目 次

第1章　ベクトル・テンソル解析

皆さんの大部分は、すでにベクトル・テンソル解析の基礎的なところはすでに学部で習得していると思う。ただし、いろいろな科目に散らばっていたと思うので、ここで改めてまとめて数学的な事柄を整理しよう。

1.1　ベクトルとテンソル

1.1 節では、ベクトルやテンソルは何かということと、テンソルの基本的な演算をいくつか学ぶ。しかし、毎年書き足しているうちに、1.1 節のノートは１回の講義にしては分量過多になってしまった。そこで、授業においては、**1.1.1 節と 1.1.2 節のみを取り扱う**。ここでは、ベクトルとテンソルがどのように数学的に定義されるかを物理学や幾何学と関係させながら整理する。1.1.3 〜 1.1.8 節は、講義をする暇がないので、興味のある人は各自読んで参考にされたい。1.1.3 〜 1.1.5 節は、テンソルの基本的な演算の解説である。1.1.6 節では、ここまでの学習を踏まえて、物理学の世界と数学の世界をどう結ぶのかを改めて考え直す。普段はあまり気にしなくても良いのだが、物理学においては、性質（たとえば単位）の異なるベクトルを同じ図の上に書くことが良くある。でも本当は、単位が違うものは同じ空間に属してはいない。そのような問題を考えてゆく。1.1.7 節は正規直交座標系ではない座標系の取扱いである。知らなくてもあまり困らないが、気になる人のための上級者向けの解説である。1.1.8 節はベクトル解析とテンソル解析の歴史の簡単な解説である。なお、1.1.6 節、1.1.7 節には、まだ書きかけの部分がある。

ベクトルとテンソルの定義の仕方にはいろいろな流儀があるのだが、あまり一般的にしすぎると抽象的になりすぎるので、物理学で一番よく使われるであろう形でまず定義をする。ただ、それだけだと狭くなる意味もあって、後から拡張してゆく。まず、ベクトルは矢印、テンソルはベクトルからベクトルへの線形関数（比例関係を表す）であると定義する。それだけだとベクトルとテンソルは全く別のものということになるのだが、実際は共通する性質があって、ベクトルもテンソルの一種だととらえられることを説明してゆく。

さらに、ここで考えるのは３次元ユークリッド空間に限ることにする。座標系もほぼデカルト座標に限る。この 1.1 節では、1.1.1.2 節と 1.1.6 節と 1.1.7 節において、そうではない座標系の取り扱いもある。

1.1.1　ベクトルとは何だろうか？〜ベクトルが備えているべき性質

1.1.1.1　ベクトルは矢印〜ベクトルの足し算と定数倍

まず、ベクトルとは何かを改めて考えてみよう。ベクトルは基本的には「矢印」（有向線分）である。1.1.8 節で解説する歴史的経緯からしても、ベクトルは、向きと長さを持った線分（すなわち矢印）を表現するために生み出された概念である。

「矢印」の基本は、ある場所から別の場所に向けて引いた線分である。たとえば、質点の運動を考えるとき、質点が Δt の時間内に $\Delta \boldsymbol{r}$ だけ動くという言い方をするとき、この $\Delta \boldsymbol{r}$ は、

時刻 t のときの位置から時刻 $t+\Delta t$ のときの位置に向かって引いた矢印であって（図 1.1）、ベクトルである。そして、

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1}$$

が速度である。

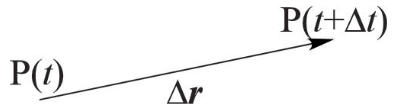

図 1.1: Δt の間の動きを矢印（＝ベクトル）で表す

次にベクトルの和をどう定義するのが自然かを考える。質点が時刻 t である場所 $P(t)$ にいて、次の時刻 $t+\Delta t_1$ で $P(t+\Delta t_1)$ にいて、その次の時刻 $t+\Delta t_1+\Delta t_2$ で $P(t+\Delta t_1+\Delta t_2)$ にいるものとする。最初の時間 Δt_1 の間の動きを表す矢印を $\Delta \boldsymbol{r}_1$、次の時間 Δt_2 の間の動きを表す矢印を $\Delta \boldsymbol{r}_2$ として、その和として自然なのは、時間 $\Delta t_1+\Delta t_2$ の間の動きを表す矢印である（図 1.2）。すなわち、ベクトルの和は、最初の矢印の終点を次の矢印の始点として描いたとき、最初の矢印の始点と次の矢印の終点を結ぶ矢印として定義できる。

