目 次

第1章　ベクトル・テンソル解析

皆さんの大部分は、すでにベクトル・テンソル解析の基礎的なところはすでに学部で習得していると思う。そこでここでは、ベクトルやテンソルが出てくる論理を、物理学や幾何学と関係させながら改めて整理する。ここで考えるのは３次元ユークリッド空間に限ることにする。本日第１回目の講義では、座標系はデカルト座標に限る。次回は、そうではない座標系の取り扱いも少しある。

1.1　ベクトルとテンソル

1.1.1　ベクトルとは何だろうか？〜ベクトルが備えているべき性質

1.1.1.1　ベクトルは矢印〜ベクトルの成分の座標変換

まず、ベクトルとは何かを改めて考えてみよう。ベクトルは基本的には「矢印」である。力学においても、基本的には、位置を表す矢印（位置ベクトル）とか力のベクトルなどが基本的な量で、図に描くときは矢印で表す。

座標系を決めると、ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

というふうに成分で書くことができる。その意味では、ベクトルは３つの数字の組であるとも言える。しかし、「矢印」は単なる数字の組ではない。それは座標系を変えてみると分かる（下の問題の図参照）座標系を変えると、矢印は変わらなくても数字の組は変わるということで、いわば「矢印」であることが真の姿、成分は仮の姿である。

してみると、座標変換に対してどのように変換するかということが、ベクトルが単なる数字の組ではないことを示すメルクマールになる。今回の講義では、長さの尺度の決まったデカルト座標系しか考えない。必要なときには座標軸を (x, y, z) や (x_1, x_2, x_3) と書く。座標変換としては、デカルト座標系の間の変換だけを考え、座標系の平行移動も考えないことにする（原点は固定する）。そうすると考えるべき座標変換は回転だけである（回転以外の座標変換を考えると道具立てが複雑になるので、今回は回転座標変換に留めるような条件を付けた）。

回転座標変換を表す行列を

$$R = (R_{ij}) \tag{2}$$

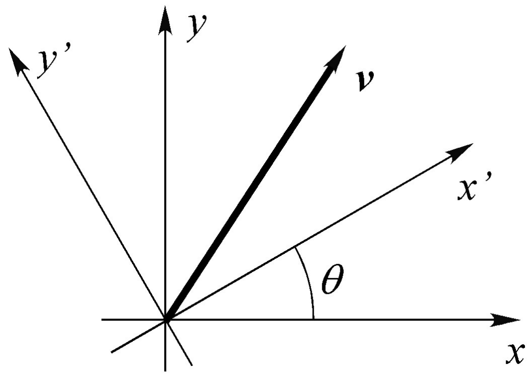

図 1.1: 問題：ベクトルに対する座標の回転

と書くことにする。すなわち、ベクトルの成分が回転座標変換に対して

$$v'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} v_j \tag{3}$$

のように変換されるものとする。

座標変換で矢印そのものは変わらないから、内積（この講義では後の 1.1.3.1 節で出てくるが、皆さん既知としても良いだろう）は回転しても変わらない。そこで、任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{3} u'_i v'_i = \sum_{i,j,k=1}^{3} R_{ij} R_{ik} u_j v_k = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \tag{4}$$

が成り立たなければならない。このためには

$$\sum_{i=1}^{3} R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk} \tag{5}$$

となっていることが必要十分である (式 (5) から式 (4) を導くのは単純。逆に式 (4) から式 (5) を導くには、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ として座標軸方向の単位ベクトルを選ぶと良い)。ここで、δ_{ij} は **Kronecker のデルタ**と呼ばれる記号で

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{6}$$

で定義されている。この座標変換の行列 R のように、

$$(R^{-1})_{ij} = R_{ji} \tag{7}$$

という性質をもつ行列を**回転行列（直交行列）**と呼ぶ。

[問題 1] 図 1.1 のような 2 次元の座標の回転に対する回転行列を求めよ。今の回転の定義では、矢印はそのままで、それを記述する座標系が変わったと考える。

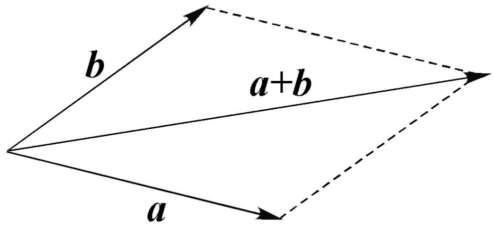

図 1.2: ベクトルの和

1.1.1.2 ベクトル空間～ベクトルの足し算と定数倍

ベクトルは、足し算が出来たり、定数倍が出来たりしないと困る。力学では、２つの力が加わった時、全体ではどのような力が働いたことになるかとか、力を２倍にしたらどうなるか、といった問題に答えられないといけないからである。

高校生でも知っている通り、ベクトルの和は、２つの矢印の原点をそろえて書くと、２つの矢印が作る平行四辺形の対角線に向かう矢印になる（図 1.2)。成分で言えば、成分ごとの足し算ということになる。これで和が定義できている。

定数倍の方は、矢印で言えば、方向が同じで２倍の長さにすることであり、成分で言えば、全部の成分にその定数をかけることである。

数学の枠組みでは集合で考えないといけないから、そのような和や定数倍が定義されたベクトル全体の集合を考えて、それを**ベクトル空間**（**線形空間**）と呼ぶ。

1.1.1.3 ベクトルの基底～ベクトルに対する線形演算の表し方と基底の座標変換

ベクトルを成分を使って表すということは、別の表現法では、座標軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i \tag{8}$$

と書くということでもある。このような単位ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を**基底**（あるいは **基本ベクトル**）という（正確には、これは基底の一種で、**正規直交基底**という)。

こう書くことの利点は２つくらいある。

ひとつは、ベクトルに対する線形演算は、基底に対する演算の結果がわかっていればすべてわかるということである。なぜなら、線形演算を T と書くと、T の線形性から

$$T(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{3} v_i T(\boldsymbol{e}_i) \tag{9}$$

と書けるからである。

もうひとつは、ベクトルの実体が矢印であって、成分の方がみかけのものであるということが陽に表現されていることにある。たとえば、座標変換に際して、矢印そのものは変わらないけれども成分は変わるということを

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} v'_i \boldsymbol{e}'_i \tag{10}$$

というふうに表現することができる。座標変換に対して成分が

$$v_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} v_j \tag{11}$$

と変換されるときに、基底は

$$\boldsymbol{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j (R^{-1})_{ji} \tag{12}$$

と変換される（これは回転座標変換でなくても成立する。線形代数ですでに勉強していると思うが、以下に問題としておいた。)。今考えているのは回転座標変換なので、

$$\boldsymbol{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} \boldsymbol{e}_j \tag{13}$$

とも書くことができる。

[問題 2] ベクトルの成分が座標変換によって式 (11) のように変換されるとき、基底は式 (12) のように変換されることを示せ。ただし、ここでは R_{ij} は回転変換に限らないものとする。

ふたたび後述の内積を先取りして使ってしまうと、式 (13) から、座標変換行列の成分は、変換前後の基底を用いて

$$R_{ij} = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{14}$$

と書けることも分かる。

1.1.1.4 [参考] ベクトル空間としての関数空間

ベクトル空間（線形空間）という概念は「矢印」を超えて拡張できる。数学では、「矢印」のような具体的なイメージのあるものを用いてものごとを定義することは、拡張性が制限されることになるので嫌われる。そこで、和と定数倍が定義できて、内積だとか座標変換が考えられるということだけを抽象的にベクトル空間の定義として用いる（正確に言えば、内積が定義されるベクトル空間のことを**内積空間**という、という言い方をしないといけないけれど)。

そのようにすれば、たとえば、関数もベクトルだと考えることもできることになる（詳しくは、関数解析の教科書を参照すること）。本講義でも、第 2 章の 1 回目でそのような考え方が出てくる。関数にも和やスカラー倍が定義できるし、内積とか座標変換も考えられる。関数が作るベクトル空間を関数空間と言う。

そういう考え方の下では、フーリエ変換の式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \tag{15}$$

は、$f(x)$ がベクトルで、$e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ が基底、$\tilde{f}(k)$ がその基底に対する成分であるというふうに見ることができる。あるいは、この式は x 空間と k 空間の間の座標変換の式だと見ることもできる。

