2.8 テンソルの座標変換による定義～テンソルの古典的定義 上のことは浸透流の性質を使っていないから、浸透率テンソルに限らず、すべてのテンソルで成り立つ。そこで逆に、テンソルを成分の座標変換規則をもって定義することができる。これがテンソルの古典的な定義である。

まず、ベクトルは、数の組 (v_i) ($i = 1, 2, 3$) で、回転座標変換 R_{ij} (直交行列で表される。1.1.1.1 節で断ったように、今回の講義では回転座標変換しか扱わない。) に対して

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} v_j \quad (62)$$

のように変換されるものである。(2 階) テンソルは数の組 (T_{ij}) ($i, j = 1, 2, 3$) は、同じ座標変換に対して

$$T'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} R_{jl} T_{kl} \quad (63)$$

のように変換されるものである。3 階テンソルは数の組 (T_{ijk}) ($i, j, k = 1, 2, 3$) は、同じ座標変換に対して

$$T'_{ijk} = \sum_{l,m,n=1}^3 R_{il} R_{jm} R_{kn} T_{lmn} \quad (64)$$

のように変換されるものである。以下高階のテンソルも同様である。

ベクトルは、1 階のテンソルという言い方もできる。0 階のテンソルをスカラーと呼ぶ。スカラーは、座標変換に対して変化しない。

[注意] 行列で書けるものは、何でもテンソルというわけではない。たとえば、上の座標変換の行列 (R_{ij}) は、定義からしてテンソルではない。

しかし、このベクトルやテンソルの定義は、数学的には少し気持ち悪い。というのは、この定義では成分を使っていて、ベクトルで解説したように、成分は「見かけの量」だからである。それに、上の「注意」で述べたような単なる行列とテンソルの区別も紛らわしい。そこで、先のように線形写像で定義しておくのがスマートである。

とはいえ、上のように成分を用いた定義が良い点もある。ひとつは、スカラーやベクトルがテンソルの一種ととらえられることがはっきり分かる点であり、もうひとつは、座標変換が直接出ているので実用的である点である。

本当のことを言えば、ベクトルが矢印で表されるように、テンソルも図を使って表される何かであると言いたい。でも、なかなか図では描けない(描こうとすると、地震学でモーメントテンソルを表すのに使う「ビーチボール」くらいか?) ので、テンソルの定義がいろいろ持って回った感じになっている。

[問題 3] (40) で定義されたテンソルの成分がテンソルの回転座標変換の法則 (63) を満たすことを示せ。

[問題 4] (x, y) 平面の平面応力で、 x 方向への一軸圧縮 ($\sigma_{xx} = -\sigma$, その他の $\sigma_{ij} = 0$) の場合に、連続体の中に z 軸を含む平面を考える (図 3)。面の法線が x 軸となす角度 θ の関数として、面

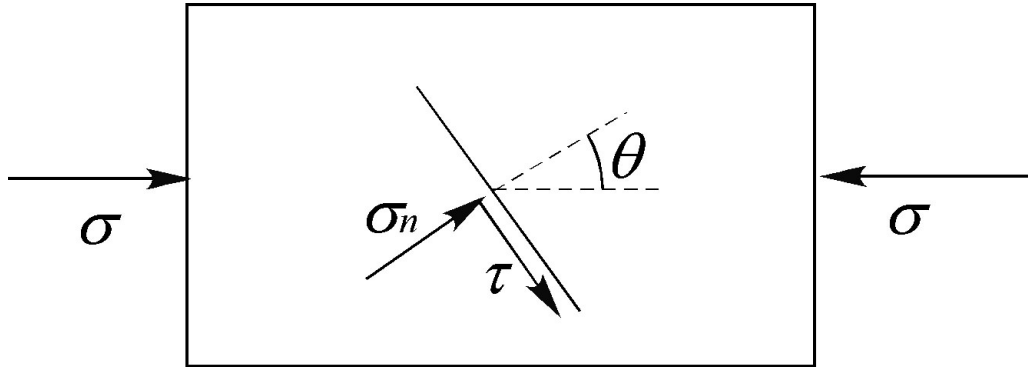


図 3 一軸圧縮の場合

に働く法線応力 σ_n と剪断応力 τ を表せ。とくに剪断応力が最大となる θ が 45 度であることを確かめよ。

■ 1.1.2.9 対称テンソルと反対称テンソル

1.1.2.9.1 対称テンソル 2 階テンソルを成分で書いたときには

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (65)$$

となるとき、あるいは同じことだが、2 階テンソルを 2 つのベクトルからスカラーへの線形写像 (33) と書いたときには

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (66)$$

となるとき、テンソル T は対称テンソルであるという。

3 階以上のテンソルに関しては、その成分の任意の 2 つの添字を交換しても変わらないときに対称テンソルであるという。

定義としては以上のことだけなのだが、物理学では対称テンソルがしばしばでてきて、後で主値を説明するときに見るように対称テンソル特有の性質が役に立つことがある。対称テンソルの例としては、連続体力学で出てくる応力テンソル (特殊な場合には対称でないこともあるが、通常は対称) や歪テンソル、電磁気学で出てくる Maxwell の応力テンソルなどがある。