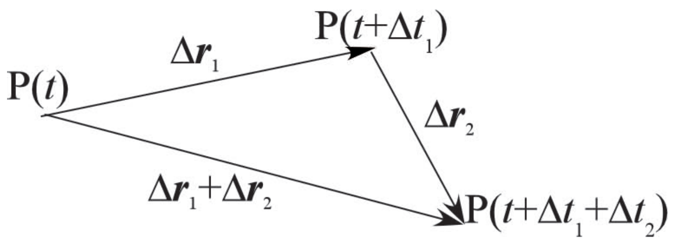

図 1.2: ベクトルの和その１

２つの矢印の始点をそろえて書くようにすると、ベクトルの和は、２つの矢印が作る平行四辺形の対角線に向かう矢印になる（図 1.3）。

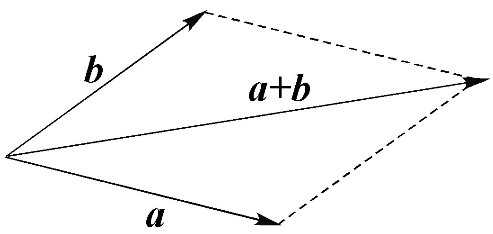

図 1.3: ベクトルの和その２

ベクトルの定数倍というのも自然に考えられる定義がある。質点が時刻 t である場所 $P(t)$ にいて、次の時刻 $t+\Delta t$ で $P(t+\Delta t)$ に行ったとして、同じ速度でずっと進んだときに $t+a\Delta t$ に入るであろう位置を $P(t+a\Delta t)$ とする。時間 Δt での動きを表す矢印を $\Delta \boldsymbol{r}$ とすると、時間 $a\Delta t$ での動きを表す矢印は、$\Delta \boldsymbol{r}$ と向きが同じで長さが a 倍の矢印となる（図 1.4）。

このようにして、高校でも学習するベクトルの和と定数倍の定義が得られる。

こんなふうに和や定数倍を定義するのは変位や速度のような量に対しては上述のように自然なのだが、他のたとえば力や電場や磁場のような物理学で出てくる量がこの意味で矢印（ベクトル）なのかどうかは、もちろん先験的にはわからない。ベクトルであるとして記述してみたらうまく行くということは、経験的事実である。たとえば、運動方程式が

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{2}$$

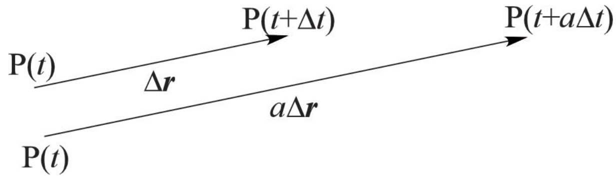

図 1.4: ベクトルのスカラー倍

と書けるということは、力もベクトルの性質を持っているということを含意している。

数学の世界では、その後、ベクトルの概念が拡張された。「矢印」を捨て、和と定数倍の性質がむしろ本質的と見て、それでベクトルを定義し、そのようなベクトル全体の集合を考えて、**ベクトル空間**（**線形空間**）と呼ぶ。それは、後でも少し述べるように、矢印のような形をしていないもの、たとえば関数などもベクトルと考えることができて、広い応用範囲があるからである。そこで、以下に、一応、数学的な定義も書いておこう。以下の性質を満たす「ベクトル」なるものの集合を考えてベクトル空間という。

1. ベクトルには、和とスカラー倍（おっと、ここでスカラーという言葉が出てきてしまったが、単なる数[1]を掛け算するということ）が定義されている。
2. 和は、交換法則と結合法則を満たす（$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$、$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$）。逆に言えば、これと次の 2 つの性質が満たされるような演算を考えるから、安心して「和」という言葉を使えるということではある。
3. ゼロベクトルがある（$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$）[2]。
4. ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して逆ベクトル $-\boldsymbol{u}$ があって、足すとゼロベクトルになる（$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$）[3]。
5. スカラー倍は、結合法則を満たす（$a(b\boldsymbol{u})=(ab)\boldsymbol{u}$）。
6. スカラー 1 をかけるということは、そのベクトル自身を指す（$1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$）。
7. スカラーとベクトルのそれぞれについて分配法則が満たされる（$(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u}$、$a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$）。

ただし、こんなふうに書いてしまうと、数学好きでない人には当たり前のことをごてごて書いているように見えてしまうし、実際そんな特別なことでもない。この定義を「なるほど！」と思えるのは、たぶん関数のような一見全然違うものが矢印と同じ範疇に入れられることを知った後だろう。なので、ここではあんまり気にせず、以下ではふたたび「矢印」イメージに戻る。