1.1.2　テンソルとは何だろうか？

テンソルとは、数学的にはどういう量であるべきだろうか？浸透率テンソルを例にして考えてみよう。

1.1.2.1　浸透流と浸透率

浸透流の話はお馴染でないかもしれないが、地下水の流れを記述するのに良く使われる。ここは流体力学の講義ではないので、あまり細かい定義や内容には触れずにおおざっぱな雰囲気で導入してみる。地下水の流れは、水を押す力である圧力勾配に比例すると考える。

$$\boldsymbol{q} \propto \nabla p \tag{16}$$

ここで、$\boldsymbol{q}$ は流れ（正確な定義は省略する）、∇p は圧力勾配（勾配 grad は次回にやるけれども、皆さん知っているでしょう）である。その比例係数を $-K/\mu$ として

$$\boldsymbol{q} = -\frac{K}{\mu}\nabla p \tag{17}$$

のように書く（Darcy の法則）。マイナス符号は、圧力が高い方から低い方に地下水が流れることから付けた。ここで、K は浸透率と呼ばれる量で、土や砂の中を流体（地下水）が通る時の通りやすさを表す。μ は流体（地下水）の粘性率である。つまり、K は媒質（土や砂）の通りやすさ、μ は中を通る流体の流れにくさを表す。

[参考] **電磁気学が得意な人へ** 浸透流より電磁気学の方に馴染みがある人にとっては、オームの法則

$$\boldsymbol{J} = -\sigma\nabla\phi \tag{18}$$

が上の Darcy の法則とほぼパラレルな法則なので、こちらで考えても良い。ここで、$\boldsymbol{J}$ は電流密度で、浸透流の $\boldsymbol{q}$ に対応し、σ は電気伝導度で、浸透流の K に対応し、ϕ は電位で、浸透流の p/μ に対応する。

1.1.2.2　浸透率テンソル

ところで、土や岩が層構造をしていたり、断層があったりすると、単純な比例関係ではたぶんいけない。というのは、断層があったりすると、そちらの方向に水が通りやすいだろうから、押した方向に対して斜めの方向に水が出てきたりするだろうからだ。

このときは、もうちょっと一般的な比例関係ということで、方向性は問わないけれども線型性があるということを要請する。すなわち、

$$\boldsymbol{q} = K(\boldsymbol{f}) \tag{19}$$

ただし

$$\boldsymbol{f} = -\frac{1}{\mu}\nabla p \tag{20}$$

と書いて、水の通りやすさを表す関数 K が線型性を持っていることを要請する。すなわち、

$$K(\lambda \boldsymbol{f}) = \lambda K(\boldsymbol{f}) \tag{21}$$

$$K(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = K(\boldsymbol{f}_1) + K(\boldsymbol{f}_2) \tag{22}$$

が成り立つものとする。上の式は、圧力勾配が 2 倍になれば流れも 2 倍になるということで、自然である。下の式は、たとえば、圧力勾配を x 方向と y 方向に分解しておいて、それぞれの圧力勾配による流れを足すと全体の流れを求めることができるということで、これもまた自然である。このとき、この線型関数 K を**浸透率テンソル**と呼ぶ。

次に、線型性の帰結を成分で書くために、ベクトル $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{f}$ とを基底で表現して

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{e}_i \tag{23}$$

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{3} f_i \boldsymbol{e}_i \tag{24}$$

と書くことにする。そうすると、

$$\sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{e}_i = K(\sum_{i=1}^{3} f_i \boldsymbol{e}_i) \tag{25}$$

となる。右辺に K の線形性を用いると

$$\sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} f_i K(\boldsymbol{e}_i) \tag{26}$$

と書くことができる。さらに、$K(\boldsymbol{e}_i)$ は一つのベクトルだから

$$K(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j K_{ji} \tag{27}$$

と書くことが出来て

$$\sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j K_{ji} f_i \tag{28}$$

と書き直せる。両辺の成分を比べると

$$q_i = \sum_{j=1}^{3} K_{ij} f_j \tag{29}$$

となる。このようにして、浸透率テンソルは行列の形 K_{ij} で書けることが分かった。これを浸透率テンソルの成分という。

[参考] 電磁気学が得意な人へ オームの法則で言えば、同様の議論から電気伝導度テンソルを考えることができる。

$$J_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} E_j \tag{30}$$

ここで、$\boldsymbol{E}$ は電場ベクトル、σ_{ij} が電気伝導度テンソルの成分である。電離層の話でよく出てくる形では、z 軸を磁場の方向にとって、

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_P & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{31}$$

と書く。σ_P をペダーセン伝導度、σ_H をホール伝導度、σ_0 を平行伝導度と呼ぶ。

1.1.2.3　テンソルの定義〜線形写像その１

上でやったことを一般化して、**（２階の）テンソル**はベクトルからベクトルへの線形写像であると定義できる。この意味でのテンソルを T と表す。

$$\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{u}) \tag{32}$$

テンソルの成分は

$$T(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j T_{ji} \tag{33}$$

もしくは内積（この講義では後の 1.1.3.1 節で出てくるが、皆さん既知としても良いだろう）を使って

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T(\boldsymbol{e}_j) \tag{34}$$

から定義できて、1.1.2.2 節でやったのと同じことをすれば

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} u_j \tag{35}$$

と書くことができる。

とくに

$$I(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \tag{36}$$

（恒等写像）となるテンソルを**恒等テンソル**という。成分で書けば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \tag{37}$$

となる。

1.1.2.4　テンソルの定義〜線形写像その２

テンソルの定義は、上で述べたものに限らない。写像を使った定義としては、２階のテンソルを、２つのベクトルからスカラーへの双線形写像と定義するやり方もある（スカラーとは、回転座標変換によって変わらない量のことである。1.1.2.8 節参照)。すなわち、

$$s = T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \tag{38}$$

として、双線型性

$$T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v})+T(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}) \tag{39}$$

$$T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1)+T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_2) \tag{40}$$

$$T(\lambda\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u},\lambda\boldsymbol{v})=\lambda T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{41}$$

を要請する。ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{e}_i \tag{42}$$

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i\boldsymbol{e}_i \tag{43}$$

とすると、双線型性から

$$s=\sum_{i,j=1}^{3} u_i T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)v_j \tag{44}$$

となる。ここで、

$$T_{ij}=T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) \tag{45}$$

と定義すれば

$$s=\sum_{i,j=1}^{3} u_i T_{ij} v_j \tag{46}$$

と書くことができる。

この定義 (38) と、先の定義 (32) とはどのような関係になるのだろうか？(38) で定義された T からベクトルからベクトルへの線形写像

$$\tilde{T}(\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{3} T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_i \tag{47}$$

を構成することができる。このテンソル $\tilde{T}$ の成分は、式 (34)、(47)、(45) を順に用いてゆくと

$$\tilde{T}_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\tilde{T}(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i\cdot\sum_{k=1}^{3} T(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k=T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=T_{ij} \tag{48}$$

となって、ちょうど T の成分と一致する。逆に (32) で定義された $\tilde{T}$ から、２つのベクトルからスカラーへの双線形写像

$$T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\tilde{T}(\boldsymbol{v}) \tag{49}$$

を構成することができる。このテンソル T の成分は

$$T_{ij}=T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i\cdot\tilde{T}(\boldsymbol{e}_j)=\tilde{T}_{ij} \tag{50}$$

となって、やはり $\tilde{T}$ の成分と一致する。こうして、定義 (38) と定義 (32) とは一対一に対応していることが分かる。そこで、場合に応じて便利な方の定義を用いればよいことになる。

さらに今までのことを拡張して容易に高階のテンソルを定義できる。たとえば、４階テンソルの一つの定義の仕方は、２階テンソルから２階テンソルへの線形写像である。実際、たとえば、弾性率テンソル（４階テンソル）は、歪テンソル（２階テンソル）から応力テンソル（２階テンソル）への線形関数である。

1.1.2.5　テンソルを表す記号

ベクトルは、よく太字で $\boldsymbol{v}$ のように表したり、上に矢印を付けて $\vec{v}$ のように表したりする。文字の下に～を付けて $\underset{\sim}{v}$ と書く人もいる。それに比べると、テンソルはあまり決まった表し方が無くて、$T, \boldsymbol{T}, \mathbf{T}, \mathsf{T}$ のように表したりする。しかし、それではテンソルの階数を表現できない。テンソルの階数を含んだ表し方としては、ベクトル（1 階のテンソル）を $\underline{v}$、2 階のテンソルは $\underline{\underline{T}}$、3 階のテンソルは $\underline{\underline{\underline{T}}}$ のようにするやり方がある。