1.1.2.9.2 反対称テンソル 2 階テンソルを成分で書いたとき

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (67)$$

となる、あるいは同じことだが、2 つのベクトルからスカラーへの線形写像 (33) と書いたとき

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -T(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (68)$$

となるとき、テンソル T は反対称テンソルであるという。

3 階以上のテンソルに関しては、その成分の任意の 2 つの添字を交換したときに符号が反転するものを完全反対称テンソル (交代テンソル) であるという。

3 階の完全反対称テンソルの最も簡単なもので、よく計算に使われるものに Levi-Civita の完全反対称テンソルと呼ばれるものがある。それは

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ((i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)) \\ -1 & ((i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (69)$$

と定義される。 ϵ_{ijk} を単なる記号と見て、Levi-Civita の記号 とか Eddington のイプシロン とか呼ぶこともある。 ϵ_{ijk} に関して次の公式はしばしば用いられる。

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (70)$$

$$\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \quad (71)$$

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6 \quad (72)$$

[問題 5] 上の 3 つの公式を証明せよ。

1.1.2.9.3 (完全) 反対称テンソルと星印作用素 2 階反対称テンソルは

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (73)$$

という形をしているので、独立な成分は 3 つである。そこで、この 3 つの成分を持つベクトルと 1 対 1 に対応が付けられる。

具体的には、2 階反対称テンソル A からベクトルへの星印作用素 $*$ を

$$(*A)_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_{jk} \quad (74)$$

と定義し、逆に、ベクトル A から 2 階反対称テンソルへの星印作用素を

$$(*A)_{ij} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_k \quad (75)$$

と定義すると、この星印作用素が 2 階反対称テンソルとベクトルとの対応を与える。1 対 1 対応なので、ベクトル A もしくは 2 階反対称テンソル A に対して、

$$**A = A \quad (76)$$

である。

3 階完全反対称テンソルは

$$A = (a\epsilon_{ijk}) \quad (77)$$

という形をしており、独立な成分は1つしかない。そこで、スカラーと1対1の対応がある。具体的には、3階完全反対称テンソル A からスカラーへの星印作用素 $*$ を

$$*A = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_{ijk} \quad (78)$$

と定義し、逆に、スカラー A から3階完全反対称テンソルへの星印作用素を

$$(*A)_{ijk} = \epsilon_{ijk} A \quad (79)$$

と定義すると、この星印作用素が3階反対称テンソルとスカラーとの対応を与える。1対1対応なので、スカラー A もしくは3階完全反対称テンソル A に対して、

$$**A = A \quad (80)$$

である。

[問題 6] 3次元の場合、4階の完全反対称(交代)テンソルは零テンソル以外には存在しないことを証明せよ。

1.2 ベクトル演算・テンソル演算の基礎

1.2.1 ベクトルやテンソルの積

ベクトルやテンソルには何通りかの「積」が定義されている。それらを見てゆこう。

「積」は、2つのベクトル(やテンソル)の双線型関数として定義される。したがって、先の写像としてのテンソルの定義によれば、テンソルの一種であるという言い方もできる。

■ 1.2.1.1 ベクトルの内積

1.2.1.1.1 内積の定義 2つのベクトル a, b の内積(スカラー積、ドット積)は、

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (81)$$

と定義される。テンソルが2つのベクトルからスカラーへの双線形関数であるという立場で言えば、これは恒等テンソル

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

に相当する。同じことだが、単位ベクトルに対する作用は

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1 \quad (83)$$

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0 \quad (84)$$

$$e_2 \cdot e_1 = e_3 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = 0 \quad (85)$$

となる。

内積には対称性

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{交換法則}) \quad (86)$$

と双線形性

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{分配法則}) \quad (87)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{分配法則}) \quad (88)$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (89)$$

がある。

ベクトルの大きさは、

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (\text{ピタゴラスの定理}) \quad (90)$$

で表される。ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさを、単に a と書くことも多い。

1.2.1.1.2 [参考] 拡張された内積 内積の概念には、考える空間によっていろいろ拡張されたバージョンがある。内積は、より一般的には2つのベクトルの対称な双線形関数である。たとえば、特殊相対論を考える時には $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z)$ という4次元時空を考えて、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (91)$$

のような内積を考える (Minkowski 空間)。さらにそれを拡張した一般相対論では

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i,j=0}^4 g_{ij} a_i b_j \quad (92)$$

(ただし、 g_{ij} は対称テンソル) のような内積を考える。また、関数空間の内積は、実関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx \quad (93)$$

のように定義できる。

1.2.1.1.3 ベクトルの内積の幾何学的な意味 内積には、皆さんも御承知の通りの (高校生でも習う) 幾何学的な意味がある。2つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がともに零ベクトルでないときは、それらのなす角を θ とすると

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (94)$$

が成り立つ。したがって、0 でないベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して

$$\mathbf{a} \text{ と } \mathbf{b} \text{ が直交する} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (95)$$