[1]単なる数という言い方はいい加減なので、数学の教科書を見ると何らかの「体」の元と書いてある。「体」とは、四則演算ができるものの集まりである。有理数体、実数体、複素数体が代表例である。

[2]これは、$\boldsymbol{0}\equiv 0\boldsymbol{u}$ と定義してしまえば、分配法則から導かれると言えば導かれるのだが、そうすると、$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}$ でも $0\boldsymbol{u}=0\boldsymbol{v}$ であると言わないといけないので、やっぱり別建てであった方が良いであろう。逆に言えば、これからあらゆる $\boldsymbol{u}$ に対して $0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ が導かれる。

[3]分配法則と $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ ならびに $0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ から、$-1\boldsymbol{u}$ が逆ベクトル $-\boldsymbol{u}$ になるとわかるので、無くても良い。その意味では、$-1\boldsymbol{u}$ のことを $-\boldsymbol{u}$ と書く約束を述べていると言っても良い。

1.1.1.2　ベクトルの成分とその座標変換

高校でも学習するように、２次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、その始点を方眼紙[4]の原点に取ると、その終点の座標を用いて

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

というふうに成分で書くことができる。３次元でも同様である。その意味では、ベクトルは数字の組であるとも言える。しかし、「矢印」は、以下の２つの意味で単なる数字の組ではない。成分として用いることができる数字の組には制約がある。

1.1.1.2.1　ベクトルの成分が持っている性質１ 和や定数倍を保存している　ベクトルの成分は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

のとき（簡単のため２次元で考える)、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\ a\boldsymbol{u} &= \begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

と書けるようなものでなければならない。

方眼紙座標を用いるときこれが成立するのは当たり前なのだが、ここで言いたいことは、もし仮に他の座標でベクトルを表現したいと思った時、使える座標には制約があるということである。たとえば、極座標のように、ベクトルをその長さ r と x 軸となす角 φ を用いて (r, φ) のように表すと、２つのベクトル (r_a, φ_a) と (r_b, φ_b) の和は $(r_a + r_b, \varphi_a + \varphi_b)$ のようにはならない。このようにベクトルを表現できるどんな数の組でも成分としての資格があるわけではない。

上の (5) 式で表現されている性質を成分が持たないといけないとすれば、

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

と書ける。そこで、

$$\boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

と定義すれば、

$$\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{t}_1 + u_2 \boldsymbol{t}_2 \tag{9}$$

[4]方眼紙というのは、もちろん２次元ユークリッド空間におけるデカルト座標という意味である。

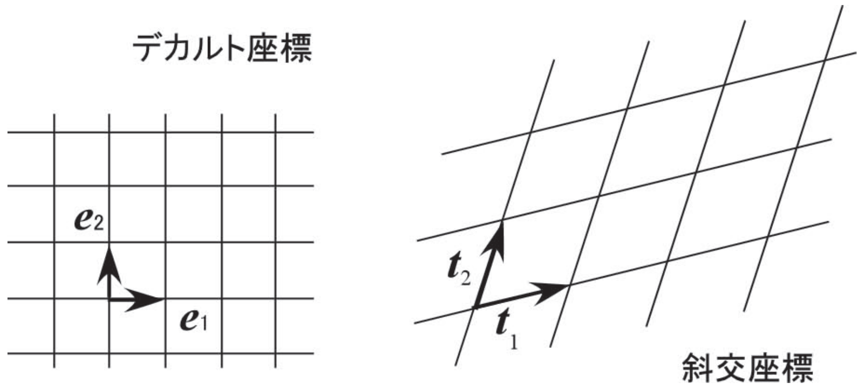

図 1.5: 斜交座標系

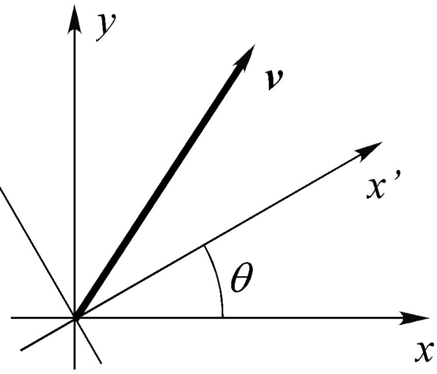

図 1.6: ベクトルに対する座標の回転

と書けることになる。この $\boldsymbol{t}_1$、$\boldsymbol{t}_2$ のことを**基底** (basis) と呼ぶ。逆にこのように書ければ、和は分配法則から

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(u_1\boldsymbol{t}_1+u_2\boldsymbol{t}_2)+(v_1\boldsymbol{t}_1+v_2\boldsymbol{t}_2)=(u_1+v_1)\boldsymbol{t}_1+(u_2+v_2)\boldsymbol{t}_2=\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