本講義では、わかりやすさや便利さや気分によってこれらを混ぜて用いるので、注意されたい。テキストでは、ベクトルには主として太字 $\boldsymbol{v}$ を用い、テンソルには T, T や下線を用いた表現を用いる。黒板では太字が書きづらいので、上に矢印を付けた $\vec{v}$ も用いるかもしれない。

1.1.2.6　テンソルの足し算と引き算と定数倍

テンソルに対して足し算、引き算、定数倍を定義する。テンソルは写像なので自然な定義は、関数の和、差、定数倍と同じように定義すればよい。

(32) で定義された 2 階テンソルの場合は

$$(T+S)(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}) + S(\boldsymbol{u}) \tag{51}$$
$$(T-S)(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}) - S(\boldsymbol{u}) \tag{52}$$
$$(\lambda T)(\boldsymbol{u}) = \lambda T(\boldsymbol{u}) \tag{53}$$

となる。成分で書けば

$$(T+S)_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \tag{54}$$
$$(T-S)_{ij} = T_{ij} - S_{ij} \tag{55}$$
$$(\lambda T)_{ij} = \lambda T_{ij} \tag{56}$$

となる。高階テンソルでも同様である。これによってテンソルの作る集合も線型空間（ベクトル空間）になる。

このような演算が必要であることは、たとえば弾性体での応力に関して、2 つの異なるソースの影響を足し算するとか、ソースが 2 倍になったら応力も 2 倍になるとかいったようなことを行うことからわかるであろう。

和に関する単位元（零元）として**零テンソル**がある。それは、どんなベクトル $\boldsymbol{u}$ に対しても

$$O(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \tag{57}$$

となるようなテンソル O のことである。その成分はすべて 0 になる。

1.1.2.7　テンソルと座標変換

ベクトルの時と同様、テンソルであることの特徴は、成分の回転座標変換に対する変化に現れる。浸透率テンソルで考えてみよう。

$$q_i = \sum_{i=1}^{3} K_{ij} f_j \tag{58}$$

回転座標変換によって、ベクトルの成分は

$$q'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} q_j \tag{59}$$

$$f'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} f_j \tag{60}$$

のように変化するのであった。浸透率テンソルは

$$q_i = \sum_{j=1}^{3} K_{ij} f_j \tag{61}$$

$$q'_i = \sum_{j=1}^{3} K'_{ij} f'_j \tag{62}$$

の関係を満たしていなければならないから、(59) と (60) とを (62) に代入して

$$\sum_{j=1}^{3} R_{ij} q_j = \sum_{j,k=1}^{3} K'_{ij} R_{jk} f_k \tag{63}$$

が得られ、これに (61) を代入して

$$\sum_{j,k=1}^{3} R_{ij} K_{jk} f_k = \sum_{j,k=1}^{3} K'_{ij} R_{jk} f_k \tag{64}$$

となっていなければならない。どんなベクトル $\boldsymbol{f}$ に対してもこの関係が成り立つから

$$\sum_{j=1}^{3} R_{ij} K_{jk} = \sum_{j=1}^{3} K'_{ij} R_{jk} \tag{65}$$

が成り立っているはずで、両辺に $(R^{-1})_{kl} = R_{lk}$ をかけて k で和を取ると

$$K'_{il} = \sum_{j,k=1}^{3} R_{ij} R_{lk} K_{jk} \tag{66}$$

が得られる。これが、テンソルの成分の回転座標変換の規則を与える。

[問題 3] z 軸の周りに 180 度回転する座標変換の時に浸透率テンソルはどのように変換されるか計算せよ。得られた結果を図を用いて説明せよ。

1.1.2.8 テンソルの座標変換による定義〜テンソルの古典的定義

上のことは浸透流の性質を使っていないから、浸透率テンソルに限らず、すべてのテンソルで成り立つ。そこで逆に、テンソルを成分の座標変換規則をもって定義することができる。これがテンソルの古典的な定義である。

まず、**ベクトル**は、数の組 (v_i) $(i = 1, 2, 3)$ で、回転座標変換 R_{ij} （直交行列で表される。1.1.1.1 節で断ったように、今回の講義では回転座標変換しか扱わない。）に対して

$$v'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} v_j \tag{67}$$

のように変換されるものである。**（２階）テンソル**は数の組 (T_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3)$ は、同じ座標変換に対して

$$T'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} R_{ik} R_{jl} T_{kl} \tag{68}$$

のように変換されるものである。**３階テンソル** は数の組 (T_{ijk}) $(i, j, k = 1, 2, 3)$ は、同じ座標変換に対して

$$T'_{ijk} = \sum_{l,m.n=1}^{3} R_{il} R_{jm} R_{kn} T_{lmn} \tag{69}$$

のように変換されるものである。以下高階のテンソルも同様である。

ベクトルは、１階のテンソルという言い方もできる。０階のテンソルを**スカラー**と呼ぶ。スカラーは、座標変換に対して変化しない。

[注意] 行列で書けるものは、何でもテンソルというわけではない。たとえば、上の座標変換の行列 (R_{ij}) は、定義からしてテンソルではない。

しかし、このベクトルやテンソルの定義は、数学屋さん的には少し気持ち悪い。というのは、この定義で用いられている「成分」は、1.1.1.1 節でベクトルを説明するときに解説したように、「見かけの量」だからである。言い換えると、定義に現れている数（成分）が座標系に依存している。だから、数学的には成分を使わないで（座標系に依存しない形で）定義したい。それに、上の「注意」で述べたような単なる行列とテンソルの区別も、成分で書くと同じように見えるので紛らわしい。そこで、先のように線形写像で定義しておくのがスマートである。

とはいえ、上のように成分を用いた定義が良い点もある。ひとつは、スカラーやベクトルがテンソルの一種ととらえられることがはっきり分かる点であり、もうひとつは、座標変換が直接出ているので実用的である点である。

本当のことを言えば、ベクトルが矢印で表されるように、テンソルも図を使って表される何かであると言いたい。でも、なかなか図では描けないので、テンソルの定義がいろいろ持って回った感じになっている。図を描こうとすると、地震学でモーメントテンソルを表すのに使う「ビーチボール」くらいなものだが、これもトレース０の対称テンソルでないと使いづらい（「トレース０」「対称テンソル」の意味は後述）。

[問題 4] (45) で定義されたテンソルの成分がテンソルの回転座標変換の法則 (68) を満たすことを示せ。

[問題 5] (x, y) 平面の平面応力で、x 方向への一軸圧縮 $(\sigma_{xx} = -\sigma,$ その他の$\sigma_{ij} = 0)$ の場合に、連続体の中に z 軸を含む平面を考える（図 1.3）。面の法線が x 軸となす角度 θ の関数として、面に働く法線応力 σ_n と剪断応力 τ を表せ。とくに剪断応力が最大となる θ が 45 度であることを確かめよ。

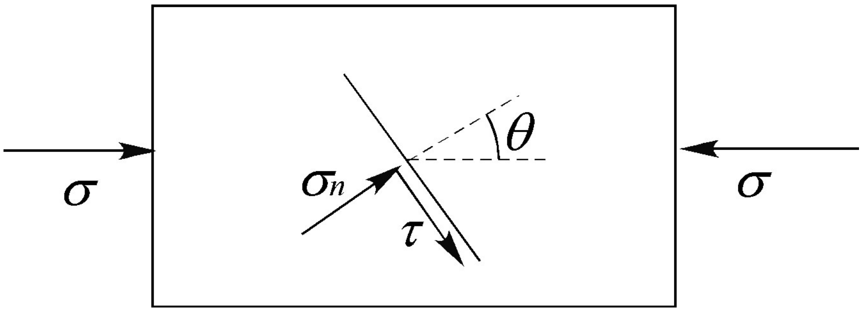

図 1.3: 一軸圧縮の場

1.1.2.9 対称テンソルと反対称テンソル

1.1.2.9.1 対称テンソル 2 階テンソルを成分で書いたときには

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{70}$$

となるとき、あるいは同じことだが、2 階テンソルを 2 つのベクトルからスカラーへの線形写像 (38) と書いたときには

$$T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \tag{71}$$

となるとき、テンソル T は**対称テンソル**であるという。

3 階以上のテンソルに関しては、その成分の任意の 2 つの添字を交換しても変わらないときに**対称テンソル**であるという。

定義としては以上のことだけなのだが、物理学では対称テンソルがしばしばでてきて、後で主値を説明するときに見るように対称テンソル特有の性質が役に立つことがある。対称テンソルの例としては、連続体力学で出てくる応力テンソル（特殊な場合には対称でないこともあるが、通常は対称）や歪テンソル、電磁気学で出てくる Maxwell の応力テンソルなどがある。