ということになるし、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \quad (96)$$

という性質があることもすぐにわかる。

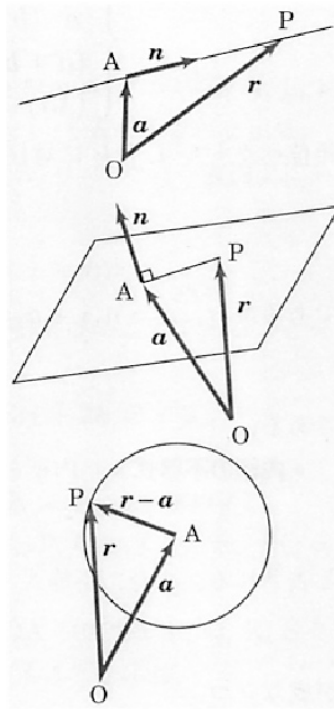


図 4 図形のベクトル方程式の説明

ベクトルが座標軸となす角度の $\cos$ を方向余弦という。0 でないベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ が x 軸, y 軸, z 軸となす角を α, β, γ とするとき、方向余弦 (l, m, n) は

$$l = \cos \alpha \quad (97)$$

$$m = \cos \beta \quad (98)$$

$$n = \cos \gamma \quad (99)$$

と表される。内積を用いて考えると

$$l = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (100)$$

$$m = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (101)$$

$$n = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (102)$$

となる。このことから

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (103)$$

が成り立っていることも分かる。

内積のひとつの簡単な応用として、空間図形をベクトルを用いて表現する方法がある (図 4)。図形を、図形上の点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ が満たすべき条件という形で与える。

直線 点 A を通りベクトル $\mathbf{n}$ に平行な直線の方程式は、点 A の位置ベクトルを $\mathbf{a}$ とすれば t を実数のパラメタ (媒介変数) として

$$\mathbf{r} - \mathbf{a} = t\mathbf{n} \quad (104)$$

である。

平面 点 A を通りベクトル n に垂直な平面の方程式は、点 A の位置ベクトルを a とすれば

$$n \cdot (r - a) = 0 \quad (105)$$

である。

球面 点 A を中心とする半径 R の球面の方程式は、点 A の位置ベクトルを a とすれば

$$(r - a) \cdot (r - a) = R^2 \quad (106)$$

である。

1.2.1.1.4 ベクトルの内積の物理学への応用 物理学で、内積がいろいろな場面で現れるのは皆さんご存知だろう。なので、あまりたくさん例を挙げてもしかたがないから、一つだけ例を挙げる。質点の力学では、仕事が

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (107)$$

のように、力 $\mathbf{F}$ と動いた距離 $\Delta \mathbf{r}$ の内積としてあらわされる。力のうちで、力学的意味での「仕事」に効くのは、質点が動く方向の成分だけであることを示している。

■ 1.2.1.2 テンソルの内積

1.2.1.2.1 テンソルの内積の定義 2 階テンソルに対しても内積 (2 重内積、2 重ドット積) を定義できる。2 つのテンソル $\underline{\underline{A}}$ と $\underline{\underline{B}}$ との内積は

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij} \quad (108)$$

と定義される。ここで、記号 $:$ は、成分で書いたときに 2 つの添字についての和を取ることを象徴している。これは、ベクトルの内積記号 $\cdot$ が 1 つの添字についての和を取ることを象徴しているとみて、拡張したものである。

2 階テンソルの大きさは

$$|\underline{\underline{A}}| = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}} \quad (109)$$

である。なお文献によっては、素直に

$$|\underline{\underline{A}}| = \sqrt{\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}} \quad (110)$$

としているものもある。ベクトルと違って、幾何学的な意味が無いので、係数の取り方には任意性がある。前者の定義で $1/2$ を付ける気分は、対称テンソルでたとえば $A_{12}(= A_{21})$ だけが大きくなるような場合に

$$|\underline{\underline{A}}| \simeq A_{12} \quad (111)$$

となるようにしたいということである。

1.2.1.2.2 テンソルの内積の物理学への応用例 物理学で内積が出てくる場面の一例には、次のようなものがある。流体力学で運動エネルギーの式を書くと

$$(\text{応力テンソル}) : (\text{速度勾配テンソル}) \quad (112)$$

という形の項が現れる。

テンソルの大きさを使う例として、マントル物質の非線形レオロジーを挙げておこう。マントルは固体だからレオロジーが通常のニュートン粘性と違っていても驚かないだろう。実際、主要な変形メカニズムとして転位クリープが考えられており、その場合、偏差応力 τ と歪速度 $\dot{\epsilon}$ は比例せず、実験式としては

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2\mu B} \left(\frac{\tau}{G} \right)^{n-1} \tau \quad (113)$$

のような関係であらわされる。ここで、 n が非線形性を表す定数で 3.5 くらいの数値になる。 μ は粘性率、 G は剛性率、 B は無次元の定数である。ところが、これは 1 次元の関係式である。というのも、実験では、いろいろな方向から応力をかけたりいろいろな方向の歪を測ったりするのは難しいから、3 次元的な関係式を決定するのは難しいからである。しかし、マントル対流のシミュレーションをするには 3 次元の関係式が必要である。これをどのように 3 次元に拡張したらよいのだろうか？ニュートン粘性の場合は偏差応力テンソル τ_{ij} と歪速度テンソル $\dot{\epsilon}_{ij}$ は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} \quad (114)$$