定数倍も分配法則から

$$a\boldsymbol{u}=a(u_1\boldsymbol{t}_1+u_2\boldsymbol{t}_2)=(au_1)\boldsymbol{t}_i+(au_2)\boldsymbol{t}_2=\begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

となるので、数の組 (u_i) は、(5) 式で表現されている性質を満たす。そこで、 (u_i) は、ベクトルの成分であるという言い方をして良い。すなわち、成分としての資格がある数の組はこのようなものだけである。

$\boldsymbol{t}_1$、$\boldsymbol{t}_2$ は平行でない任意のベクトルに選ぶことができるので、図示すると、(u_1, u_2) は、一般には図 1.5 のような斜交座標系の成分ということになる。基底は、方眼紙座標（デカルト座標）のときにだけ直交する。斜交座標は、本講義では 1.1.7 節で簡単に説明する。以下、デカルト座標系に戻る。

1.1.1.2.2 ベクトルの成分が持っている性質 2 座標変換 さて、方眼紙座標を用いるにしても、方眼紙を原点を固定したまま回転させると、成分は変わる。たとえば、高校でもやったと思うが、図 1.6 のように 2 次元の座標系を座標軸を (x, y) から (x', y') に回転させたとする。すると、同じベクトルであっても、(x, y) 系で

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{12}$$

と書けていたものが、(x', y') 系ではそれとは異なる数字の組

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \tag{13}$$

となり、それらの成分の間には

$$\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{14}$$

という関係がある。すなわち、座標系を変えると、矢印は変わらなくても数字の組は変わる。つまり、ベクトルとしては「矢印」が真の姿、成分は仮の姿（単なるひとつの表現）で、数字は物差し（座標軸）によって変化する。

してみると、ベクトルを表現する成分が座標変換に対してどのように変換するかということが、成分が単なる数字の組ではないことを示すメルクマールになる。

上では簡単な例として２次元で説明したが、以下では一般的に３次元の回転座標変換を考える。必要なときには座標軸を (x, y, z) や (x_1, x_2, x_3) と書く。回転座標変換を表す行列を

$$R = (R_{ij}) \tag{15}$$

と書くことにする。すなわち、ベクトルの成分が回転座標変換に対して

$$v'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} v_j \tag{16}$$

のように変換されるものとする。回転以外の座標変換を考えると、いろいろ微妙な問題があって、道具立てが複雑になる。その問題の概略を 1.1.6 節と 1.1.7 節で説明してある。それ以外の節では、回転座標変換のみを考えることにする。回転を考えるという意味は、扱う座標系として長さの尺度の決まったデカルト座標系（方眼紙座標）しか考えず、そういう座標系の間の原点を固定した座標変換しか考えないということである。

ここで回転座標変換行列 R が満たすべき条件を求めておく。座標変換で矢印そのものは変わらないし、回転変換はその成分を測る方眼紙が回るということである。方眼紙が回っても、ピタゴラスの定理から、任意のベクトル $\vec{v}$ の長さは

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i'^2} \tag{17}$$

というふうにどちらの座標系でも同じ形で書けるはずである。二つのベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ がなす角 α も

$$\cos\alpha = \frac{\sum_{i=i}^{3} u_i v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}} = \frac{\sum_{i=i}^{3} u'_i v'_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i'^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i'^2}} \tag{18}$$

と同じように書けるはずである。これらの性質をまとめて書けば、座標系を回転しても、内積[5]の成分による表現は変わらないということになる。逆に、内積の表現が変わってしまうようだと、斜交座標系になっているとか縮尺が変わっているとかいうことになっているので、その変換は回転座標変換ではない。

[5]内積は、この講義では後の 1.1.4.1 節で出てくるが、皆さん既知としても良いだろう。

そこで、回転座標変換では、任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{3} u'_i v'_i = \sum_{i,j,k=1}^{3} R_{ij} R_{ik} u_j v_k = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \tag{19}$$

が成り立たなければならない。このためには

$$\sum_{i=1}^{3} R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk} \tag{20}$$

となっていることが必要十分である[6]。ここで、δ_{ij} は**クロネッカー (Kronecker) のデルタ**と呼ばれる記号で

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{21}$$

で定義されている。この座標変換の行列 R のように、

$$(R^{-1})_{ij} = R_{ji} \tag{22}$$

すなわち、

$$R^{-1} = R^T \tag{23}$$

という性質をもつ行列を**回転行列**（**直交行列**）と呼ぶ。ここで行列の右上に付けた T は行列の転置を表す。

1.1.1.3 ベクトルの基底〜ベクトルに対する線形演算の表し方と基底の座標変換

1.1.1.2.1 節でもある程度説明したように、成分を使ったベクトルの表現法として、座標軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i \tag{24}$$