1.1.2.9.2 反対称テンソル 2 階テンソルを成分で書いたとき

$$T_{ij} = -T_{ji} \tag{72}$$

となる、あるいは同じことだが、2 つのベクトルからスカラーへの線形写像 (38) と書いたとき

$$T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \tag{73}$$

となるとき、テンソル T は**反対称テンソル**であるという。

3 階以上のテンソルに関しては、その成分の任意の 2 つの添字を交換したときに符号が反転するものを**完全反対称テンソル（交代テンソル）**であるという。

3 階の完全反対称テンソルの最も簡単なもので、よく計算に使われるものに **Levi-Civita の完全反対称テンソル**と呼ばれるものがある。それは

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (1,3,2),(3,2,1),(2,1,3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{74}$$

と定義される。ϵ_{ijk} を単なる記号と見て、**Levi-Civita の記号** とか **Eddington のイプシロン** とか呼ぶこともある。ϵ_{ijk} に関して次の公式はしばしば用いられる。

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{75}$$

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \tag{76}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{77}$$

[問題 6] 上の３つの公式を証明せよ。

1.1.2.9.3 （完全）反対称テンソルと星印作用素 ２階反対称テンソルは

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

という形をしているので、独立な成分は３つである。そこで、この３つの成分を持つベクトルと１対１に対応が付けられる。

具体的には、２階反対称テンソル A からベクトルへの**星印作用素** * を

$$({}^*A)_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_{jk} \tag{79}$$

と定義し、逆に、ベクトル A から２階反対称テンソルへの星印作用素を

$$({}^*A)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_k \tag{80}$$

と定義すると、この星印作用素が２階反対称テンソルとベクトルとの対応を与える。１対１対応なので、ベクトル A もしくは２階反対称テンソル A に対して、

$${}^{**}A = A \tag{81}$$

である。

３階完全反対称テンソルは

$$A = (a\epsilon_{ijk}) \tag{82}$$

という形をしており、独立な成分は１つしかない。そこで、スカラーと１対１の対応がある。具体的には、３階完全反対称テンソル A からスカラーへの**星印作用素** * を

$${}^*A = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_{ijk} \tag{83}$$

と定義し、逆に、スカラー A から 3 階完全反対称テンソルへの星印作用素を

$$({}^*A)_{ijk} = \epsilon_{ijk} A \tag{84}$$

と定義すると、この星印作用素が 3 階反対称テンソルとスカラーとの対応を与える。1 対 1 対応なので、スカラー A もしくは 3 階完全反対称テンソル A に対して、

$$^{**}A = A \tag{85}$$

である。

[問題 7] 3 次元の場合、4 階の完全反対称（交代）テンソルは零テンソル以外には存在しないことを証明せよ。

1.1.3 ベクトルやテンソルの積

ベクトルやテンソルには何通りかの「積」が定義されている。それらを見てゆこう。

「積」は、2 つのベクトル（やテンソル）の双線型関数として定義される。したがって、先の写像としてのテンソルの定義によれば、テンソルの一種であるという言い方もできる。

1.1.3.1 ベクトルの内積

1.1.3.1.1 内積の定義 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積（スカラー積、ドット積）は、

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{86}$$

と定義される。テンソルが 2 つのベクトルからスカラーへの双線形関数であるという立場で言えば、これは恒等テンソル

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{87}$$

に相当する。同じことだが、単位ベクトルに対する作用は

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1 \tag{88}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \tag{89}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0 \tag{90}$$

となる。

内積には対称性

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \quad \text{（交換法則）} \tag{91}$$

と双線形性

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \quad \text{（分配法則）} \tag{92}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \quad \text{（分配法則）} \tag{93}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{94}$$

がある。

ベクトルの大きさは、

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} \quad \text{（ピタゴラスの定理）} \tag{95}$$

で表される。ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを、単に a と書くことも多い。

1.1.3.1.2 [参考] 拡張された内積 内積の概念には、考える空間によっていろいろ拡張されたバージョンがある。内積は、より一般的には2つのベクトルの対称な双線形関数である。たとえば、特殊相対論を考える時には $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z)$ という4次元時空を考えて、

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{96}$$

のような内積を考える（Minkowski 空間）。さらにそれを拡張した一般相対論では

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij}a_ib_j \tag{97}$$

（ただし、g_{ij} は対称テンソル）のような内積を考える。また、関数空間の内積は、実関数 $f(x), g(x)$ に対しては

$$f\cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \tag{98}$$

のように定義できる。

1.1.3.1.3 ベクトルの内積の幾何学的な意味 内積には、皆さんも御承知の通りの（高校生でも習う）幾何学的な意味がある。2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がともに零ベクトルでないときは，それらのなす角を θ とすると

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{99}$$

が成り立つ。したがって、$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\boldsymbol{a}\text{と}\boldsymbol{b}\text{が直交する} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \tag{100}$$

ということになるし、

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \le |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \tag{101}$$

という性質があることもすぐにわかる。

ベクトルが座標軸となす角度の cos を**方向余弦**という。$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ が x 軸，y 軸，z 軸となす角を α, β, γ とするとき、方向余弦 (l, m, n) は

$$l = \cos\alpha \tag{102}$$

$$m = \cos\alpha \tag{103}$$

$$n = \cos\gamma \tag{104}$$

と表される。内積を用いて考えると

$$l = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{105}$$

$$m = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{106}$$

$$n = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{107}$$

となる。このことから

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{108}$$

が成り立っていることも分かる。

1.1.3.1.4　ベクトルの内積の物理学への応用　物理学で、内積がいろいろな場面で現れるのは皆さんご存知だろう。なので、あまりたくさん例を挙げてもしかたがないから、一つだけ例を挙げる。質点の力学では、仕事が

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} \tag{109}$$

のように、力 $\boldsymbol{F}$ と動いた距離 $\Delta\boldsymbol{r}$ の内積としてあらわされる。力のうちで、力学的意味での「仕事」に効くのは、質点が動く方向の成分だけであることを示している。

1.1.3.2　テンソルの内積

1.1.3.2.1　テンソルの内積の定義　2 階テンソルに対しても**内積**（**2 重内積**、**2 重ドット積**）を定義できる。2 つのテンソル $\underline{\underline{A}}$ と $\underline{\underline{B}}$ との内積は

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ij} \tag{110}$$

と定義される。ここで、記号 : は、成分で書いたときに 2 つの添字についての和を取ることを象徴している。これは、ベクトルの内積記号 · が 1 つの添字についての和を取ることを象徴しているとみて、拡張したものである。

2 階テンソルの大きさは

$$|\underline{\underline{A}}| = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}} \tag{111}$$

である。なお文献によっては、素直に

$$|\underline{\underline{A}}| = \sqrt{\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}} \tag{112}$$

としているものもある。ベクトルと違って、幾何学的な意味が無いので、係数の取り方には任意性がある。前者の定義で 1/2 を付ける気分は、テンソルの非対角成分が重要になる場合には以下のように理解できる。2 階反対称テンソル A（対角成分が 0）では、このように定義したときに

$$|A| = |{}^*A| \tag{113}$$

が成り立つ。すなわち、星印作用素で対応するベクトルの大きさと等しくなる。また、対称テンソルでたとえば $A_{12}(=A_{21})$ だけが大きくなるような場合に

$$|\underline{\underline{A}}| \simeq A_{12} \tag{114}$$

となる。

1.1.3.2.2　テンソルの内積の物理学への応用例　物理学で内積が出てくる場面の一例には、次のようなものがある。流体力学で運動エネルギーの式を書くと

$$(\text{応力テンソル}) : (\text{速度勾配テンソル}) \tag{115}$$

という形の項が現れる。

テンソルの大きさを使う例として、マントル物質の非線形レオロジーを挙げておこう。マントルは固体だからレオロジーが通常のニュートン粘性と違っていても驚かないだろう。実際、主要な変形メカニズムとして転位クリープが考えられており、その場合、偏差応力 τ と歪速度 $\dot{e}$ は比例せず、実験式としては

$$\dot{e} = \frac{1}{2\mu B}\left(\frac{\tau}{G}\right)^{n-1}\tau \tag{116}$$

のような関係であらわされる。ここで、n が非線形性を表す定数で 3.5 くらいの数値になる。μ は粘性率、G は剛性率、B は無次元の定数である。ところが、これは 1 次元の関係式である。というのも、実験では、いろいろな方向から応力をかけたりいろいろな方向の歪を測ったりするのは難しいから、3 次元的な関係式を決定するのは難しいからである。しかし、マントル対流のシミュレーションをするには 3 次元の関係式が必要である。これをどのように 3 次元に拡張したらよいのだろうか？ニュートン粘性の場合は偏差応力テンソル τ_{ij} と歪速度テンソル $\dot{e}_{ij}$ は