のように結びついている。そこで、上二つの式を単純に混ぜ合わせて

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu B} \left(\frac{\tau}{G} \right)^{n-1} \tau_{ij} \quad (115)$$

としてはどうだろうかということをおもいつく。ここの τ は応力の大きさを代表する量で、それにテンソルの大きさ (109) が使われている。

■ 1.2.1.3 行列の積としての記法 ベクトルとテンソルが関わる演算で行列の積の形で書けるものがある。呼称は教科書によってまちまちである。

前に 1.1.2.3 でやったように、ベクトルからベクトルへの線形写像の形 (27) で定義された 2 階テンソル

$$\underline{v} = T(\underline{u}) \quad (116)$$

は、成分で書くと

$$v_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} u_j \quad (117)$$

と書くことができる。右辺は行列の形をしているから、このことを

$$\underline{v} = \underline{T} \cdot \underline{u} \quad (118)$$

とか、単に

$$\underline{v} = \underline{T} \underline{u} \quad (119)$$

と書くことがある。前者の $\cdot$ は、1つの添字についての和を取ることを表し、後者は、行列の積のつもりで積の記号を書かない。しかし、後者のように積記号を書かないやり方は、後述のテンソル積で用いられることもあり紛らわしいので、本講義では使用しない。

やはり2階テンソルをベクトルからベクトルへの線形写像の形 (27) で定義したとき、ベクトル u を写像 T で変換し、それをさらに写像 S で変換するということがある。

$$v = S(T(u)) \quad (120)$$

これを成分で書くと

$$v_i = \sum_{j,k=1,3} S_{ij} T_{jk} u_k \quad (121)$$

と書くことができる。この T と S の合成写像 (2階テンソル) は、行列の積の形で書けているので、

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{T}} \quad (122)$$

とも書くことができる (この場合も積記号を書かない流儀もあるが、本講義では紛らわしいのでそうしない)。

■ 1.2.1.4 テンソル積 2つのテンソル (階数が異なっても良い)

$$S = (S_{ij}), \quad T = (T_{ijk}), \quad (123)$$

に対して、すべての成分の相互の積を成分にもつテンソルをテンソル積と定義する。

$$S \otimes T = (S_{ij} T_{klm}), \quad (124)$$

p 階テンソルと q 階テンソルのテンソル積は $p+q$ 階テンソルになる。

記号として、積記号を省略して単に ST と書く場合もある。しかし、それは行列としての積と紛らわしいので、本講義では必ず $\otimes$ を用いることにする。

物理学で登場するものには、たとえば、流体力学における運動量流束テンソル

$$\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (125)$$

(ただし物理学では $\otimes$ を省略して $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ と書いてしまうことの方が多い) だとか、電磁流体力学における Maxwell 応力テンソル

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\underline{\underline{B}} \otimes \underline{\underline{B}} - \frac{1}{2} B^2 \underline{\underline{I}} \right) \quad (126)$$

(SI 単位系の場合) などがある。

テンソル積は、座標に依存しない形で定義することもできる。テンソルを2つのベクトルからスカラーへの線形写像という形 (33) で定義するとき、たとえばベクトル a とベクトル b のテンソル積は

$$(a \otimes b)(u, v) = (a \cdot u)(b \cdot v) \quad (127)$$

と定義できる。このテンソルの成分は確かに

$$(a \otimes b)_{ij} = (a \otimes b)(e_i, e_j) = (a \cdot e_i)(b \cdot e_j) = a_i b_j \quad (128)$$

となって、先の成分による定義と一致する。

このテンソル積の便利な利用法として、テンソルの基底の表現がある。たとえば、2階テンソルは

$$T = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (129)$$

のように表現できる。すなわち、基底は $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ のように表せる。実際、テンソルを2つのベクトルからスカラーへの線形写像という形 (33) で定義するとき、上の T を用いれば

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^3 u_i T_{ij} v_j \quad (130)$$

となり、先の (41) と一致する。

■ 1.2.1.5 ベクトルの外積

1.2.1.5.1 外積の定義 2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の外積 (ベクトル積、クロス積) は、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (131)$$

という成分を持つベクトルとして定義される。3階のテンソルを2つのベクトルからベクトルへの線形写像と定義すると、Levi-Civita の完全反対称テンソル ϵ_{ijk} が外積を表すテンソルということになる。外積は、形式的には、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (132)$$

と行列式の形に表しておく覚えやすい。

外積には反対称性

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (133)$$

と双線形性

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{分配法則}) \quad (134)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (\text{分配法則}) \quad (135)$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (136)$$

がある。さらに、式 (133) において $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ とすることで、ただちに

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (137)$$

が導かれる。

特に基底に対しては

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \quad (138)$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (139)$$

が成り立つ。

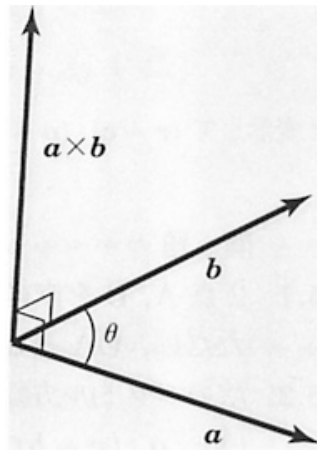


図5 ベクトルの外積

1.2.1.5.2 ベクトルの外積の幾何学的な意味 2つのベクトル a と b がともに零ベクトルでないとし、それらのなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする (図5)。すると、 $a \times b$ は a と b の両方に直交する長さ $|a||b|\sin\theta$ のベクトルである。この長さは、ベクトル a と b がなす平行四辺形の面積を表している。 a を右手の親指の方向に、 b を人差指の方向にあわせたとき、 $a \times b$ は中指の方向である。このことを $a, b, a \times b$ は右手系であると表現する。

[問題 7] 外積の定義から、上の幾何学的意味が成り立つことを示せ。

a と b が平行であるのは $\theta = 0$ または π のときであるから

$$a \text{ と } b \text{ が平行} \Leftrightarrow a \times b = 0 \quad (140)$$

1.2.1.5.3 ベクトルの外積の物理学への応用 物理学では、外積はいろいろな場面で現れる。一つだけ例を挙げると、質点の力学では、角運動量が

$$L = r \times p \quad (141)$$

のように、位置ベクトル r と運動量 p の外積としてあらわされる。

■ 1.2.1.6 3重積 2種類の3重積と呼ばれるものが出てくることがある。

1.2.1.6.1 スカラー3重積 ベクトル a, b, c に対し、

$$|a \ b \ c| = a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) \quad (142)$$

をスカラー3重積とよぶ。ベクトルを成分で表すと

$$|a \ b \ c| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (143)$$

のように行列式で書ける。

幾何学的には、スカラー3重積は、ベクトル a, b, c で張られる平行六面体の (符号付きの) 体積になる (図6)。符号は a, b, c が右手系をなす場合は正、左手系の場合は負になる。実際、図6において b

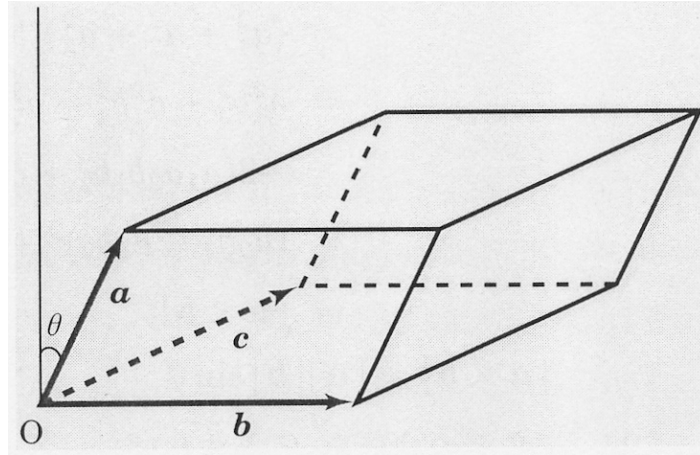


図6 スカラー3重積

と c で張られる平行四辺形の面積は $|b \times c|$ であり、この平行四辺形を底面とみたときの平行六面体の高さは $|a| \cos \theta$ であるから、体積 V は

$$V = |a| |b \times c| \cos \theta = |a \cdot (b \times c)| \quad (144)$$

となる。

1.2.1.6.2 ベクトル3重積 ベクトル a, b, c に対し、 $a \times (b \times c)$ や $(a \times b) \times c$ をベクトル3重積という。一般に $a \times (b \times c)$ と $(a \times b) \times c$ は異なる。ベクトル3重積については次の関係式が成り立つ。

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (145)$$

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a \quad (146)$$

■1.2.1.7 くさび積 ふつう物理学の教科書で出てくる積は、以上のものだけで十分なのだが、外積の類似品として「くさび積」を紹介しておくことにする。数学的には、外積と実質的に同じだが、外積よりもスマートな量である。先に定義した外積は、次元が高い場合に直接拡張できないという欠点がある。それに対して、くさび積は自然に多次元に拡張できる（しかし、ここではそのことは説明せず、3次元の場合に話を限る）。さらに、以下で見るように、くさび積は、面積を表す外積と体積を表すスカラー3重積とを統一的に表現できる。

1.2.1.7.1 2つのベクトルのくさび積 外積は、2つのベクトルの双線形で反対称な線型関数であった。そこで素直に、2つのベクトル a, b からスカラーへの双線形写像としての2階テンソルを以下のように定義する。

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a \quad (147)$$

これがくさび積（ウェッジ積、交代積、あるいはこれを 外積 と呼ぶこともある）である。定義を言葉で言えば、2つのベクトルのテンソル積を反対称化したものということになる。成分を書き下してみると

$$a \wedge b = \sum_{i,j=1}^3 (a_i b_j - b_i a_j) e_i \otimes e_j = \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 - b_1 a_2 & a_1 b_3 - b_1 a_3 \\ a_2 b_1 - b_2 a_1 & 0 & a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 & a_3 b_2 - b_3 a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (148)$$