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\tau_{ij} \tag{117}$$

のように結びついている。そこで、上二つの式を単純に混ぜ合わせて

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu B}\left(\frac{\tau}{G}\right)^{n-1}\tau_{ij} \tag{118}$$

としてはどうだろうかということを思いつく。ここの τ は応力の大きさを代表する量で、それにテンソルの大きさ (111) が使われている。

1.1.3.3　行列の積としての記法

ベクトルとテンソルが関わる演算で行列の積の形で書けるものがある。呼称は教科書によってまちまちである。これを内積と呼んでいるものもあるが、本講義では紛らわしいので内積とは呼ばない。

前に 1.1.2.3 でやったように、ベクトルからベクトルへの線形写像の形 (32) で定義された 2 階テンソル

$$\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{u}) \tag{119}$$

は、成分で書くと

$$v_i = \sum_{i=1}^{3} T_{ij} u_j \tag{120}$$

と書くことができる。右辺は行列の形をしているから、このことを

$$\underline{v} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u} \tag{121}$$

とか、単に

$$\underline{v} = \underline{\underline{T}} \underline{u} \tag{122}$$

と書くことがある。前者の · は、1 つの添字についての和を取ることを表し、後者は、行列の積のつもりで積の記号を書かない。しかし、後者のように積記号を書かないやり方は、後述のテンソル積で用いられることもあり紛らわしいので、本講義では使用しない。

やはり 2 階テンソルをベクトルからベクトルへの線形写像の形 (32) で定義したとき、ベクトル $\boldsymbol{u}$ を写像 T で変換し、それをさらに写像 S で変換するということがある。

$$\boldsymbol{v} = S(T(\boldsymbol{u})) \tag{123}$$

これを成分で書くと

$$v_i = \sum_{j,k=1,3} S_{ij} T_{jk} u_k \tag{124}$$

と書くことができる。この T と S の合成写像（2 階テンソル）は、行列の積の形で書けているので、

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{T}} \tag{125}$$

とも書くことができる（この場合も積記号を書かない流儀もあるが、本講義では紛らわしいのでそうしない）。

1.1.3.4　テンソル積

1.1.3.4.1　テンソル積の定義　2 つのテンソル（階数が異なっていても良い）

$$\mathsf{S} = (S_{ij}), \quad \mathsf{T} = (T_{ijk}), \tag{126}$$

に対して、すべての成分の相互の積を成分にもつテンソルを**テンソル積**と定義する。

$$\mathsf{S} \otimes \mathsf{T} = (S_{ij} T_{klm}), \tag{127}$$

p 階テンソルと q 階テンソルのテンソル積は $p+q$ 階テンソルになる。

記号として、積記号を省略して単に ST と書く場合もある。しかし、それは行列としての積と紛らわしいので、本講義では必ず $\otimes$ を用いることにする。

2 つのベクトルのテンソル積のことをとくに**ディアド積**(dyadic product, dyadic) と呼ぶこともある。ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のディアド積というときには、積記号を略して $\boldsymbol{ab}$ と書くのがむしろ普通である。そこで、ディアド積という言葉も本講義では使わない。

テンソル積は、座標に依存しない形で定義することもできる。以下では2つのベクトルのテンソル積を例にして説明する。

まず、2階テンソルをベクトルからベクトルへの線形写像という形 (32) で定義するとき、ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のテンソル積は

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} \tag{128}$$

と定義できる。このテンソルの成分は確かに

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{e}_j)=(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{b})=a_ib_j \tag{129}$$

となって、先の成分による定義と一致する。

次に、2階テンソルを2つのベクトルからスカラーへの線形写像という形 (38) で定義するとき、ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のテンソル積は

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{130}$$

と定義できる。このテンソルの成分は、やはり確かに

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{ij}=(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j \tag{131}$$

となって、先の成分による定義と一致する。

1.1.3.4.2　テンソル積の記法の便利な利用法

[1] この記法の便利な利用法として、テンソルの基底の表現がある。たとえば、2階テンソルは

$$T=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{132}$$

のように表現できる。すなわち、基底は $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ のように表せる。実際、テンソルを2つのベクトルからスカラーへの線形写像という形 (38) で定義するとき、上の T を用いれば

$$T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum_{i,j=1}^{3}u_iT_{ij}v_j \tag{133}$$

となり、先の (46) と一致する。

[2] 2階テンソルをベクトルからベクトルへの線形写像とみるとき、ベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向への射影を表す写像は

$$P_{\boldsymbol{x}}=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\otimes\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \tag{134}$$

と表現することができる。とくに、座標軸方向 ($\boldsymbol{e}_i$ 方向) への射影は

$$P_i=\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i \tag{135}$$

と表すことができる。

[3] 以下の関係が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = I \tag{136}$$

ただし、I は恒等テンソルである。このことは、上の [1] のように成分表示してしまうと当たり前である。さらに、必ずしも座標軸の方向を向いていない正規直交基底 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ に対しても、

$$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i \otimes \boldsymbol{p}_i = I \tag{137}$$

が成立する。このことは、座標軸を回転して $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ が座標軸を向くようにすれば、I は座標変換しても成分が変わらないので成立することがわかる。

幾何学的には、直交する 3 つの方向にベクトルを射影して、それを合成すると元に戻るということである。なので、明らかに成り立つと言っても良いであろう。

[4] 上の式 (136) を用いると、以下のようにして式 (14) を再び求めることができる。

$$\begin{aligned} v_i' &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i' && (138) \\ &= \boldsymbol{v} \cdot I(\boldsymbol{e}_i') && (139) \\ &= \boldsymbol{v} \cdot \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i') && (140) \\ &= \boldsymbol{v} \cdot \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j && (141) \\ &= \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_j) && (142) \\ &= \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j) v_j && (143) \end{aligned}$$

となることから、座標変換の式 (3) と比べて

$$R_{ij} = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{144}$$

を得る。これは、式 (14) である。

1.1.3.4.3 テンソル積の物理学への応用 物理学で登場するテンソル積には、たとえば、流体力学における運動量流束テンソル

$$\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \tag{145}$$

だとか、電磁流体力学における Maxwell 応力テンソル

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\underline{B} \otimes \underline{B} - \frac{1}{2}B^2 \underline{\underline{I}}\right) \tag{146}$$

(SI 単位系の場合) などがある。ただし物理学では $\otimes$ を省略して $\rho\boldsymbol{uu}$ とか $\mu_0{}^{-1}[\boldsymbol{BB} - (1/2)B^2\boldsymbol{I}]$ などと書いてしまうことの方が多い

1.1.3.5 ベクトルの外積

1.1.3.5.1 外積の定義 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の外積（ベクトル積、クロス積）は、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{147}$$

という成分を持つベクトルとして定義される。3 階のテンソルを 2 つのベクトルからベクトルへの線形写像と定義すると、Levi-Civita の完全反対称テンソル ϵ_{ijk} が外積を表すテンソルということになる。外積は、形式的には、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{148}$$

と行列式の形に表しておくと覚えやすい.