となる。外積ベクトルの成分が現れているから、外積と本質的には同じものであることが分かる。

2つのベクトルのくさび積、あるいは一般に2階反対称テンソルの基底は

$$e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = \underline{0} \quad (149)$$

$$e_2 \wedge e_3 = -e_3 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (150)$$

$$e_3 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (151)$$

$$e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (152)$$

となり、独立なものは3つである。

このくさび積と外積との関係は (148) から明らかではあるが、形式的には 1.1.2.9.3 で定義された星印作用素を用いて表現できる。

$$(*(\mathbf{a} \times \mathbf{b}))_{ij} = \sum_{k,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} a_l b_m = \sum_{l,m=1}^3 (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_l b_m = a_i b_j - a_j b_i = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{ij} \quad (153)$$

なので、

$$*(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (154)$$

と書くことができる。逆に、

$$(*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}))_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} (a_j b_k - b_j a_k) = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i \quad (155)$$

なので、

$$*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (156)$$

と書くことができる。このように、外積は星印作用素でくさび積に関係づけられる。

外積と同様、くさび積には

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq \underline{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \text{ と } \mathbf{b} \text{ は線型独立} \quad (157)$$

という性質がある。

[問題 8] 2つのベクトルのくさび積どうしの内積に次の関係があることを示せ。

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) : (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix} \quad (158)$$

なお、右辺の $|\cdot|$ は行列式である。同じことを外積を用いて書けば、

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix} \quad (159)$$

となる。

1.2.1.7.2 3つのベクトルのくさび積 3つのベクトルのくさび積は、3つのベクトルのテンソル積を完全反対称化したものである。したがって、

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (160)$$

と書ける。成分を書き下してみると

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})_{ijk} = a_i b_j c_k + b_i c_j a_k + c_i a_j b_k - a_i c_j b_k - b_i a_j c_k - c_i b_j a_k \quad (161)$$

$$= \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \quad (162)$$

$$= \epsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (163)$$

である。これは、本質的にスカラー3重積と同じものである。

零テンソルでない基底は、

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \quad (164)$$

$$= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \quad (165)$$

$$= (\epsilon_{ijk}) \quad (166)$$

で、独立なものは1つである。これは、3階完全反対称テンソルの基底でもある。

このくさび積とスカラー3重積との関係は、1.1.2.9.3で定義された星印作用素を用いて表現できる。

$$(*(|\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}|))_{ijk} = \epsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})_{ijk} \quad (167)$$

なので、

$$* (|\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}|) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad (168)$$

と書くことができる。逆に

$$*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = |\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}| \quad (169)$$

となる。このように、スカラー3重積は星印作用素でウェッジ積に関係づけられる。

スカラー3重積と同様、くさび積には

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \neq \underline{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{は線型独立} \quad (170)$$

という性質がある。

1.2.2 2階テンソルの主値、固有値、不変量

■ 1.2.2.1 応力テンソルと主応力 前にすでに応力テンソルの関係した話題を出しているが、改めて応力テンソルを簡単に復習しておこう。連続体力学では、面積力を考える必要があって、それを表現する応力ベクトル (単位面積当たりの力) σ を導入する。次に、応力ベクトルが法線ベクトル n に依存することが示されて、依存の仕方が

$$\sigma_i(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \quad (171)$$

のように表される。これは、法線ベクトルから応力ベクトルへの線形写像の形をしているので、この (σ_{ij}) の組を応力テンソルと呼び、各 σ_{ij} を応力テンソルの成分と呼んだのであった。応力テンソルは通常対称テンソルである。

[注意] 応力テンソルの定義の仕方によっては、

$$\sigma_i(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji} \quad (172)$$

と書くこともある。本講義では (171) の定義を用いることにする。しかし、応力テンソルは普通は対称テンソルなので、実質的にはどちらの定義を用いても同じことになる。

さて、応力テンソルは図示するのが難しい。すこしでも分かりやすくする可能性として回転座標変換で簡単な形にする手はないかと考えてみる。回転座標変換によって応力テンソルの成分は

$$\sigma'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} R_{jl} \sigma_{kl} \quad (173)$$

のように変化するのであった。これを行列の形で書くと

$$\sigma' = R \cdot \sigma \cdot R^{-1} \quad (174)$$

と書ける。一方、線形代数で習った (はず) の知識によれば、実対称行列は直交行列によって対角化できるのであった。上の回転座標変換の式はちょうどそのような形をしているから、 σ' を対角行列の形に出来る回転座標変換 R を必ず見出すことができる。

そのような座標変換の結果得られた新しい座標軸を応力の主軸、応力の成分を主応力と呼ぶ。これによって応力をわかりやすく図示することができる。

歪テンソルも2階の対称テンソルだから同様の操作で歪の主軸と主歪を求めることができる。これも地球科学 (測地学や構造地質学) で良く使われる。

■ 1.2.2.2 2階テンソルの主値、固有値 2階対称テンソルでは、上で見たように、回転座標変換によって、テンソルは対角形になる。そのときの座標軸を主軸、成分を主値と呼ぶ。

線形代数の知識によれば、主軸や主値を求めるには、テンソルを行列として扱ってその固有値と固有ベクトルを求めればよい。テンソルが対称テンソルでなければ、回転座標変換によっては対角化できな

いけれども、行列として固有値と固有ベクトルは求めることができる。それを2階テンソルの固有値、固有ベクトルと呼ぶ。ここでは触れないが、対称テンソルでなくても固有値、固有ベクトルが有用なことがあるので、対称テンソルに限定せずに話を進める。

[問題 9] 2階対称テンソル

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (175)$$

の主値、および主軸を与える回転行列 R を求めよ。

テンソル A の固有ベクトルは、 0 でないベクトル p で

$$A \cdot p = \lambda p \quad (176)$$

を満たすものであり、 λ を固有値と呼ぶ。この式を書き直すと

$$(A - \lambda I) \cdot p = \sum_{i=1}^3 p_i (A - \lambda I) \cdot e_i = 0 \quad (177)$$

となる。このことは、3つのベクトル $(A - \lambda I) \cdot e_i$, ($i = 1, 2, 3$) が独立でないことを示している。したがって、

$$[(A - \lambda I) \cdot e_1] \wedge [(A - \lambda I) \cdot e_2] \wedge [(A - \lambda I) \cdot e_3] = 0 \quad (178)$$

である (もちろんこのことはスカラー3重積を使っても表現できるが、ここではウエッジ積を使ってみた)。これを展開すると、

$$\begin{aligned} & \lambda^3 (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \\ & - \lambda^2 [(A \cdot e_1) \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge (A \cdot e_2) \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge (A \cdot e_3)] \\ & + \lambda [e_1 \wedge (A \cdot e_2) \wedge (A \cdot e_3) + (A \cdot e_1) \wedge e_2 \wedge (A \cdot e_3) + (A \cdot e_1) \wedge (A \cdot e_2) \wedge e_3] \\ & - [(A \cdot e_1) \wedge (A \cdot e_2) \wedge (A \cdot e_3)] = 0 \end{aligned} \quad (179)$$

となる。3つのベクトルのウエッジ積の基底で独立なものは1つだけ ($e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$) だったから、ここに出てきている係数は必ず

$$\begin{aligned} & (A \cdot e_1) \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge (A \cdot e_2) \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge (A \cdot e_3) \\ & = I_A [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] \end{aligned} \quad (180)$$

$$\begin{aligned} & e_1 \wedge (A \cdot e_2) \wedge (A \cdot e_3) + (A \cdot e_1) \wedge e_2 \wedge (A \cdot e_3) + (A \cdot e_1) \wedge (A \cdot e_2) \wedge e_3 \\ & = II_A [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] \end{aligned} \quad (181)$$

$$(A \cdot e_1) \wedge (A \cdot e_2) \wedge (A \cdot e_3) = III_A [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] \quad (182)$$

のように書けるはずである。ただし、 I_A, II_A, III_A は数で、それぞれテンソル A の第一不変量、第二不変量、第三不変量と呼ばれる。こう書くと、先の式 (179) は、

$$\lambda^3 - I_A \lambda^2 + II_A \lambda - III_A = 0 \quad (183)$$

と書きなおすことができる。これが固有方程式である。行列の線形代数の知識からわかるように、固有値や固有方程式は座標系に依存しないはずのものなので、ここに出てくる係数は座標変換によって変わ

らない。そこで、 I_A, II_A, III_A は不変量と呼んで良いことになる。念のため、これらが本当に不変量 (ここでは、回転座標変換に対して変わらないスカラーであるということ) であることをあとで直接確かめる。

■ 1.2.2.3 2 階テンソルの不変量その 1 さて、上で出てきた 3 つの不変量を具体的に成分で表してみる。まず、

$$A = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (184)$$

であることに注意すると、第一不変量は

$$\begin{aligned} & (A \cdot \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \wedge (A \cdot \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge (A \cdot \mathbf{e}_3) \\ &= \left(\sum_{i=1}^3 A_{i1} \mathbf{e}_i \right) \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \wedge \left(\sum_{i=1}^3 A_{i2} \mathbf{e}_i \right) \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \left(\sum_{i=1}^3 A_{i3} \mathbf{e}_i \right) \\ &= A_{11}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + A_{22}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + A_{33}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= (A_{11} + A_{22} + A_{33})(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (185)$$

より

$$I_A = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \sum_{i=1}^3 A_{ii} = \text{tr} A \quad (186)$$

と書くことができる。行列用語に倣って、これはテンソル A のトレース (跡 (せき)) と呼ばれる。第二不変量は

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1 \wedge (A \cdot \mathbf{e}_2) \wedge (A \cdot \mathbf{e}_3) + (A \cdot \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_2 \wedge (A \cdot \mathbf{e}_3) + (A \cdot \mathbf{e}_1) \wedge (A \cdot \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_1 \wedge \left(\sum_{i=1}^3 A_{i2} \mathbf{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 A_{j3} \mathbf{e}_j \right) + \left(\sum_{j=1}^3 A_{j1} \mathbf{e}_j \right) \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \left(\sum_{i=1}^3 A_{i3} \mathbf{e}_i \right) \\ & \quad + \left(\sum_{i=1}^3 A_{i1} \mathbf{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 A_{j2} \mathbf{e}_j \right) \wedge \mathbf{e}_3 \\ &= (A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23})(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + (A_{11}A_{33} - A_{31}A_{13})(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ & \quad + (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= (A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{33}A_{11} - A_{12}A_{21} - A_{23}A_{32} - A_{31}A_{13})(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (187)$$