外積には反対称性

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{149}$$

と双線形性

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \quad \text{（分配法則）} \tag{150}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \quad \text{（分配法則）} \tag{151}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{152}$$

がある。さらに、式 (149) において $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ とすることで、ただちに

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{153}$$

が導かれる。

特に基底に対しては

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0} \tag{154}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{155}$$

が成り立つ。

1.1.3.5.2 ベクトルの外積の幾何学的な意味 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がともに零ベクトルでないとし、それらのなす角を θ $(0 \le \theta \le \pi)$ とする（図 1.4）。すると、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交する長さ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$ のベクトルである。この長さは、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす平行四辺形の面積を表している。$\boldsymbol{a}$ を右手の親指の方向に、$\boldsymbol{b}$ を人差指の方向にあわせたとき、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は中指の方向である。このことを $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は**右手系**であると表現する。

[問題 8] 外積の定義から、上の幾何学的意味が成り立つことを示せ。

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行であるのは $\theta = 0$ または π のときであるから

$$\boldsymbol{a} \text{と} \boldsymbol{b} \text{が平行} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{156}$$

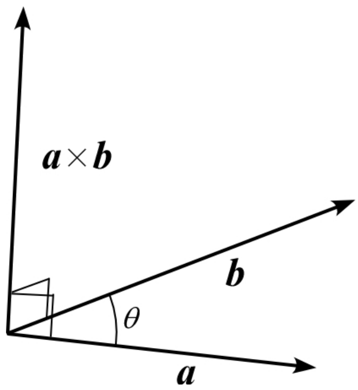

図 1.4: ベクトルの外積

1.1.3.5.3　ベクトルの外積の物理学への応用　物理学では、外積はいろいろな場面で現れる。一つだけ例を挙げると、質点の力学では、角運動量が

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{157}$$

のように、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量 $\boldsymbol{p}$ の外積としてあらわされる。

1.1.3.6　３重積

２種類の３重積と呼ばれるものが出てくることがある。

1.1.3.6.1　スカラー３重積　ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対し、

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{158}$$

をスカラー３重積とよぶ。ベクトルを成分で表すと

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{159}$$

のように行列式で書ける。

幾何学的には、スカラー３重積は、ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ で張られる平行六面体の（符号付きの）体積になる（図 1.5）。符号は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が右手系をなす場合は正、左手系の場合は負になる。実際、図 1.5 において $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ で張られる平行四辺形の面積は $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$ であり、この平行四辺形を底面とみたときの平行六面体の高さは $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ であるから，体積 V は

$$V = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})| \tag{160}$$

となる。

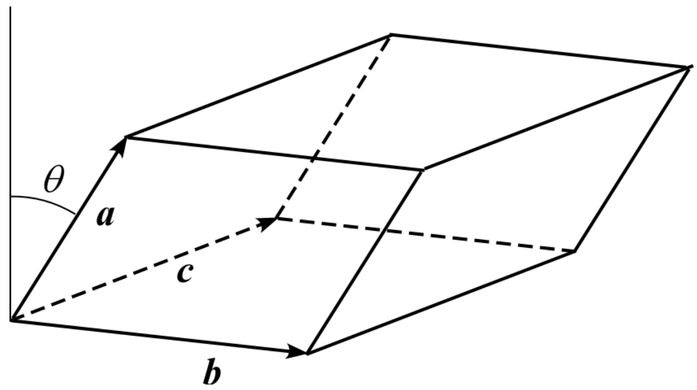

図 1.5: スカラー 3 重積

1.1.3.6.2　ベクトル 3 重積　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し、$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ や $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ をベクトル 3 重積という。一般に $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ と $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ は異なる。ベクトル 3 重積については次の関係式が成り立つ。

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{161}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{162}$$

1.1.3.7　くさび積

ふつう物理学の教科書で出てくる積は、以上のものだけで十分なのだが、外積の類似品として「くさび積」を紹介しておくことにする。数学的には、外積と実質的に同じだが、外積よりもスマートな量である。先に定義した外積は、次元が高い場合に直接拡張できないという欠点がある。それに対して、くさび積は自然に多次元に拡張できる（しかし、ここではそのことは説明せず、3 次元の場合に話を限る）。さらに、以下で見るように、くさび積は、面積を表す外積と体積を表すスカラー 3 重積とを統一的に表現できる。

1.1.3.7.1　2 つのベクトルのくさび積　外積は、2 つのベクトルの双線形で反対称な線型関数であった。そこで素直に、2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ からスカラーへの双線形写像としての 2 階テンソルを以下のように定義する。

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} \tag{163}$$

これが**くさび積**（**ウエッジ積**、**交代積**、あるいはこれを **外積** と呼ぶこともある）である。定義を言葉で言えば、2 つのベクトルのテンソル積を反対称化したものということになる。成分を書き下してみると

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \sum_{i,j=1}^{3} (a_i b_j - b_i a_j)\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 - b_1a_2 & a_1b_3 - b_1a_3 \\ a_2b_1 - b_2a_1 & 0 & a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 & a_3b_2 - b_3a_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{164}$$

となる。外積ベクトルの成分が現れているから、外積と本質的には同じものであることが分かる。

2 つのベクトルのくさび積、あるいは一般に 2 階反対称テンソルの基底は

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \underline{\underline{0}} \tag{165}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{166}$$

$$\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{167}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{168}$$

となり、独立なものは 3 つである。

このくさび積と外積との関係は (164) から明らかではあるが、形式的には 1.1.2.9.3 で定義された星印作用素を用いて表現できる。

$$({}^*(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))_{ij} = \sum_{k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} a_l b_m = \sum_{l,m=1}^{3} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_l b_m = a_i b_j - a_j b_i = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})_{ij} \tag{169}$$

なので、

$${}^*(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \tag{170}$$

と書くことができる。逆に、

$$({}^*(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}))_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}(a_j b_k - b_j a_k) = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i \tag{171}$$

なので、

$${}^*(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{172}$$

と書くことができる。このように、外積は星印作用素でくさび積に関係づけられる。

外積と同様、くさび積には

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \neq \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \text{と} \boldsymbol{b} \text{は線型独立} \tag{173}$$

という性質がある。

[問題 9] 2 つのベクトルのくさび積どうしの内積に次の関係があることを示せ。

$$(\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2) : (\boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2) = 2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{vmatrix} \tag{174}$$

なお、右辺の $|\cdot|$ は行列式である。同じことを外積を用いて書けば、

$$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot (\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{vmatrix} \tag{175}$$

となる。

1.1.3.7.2　３つのベクトルのくさび積　３つのベクトルのくさび積は、３つのベクトルのテンソル積を完全反対称化したもである。したがって、

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a} \tag{176}$$

と書ける。成分を書き下してみると

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})_{ijk} &= a_ib_jc_k+b_ic_ja_k+c_ia_jb_k-a_ic_jb_k-b_ia_jc_k-c_ib_ja_k \qquad (177)\\
&= \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \qquad (178)\\
&= \epsilon_{ijk}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (179)
\end{aligned}$$

である。これは、本質的にスカラー３重積と同じものである。

零テンソルでない基底は、

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 \qquad (180)\\
=\;& -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1 \qquad (181)\\
=\;& (\epsilon_{ijk}) \qquad (182)
\end{aligned}$$

で、独立なものは１つである。これは、３階完全反対称テンソルの基底でもある。

このくさび積とスカラー３重積との関係は、1.1.2.9.3 で定義された星印作用素を用いて表現できる。

$$({}^*(\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}))_{ijk}=\epsilon_{ijk}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})_{ijk} \tag{183}$$

なので、

$${}^*(\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} \tag{184}$$

と書くことができる。逆に

$${}^*(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \tag{185}$$

となる。このように、スカラー３重積は星印作用素でウェッジ積に関係づけられる。

スカラー３重積と同様、くさび積には

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\neq \underset{\equiv}{0}\Leftrightarrow \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{は線型独立} \tag{186}$$

という性質がある。

1.1.4　２階テンソルの主値、固有値、不変量

1.1.4.1　応力テンソルと主応力

前にすでに応力テンソルに関係した話題を出しているが、改めて応力テンソルを簡単に復習しておこう。連続体力学では、面積力を考える必要があって、それを表現する応力ベクトル（単位面積当たりの力）$\boldsymbol{\sigma}$ を導入する。次に、応力ベクトルが法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に依存することが示されて、依存の仕方が

$$\sigma_i(\boldsymbol{n}) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j \tag{187}$$

のように表される。これは、法線ベクトルから応力ベクトルへの線形写像の形をしているので、この (σ_{ij}) の組を応力テンソルと呼び、各 σ_{ij} を応力テンソルの成分と呼んだのであった。応力テンソルは通常対称テンソルである。