より

$$\begin{aligned} II_A &= A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{33}A_{11} - A_{12}A_{21} - A_{23}A_{32} - A_{31}A_{13} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^3 A_{ii} \right)^2 - \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}A_{ji} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[I_A^2 - \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}A_{ji} \right] \end{aligned} \quad (188)$$

と書くことができる。第三不変量は

$$\begin{aligned}
 & (A \cdot \mathbf{e}_1) \wedge (A \cdot \mathbf{e}_2) \wedge (A \cdot \mathbf{e}_3) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^3 A_{i1} \mathbf{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 A_{j2} \mathbf{e}_j \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^3 A_{k3} \mathbf{e}_k \right) \\
 &= \left(\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \right) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)
 \end{aligned} \tag{189}$$

より

$$III_A = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \det A \tag{190}$$

と書くことができる。行列用語に倣って、これはテンソル A の行列式と呼ばれる。

これらの不変量が回転座標変換に依存しないことを直接確かめよう。回転座標変換

$$A'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} R_{jl} A_{kl} \tag{191}$$

に対して、第一不変量、第二不変量は

$$I'_A = \sum_{i=1}^3 A'_{ii} = \sum_{i,k,l=1}^3 R_{ik} R_{il} A_{kl} = \sum_{k,l=1}^3 \delta_{kl} A_{kl} = \sum_{k=1}^3 A_{kk} = I_A \tag{192}$$

$$\begin{aligned}
 II'_A &= \frac{1}{2} \left[I'^2_A - \sum_{i,j=1}^3 A'_{ij} A'_{ji} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[I_A^2 - \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^3 R_{ik} R_{jl} A_{kl} R_{jm} R_{in} A_{mn} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[I_A^2 - \sum_{k,l,m,n=1}^3 \delta_{kn} \delta_{lm} A_{kl} A_{mn} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[I_A^2 - \sum_{m,n=1}^3 A_{nm} A_{mn} \right] \\
 &= II_A
 \end{aligned} \tag{193}$$

となるので、不変量であることが確かめられた。第三不変量に関しては、行列式の積公式

$$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) \tag{194}$$

と、座標変換が行列の形で

$$A' = R \cdot A \cdot R^{-1} \tag{195}$$

と書けるということから

$$III'_A = \det A' = \det R \cdot A \cdot R^{-1} = \det A = III_A \quad (196)$$

となり、不変量であることが確かめられた。

最後に、特殊な形をしたテンソルに対して、3つの不変量の形を求めておこう

対角行列の形のテンソル

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (197)$$

のとき、

$$I_A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (198)$$

$$II_A = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \quad (199)$$

$$III_A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (200)$$

トレースが0の対称テンソル 偏差応力 τ のような場合、

$$I_\tau = 0 \quad (201)$$

$$II_\tau = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} \tau_{ij} = -|\tau|^2 \quad (202)$$

$$III_A = \det \tau \quad (203)$$

■ 1.2.2.4 2階テンソルの不変量その2 上で出てきた不変量の代わりに、2階テンソル A の不変量として以下の組が使われることもある。

$$J_{A1} = \text{tr} A = \sum_{i=1}^3 A_{ii} \quad (204)$$

$$J_{A2} = \frac{1}{2} \text{tr} A^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} A_{ji} \quad (205)$$

$$J_{A3} = \frac{1}{3} \text{tr} A^3 = \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^3 A_{ij} A_{jk} A_{ki} \quad (206)$$

ここで、 A のべき乗は、行列としてのべき乗を表す。 J_{A1}, J_{A2}, J_{A3} が不変量であることは、行列のトレースで定義されていることから明らかである。

先に求めた不変量との関係は

$$I_A = J_{A1} \quad (207)$$

$$II_A = \frac{1}{2} (J_{A1}^2 - J_{A2}) \quad (208)$$

$$III_A = \frac{1}{6} J_{A1}^3 - J_{A1} J_{A2} + J_{A3} \quad (209)$$

となる。

[問題 10] ケーリー・ハミルトンの定理を用いて、式 (209) を導け。

■1.2.2.5 不変量の物理学への応用 塑性理論では、等方的な物質の降伏条件を表現するのに偏差応力の不変量を組み合わせたものが用いられる。

参考書、参考 web pages

H. フランダース (1967) 微分形式の理論、岩波書店

P. チャドウィック (1979) 連続体力学、ブレイン図書出版

田代嘉宏 (1981) テンソル解析 (基礎数学選書 23)、培風館

シュッツ (1987) 物理学における幾何学的方法 (物理学叢書 53)、吉岡書店

吉田総仁 (1997) 弾塑性力学の基礎、共立出版

Introduction to Elasticity/Tensors,

http://en.wikiversity.org/wiki/Introduction_to_Elasticity/Tensors

もしくは http://www.thefullwiki.org/Introduction_to_Elasticity/Tensors

今年のレポート問題：本文中の問題 4、8、9

提出締切：4 月 27 日 (水)

提出先：地惑事務室