[注意] 応力テンソルの定義の仕方によっては、

$$\sigma_i(\boldsymbol{n}) = \sum_{j=1}^{3} n_j \sigma_{ji} \tag{188}$$

と書くこともある。本講義では (187) の定義を用いることにする。しかし、応力テンソルは普通は対称テンソルなので、実質的にはどちらの定義を用いても同じことになる。

さて、応力テンソルは図示するのが難しい。すこしでも分かりやすくする可能性として回転座標変換で簡単な形にする手はないかと考えてみる。回転座標変換によって応力テンソルの成分は

$$\sigma'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} R_{ik} R_{jl} \sigma_{kl} \tag{189}$$

のように変化するのであった。これを行列の形で書くと

$$\sigma' = R \cdot \sigma \cdot R^{-1} \tag{190}$$

と書ける。一方、線形代数で習った（はずの）知識によれば、実対称行列は直交行列によって対角化できるのであった。上の回転座標変換の式はちょうどそのような形をしているから、σ' を対角行列の形に出来る回転座標変換 R を必ず見出すことができる。

そのような座標変換の結果得られた新しい座標軸を**応力の主軸**、応力の成分を**主応力**と呼ぶ。これによって応力をわかりやすく図示することができる。

歪テンソルも２階の対称テンソルだから同様の操作で**歪の主軸**と**主歪**を求めることができる。これも地球科学（測地学や構造地質学）で良く使われる。

1.1.4.2　２階テンソルの主値、固有値

２階対称テンソルでは、上で見たように、回転座標変換によって、テンソルは対角形になる。そのときの座標軸を**主軸**、成分を**主値**と呼ぶ。

線形代数の知識によれば、主軸や主値を求めるには、テンソルを行列として扱ってその固有値と固有ベクトルを求めればよい。テンソルが対称テンソルでなければ、回転座標変換によっては対角化できないけれども、行列として固有値と固有ベクトルは求めることができる。それを 2 階テンソルの**固有値**、**固有ベクトル**と呼ぶ。ここでは触れないが、対称テンソルでなくても固有値、固有ベクトルが有用なことがあるので、対称テンソルに限定せずに話を進める。

[問題 10] 2 階対称テンソル

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{191}$$

の主値、および主軸を与える回転行列 R を求めよ。

テンソル A の固有ベクトルは、$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p}$ で

$$A \cdot \boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p} \tag{192}$$

を満たすものであり、λ を固有値と呼ぶ。この式を書き直すと

$$(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{p} = \sum_{i=1} p_i (A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_i = 0 \tag{193}$$

となる。このことは、3 つのベクトル $(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_i, (i = 1, 2, 3)$ が独立でないことを示している。したがって、

$$[(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_1] \wedge [(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_2] \wedge [(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_3] = 0 \tag{194}$$

である（もちろんこのことはスカラー 3 重積を使っても表現できるが、ここではウエッジ積を使ってみた）。これを展開すると、

$$\begin{aligned} & \lambda^3 (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \\ - \ & \lambda^2 [(A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3)] \\ + \ & \lambda [\boldsymbol{e}_1 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) + (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) + (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \boldsymbol{e}_3] \\ - \ & [(A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3)] = 0 \end{aligned} \tag{195}$$

となる。3 つのベクトルのウエッジ積の基底で独立なものは 1 つだけ $(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3)$ だったから、ここで出てきている係数は必ず

$$\begin{aligned} (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \ &+ \ \boldsymbol{e}_1 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) \\ &= \ I_A [\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3] \end{aligned} \tag{196}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) \ &+ \ (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) + (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \boldsymbol{e}_3 \\ &= \ II_A [\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3] \end{aligned} \tag{197}$$

$$(A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) = III_A [\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3] \tag{198}$$

のように書けるはずである。ただし、I_A, II_A, III_A は数で、それぞれテンソル A の**第一不変量**、**第二不変量**、**第三不変量**と呼ばれる。こう書くと、先の式 (195) は、

$$\lambda^3 - I_A \lambda^2 + II_A \lambda - III_A = 0 \tag{199}$$

と書きなおすことができる。これが固有方程式である。行列の線形代数の知識からわかるように、固有値や固有方程式は座標系に依存しないはずのものなので、ここに出てくる係数は座標変換によって変わらない。そこで、I_A, II_A, III_A は不変量と呼んで良いことになる。念のため、これらが本当に不変量であること（ここでは、回転座標変換に対して変わらないスカラーであるということ）をあとで直接確かめる。

1.1.4.3 2階正値対称テンソルの主値と主軸の幾何学的意味〜物質の変形の表現

ここでは、物質（連続体）の変形を表現するテンソルを例として、主値や主軸の幾何学的な意味を考えていこう。連続体は、一般には複雑な変形をするけれども、連続体内の微小領域の変形を考えると、それは線形変形であると考えられる。つまり、微小領域で考える限り、正方形が平行四辺形に変わるような変形だと考えてよい。ただし、変形の大きさは微小である必要はない。変形を表わすテンソルは、位置ベクトルを位置ベクトルに原点を固定したまま移す線形写像であると考える。

このような変形を表すのは、一般にはどんな形の2階テンソルでも良いのだが、ここでは2階正値対称テンソルがどのような変形を表すかを考えよう。正値対称テンソルとは、すべての固有値が正の対称テンソルのことである。正値対称というのは条件が厳しいように見えるかもしれないが、実は任意の2階テンソルが正値対称テンソルと直交テンソル（回転テンソル）との合成で表現できることがわかっており（極分解）、一般論に組み込むことができる（ここでは説明しない）。

対称テンソル S は、回転行列で対角化できるということから、固有ベクトルは正規直交ベクトルの組に取ることができる。これを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ と書く。これらに対応する固有値を $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とする。固有値は実数である（正値ならば正の実数）。

$$S(\boldsymbol{p}_i) = \lambda_i \boldsymbol{p}_i \tag{200}$$

この上で、式 (137) を用いると、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して

$$S(\boldsymbol{u}) = S(I(\boldsymbol{u})) = S(\sum_{i=1}^{3} (\boldsymbol{p}_i \otimes \boldsymbol{p}_i)(\boldsymbol{u})) \tag{201}$$

となり、計算を進めると

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{u}) &= S(\sum_{i=1}^{3} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i) && (202)\\
&= \sum_{i=1}^{3} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}_i) S(\boldsymbol{p}_i) && (203)\\
&= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i && (204)\\
&= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\boldsymbol{p_i} \otimes \boldsymbol{p}_i)(\boldsymbol{u}) && (205)
\end{aligned}$$

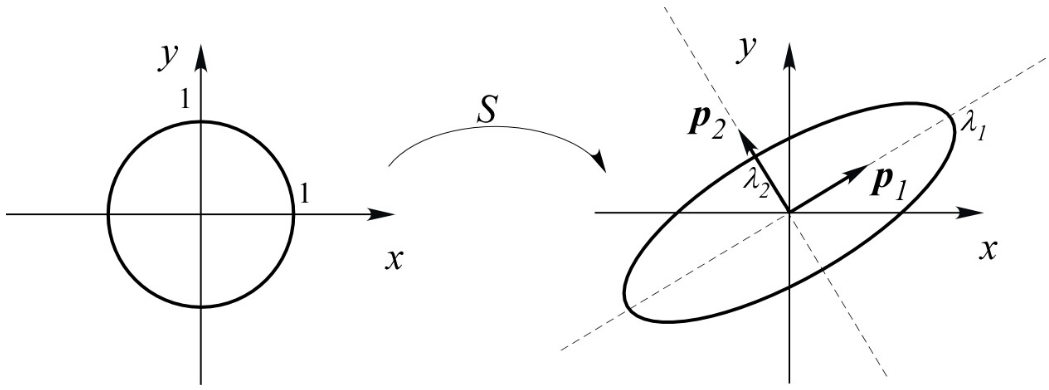

図 1.6: 2次元正値対称テンソルによる単位円の変形

が成り立つことがわかる。したがって、

$$S = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\boldsymbol{p_i} \otimes \boldsymbol{p}_i) \tag{206}$$

と書くことができる。これを対称テンソルの標準表示という。これは、主軸を座標軸に取ると対角形になると言っているだけだが、上の表示は座標軸の取り方には依存しない。さらに、ここまでは、正値でなくても成り立つ。

さて、こう表示すると、位置ベクトル $\boldsymbol{u}$ は、正値対称テンソル S によってどのように移されるということになるであろうか？上の計算の途中で出てくる式により

$$S(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}_i) \boldsymbol{p}_i \tag{207}$$

となるので、移されたベクトルは、$\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{p}_i$ 方向に射影したものを λ_i 倍してから合成したものということになる。$\lambda_i > 1$ ならばその $\boldsymbol{p}_i$ 方向には伸長し、$\lambda_i < 1$ ならばその $\boldsymbol{p}_i$ 方向には収縮することになる。単位球は、軸の長さが $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の楕円体になる。正値対称テンソルは、このような歪みを表現している。2次元で図示すれば、図 1.6 のようになる。これが、主軸と主値の幾何学的な意味である。

[問題 11] 2次元の2階対称テンソル

$$T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \tag{208}$$

が与える変形によって、単位円はどのような楕円に変形するか。その概形を図示せよ。

1.1.4.4 2階テンソルの不変量その1

先に出てきた3つの不変量を具体的に成分で表してみる。まず、

$$A = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{209}$$

であることに注意すると、第一不変量は

$$
\begin{aligned}
& (A\cdot \boldsymbol{e}_1)\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1\wedge (A\cdot \boldsymbol{e}_2)\wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge (A\cdot \boldsymbol{e}_3) \\
= & (\sum_{i=1}^{3} A_{i1}\boldsymbol{e}_i)\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1\wedge (\sum_{i=1}^{3} A_{i2}\boldsymbol{e}_i)\wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge (\sum_{i=1}^{3} A_{i3}\boldsymbol{e}_i) \\
= & A_{11}(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3) + A_{22}(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3) + A_{33}(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3) \\
= & (A_{11}+A_{22}+A_{33})(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3)
\end{aligned} \tag{210}
$$

より

$$
I_A = A_{11}+A_{22}+A_{33} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} = \mathrm{tr}A \tag{211}
$$

と書くことができる。行列用語に倣って、これはテンソル A の**トレース**（**跡**（せき））と呼ばれる。第二不変量は

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{e}_1\wedge (A\cdot \boldsymbol{e}_2)\wedge (A\cdot \boldsymbol{e}_3) + (A\cdot \boldsymbol{e}_1)\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge (A\cdot \boldsymbol{e}_3) + (A\cdot \boldsymbol{e}_1)\wedge (A\cdot \boldsymbol{e}_2)\wedge \boldsymbol{e}_3 \\
= & \boldsymbol{e}_1\wedge (\sum_{i=1}^{3} A_{i2}\boldsymbol{e}_i)\wedge (\sum_{j=1}^{3} A_{j3}\boldsymbol{e}_j) + (\sum_{j=1}^{3} A_{j1}\boldsymbol{e}_j)\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge (\sum_{i=1}^{3} A_{i3}\boldsymbol{e}_i) \\
& +(\sum_{i=1}^{3} A_{i1}\boldsymbol{e}_i)\wedge (\sum_{j=1}^{3} A_{j2}\boldsymbol{e}_j)\wedge \boldsymbol{e}_3 \\
= & (A_{22}A_{33}-A_{32}A_{23})(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3) + (A_{11}A_{33}-A_{31}A_{13})(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3) \\
& +(A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12})(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3) \\
= & (A_{11}A_{22}+A_{22}A_{33}+A_{33}A_{11}-A_{12}A_{21}-A_{23}A_{32}-A_{31}A_{13})(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3)
\end{aligned} \tag{212}
$$

より

$$
\begin{aligned}
II_A &= A_{11}A_{22}+A_{22}A_{33}+A_{33}A_{11}-A_{12}A_{21}-A_{23}A_{32}-A_{31}A_{13} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{3} A_{ii}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}A_{ji}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[I_A^2 - \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}A_{ji}\right]
\end{aligned} \tag{213}
$$

と書くことができる。第三不変量は

$$
\begin{aligned}
& (A\cdot \boldsymbol{e}_1)\wedge (A\cdot \boldsymbol{e}_2)\wedge (A\cdot \boldsymbol{e}_3) \\
= & (\sum_{i=1}^{3} A_{i1}\boldsymbol{e}_i)\wedge (\sum_{j=1}^{3} A_{j2}\boldsymbol{e}_j)\wedge (\sum_{k=1}^{3} A_{k3}\boldsymbol{e}_k) \\
= & \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}\right)(\boldsymbol{e}_1\wedge \boldsymbol{e}_2\wedge \boldsymbol{e}_3)
\end{aligned} \tag{214}
$$

より

$$III_A = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \det A \tag{215}$$

と書くことができる。行列用語に倣って、これはテンソル A の**行列式**と呼ばれる。

これらの不変量が回転座標変換に依存しないことを直接確かめよう。回転座標変換

$$A'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} R_{ik} R_{jl} A_{kl} \tag{216}$$

に対して、第一不変量、第二不変量は

$$I'_A = \sum_{i=1}^{3} A'_{ii} = \sum_{i,k,l=1}^{3} R_{ik} R_{il} A_{kl} = \sum_{k,l=1}^{3} \delta_{kl} A_{kl} = \sum_{k=1}^{3} A_{kk} = I_A \tag{217}$$

$$\begin{aligned} II'_A &= \frac{1}{2}\left[I'^2_A - \sum_{i,j=1}^{3} A'_{ij} A'_{ji} \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[I^2_A - \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} R_{ik} R_{jl} A_{kl} R_{jm} R_{in} A_{mn} \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[I^2_A - \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \delta_{kn} \delta_{lm} A_{kl} A_{mn} \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[I^2_A - \sum_{m,n=1}^{3} A_{nm} A_{mn} \right] \\ &= II_A \end{aligned} \tag{218}$$

となるので、不変量であることが確かめられた。第三不変量に関しては、行列式の積公式

$$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) \tag{219}$$

と、座標変換が行列の形で

$$A' = R \cdot A \cdot R^{-1} \tag{220}$$

と書けるということから

$$III'_A = \det A' = \det R \cdot A \cdot R^{-1} = \det A = III_A \tag{221}$$

となり、不変量であることが確かめられた。

最後に、特殊な形をしたテンソルに対して、3 つの不変量の形を求めておこう

対角行列の形のテンソル

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{222}$$

のとき、

$$I_A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{223}$$
$$II_A = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \tag{224}$$
$$III_A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{225}$$

トレースが 0 の対称テンソル 偏差応力 τ のような場合、

$$I_\tau = 0 \tag{226}$$
$$II_\tau = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}\tau_{ij} = -|\tau|^2 \tag{227}$$
$$III_A = \det\tau \tag{228}$$

1.1.4.5 2 階テンソルの不変量その 2

上で出てきた不変量の代わりに、2 階テンソル A の不変量として以下の組が使われることもある。

$$J_{A1} = \mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} \tag{229}$$
$$J_{A2} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}A_{ji} \tag{230}$$
$$J_{A3} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}A^3 = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{3} A_{ij}A_{jk}A_{ki} \tag{231}$$

ここで、A のべき乗は、行列としてのべき乗を表す。J_{A1}, J_{A2}, J_{A3} が不変量であることは、行列のトレースで定義されていることから明らかである。対称テンソルでは、J_{A2} は、式 (111) で定義されたテンソルの大きさの 2 乗に等しい。

先に求めた不変量との関係は

$$I_A = J_{A1} \tag{232}$$
$$II_A = \frac{1}{2}(J_{A1}^2 - J_{A2}) \tag{233}$$
$$III_A = \frac{1}{6}J_{A1}^3 - J_{A1}J_{A2} + J_{A3} \tag{234}$$

となる。

[問題 12] ケーリー・ハミルトンの定理を用いて、式 (234) を導け。

1.1.4.6 不変量の物理学への応用

塑性理論では、等方的な物質の降伏条件を表現するのに偏差応力の不変量を組み合わせたものが用いられる。

参考書、参考 web pages

H. フランダース (1967) 微分形式の理論、岩波書店
P. チャドウィック (1979) 連続体力学、ブレイン図書出版
田代嘉宏 (1981) テンソル解析（基礎数学選書 23)、培風館
シュッツ (1987) 物理学における幾何学的方法（物理学叢書 53)、吉岡書店
吉田総仁 (1997) 弾塑性力学の基礎、共立出版
Introduction to Elasticity/Tensors,
`http://en.wikiversity.org/wiki/Introduction_to_Elasticity/Tensors`
もしくは `http://www.thefullwiki.org/Introduction_to_Elasticity/Tensors`