というものもある。このような単位ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を**基底**（あるいは **基本ベクトル**）という。方眼紙座標（デカルト座標）の場合、基底は**正規直交基底**になる。正規直交基底とは

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{25}$$

となる基底のことである。ここで中点（$\cdot$）は内積[7]を表す。つまり、基底は長さが 1（正規）で互いに直交する。

このように基底を用いて (24) 式のように書くことの利点は 2 つくらいある。

ひとつには、ベクトルの実体が矢印であって、成分の方がみかけのものであるということが陽に表現されていることにある。たとえば、座標変換に際して、矢印そのものは変わらないけれども成分は変わるということを

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} v'_i \boldsymbol{e}'_i \tag{26}$$

[6]式 (20) から式 (19) を導くのは単純。逆に式 (19) から式 (20) を導くには、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ として座標軸方向の単位ベクトルを選ぶと良い

[7]ここでも後述の 1.1.4.1 節で出てくる内積を用いる。

というふうに表現することができるのは便利である。つまり、基底を使わないと、ひとつのベクトル $\boldsymbol{v}$ を、(x, y, z) 系で

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{27}$$

と表現し、(x', y', z') 系ではそれとは異なる数字の組を使って

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{pmatrix} \tag{28}$$

と表現したとき、単に式だけ見ていると

$$(\boldsymbol{v} =) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{pmatrix} \qquad \leftarrow \text{こうは書けない！} \tag{29}$$

という誤った式が導かれてしまうのに対して、基底を使うと

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{e}_x + v_y \boldsymbol{e}_y + v_z \boldsymbol{e}_z = v_{x'} \boldsymbol{e}_{x'} + v_{y'} \boldsymbol{e}_{y'} + v_{z'} \boldsymbol{e}_{z'} \tag{30}$$

という正しい式が書ける。たとえると、ベクトルの基底は、物理量の「単位」のようなものである。

二つ目は、ベクトルに対する線形演算は、基底に対する演算の結果がわかっていればすべてわかるということである。なぜなら、線型演算を T と書くと、T の線型性から

$$T(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{3} v_i T(\boldsymbol{e}_i) \tag{31}$$

と書けるからである。念のため、線型演算の定義を書いておくと、演算子 T が線型演算子であるとは、

$$T(a\boldsymbol{v}) = aT(\boldsymbol{v}) \tag{32}$$

$$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \tag{33}$$

が成り立つということである。

座標変換の前と後の基底の関係は以下の通りである（線形代数ですでに勉強していると思うが、以下に問題としておいた。）。座標変換に対して成分が

$$v'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} v_j \tag{34}$$

と変換されるときに、基底は

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j (R^{-1})_{ji} \tag{35}$$

と変換される（これは回転座標変換でなくても成立する）。今考えているのは回転座標変換なので、

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} \boldsymbol{e}_j \tag{36}$$

とも書くことができる。

式 (36) から、座標変換行列の成分は、変換前後の基底を用いて

$$R_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{37}$$

と書けることも分かる。

[問題 1] ベクトルの成分が座標変換によって式 (34) のように変換されるとき、基底は式 (35) のように変換されることを示せ。ただし、ここでは R_{ij} は回転変換に限らないものとする。

1.1.1.4 [参考] 「矢印」ではないベクトルについて

1.1.1.1 節でも触れたとおり、ベクトル空間（線形空間）という概念は「矢印」を超えて拡張できる。数学では、「矢印」のような具体的なイメージのあるものを用いてものごとを定義してしまうと、拡張性が制限されることになるのでできるだけ避けようとする。そこで、1.1.1.1 節の最後の方で説明したように、簡単に言えば、和と定数倍が定義できるということだけを抽象的にベクトル空間の定義として用いる。さらに内積が定義されるベクトル空間のことを**内積空間**という。以下に「矢印」ではない「ベクトル」の例を３つ挙げる。

1.1.1.4.1 ベクトルとしての行列 $m \times n$ 行列が作る空間 $\mathfrak{M}(m, n)$ は mn 次元の線型空間である。和と定数倍が自然に定義されるからである。基底としては、第 i 行、第 j 列の成分のみが 1 でそれ以外の成分が 0 という行列 e_{ij} を取ることができる。

この意味では、行列もベクトルだという言い方ができる。しかし、このように行列をベクトルと言ってしまうと、座標変換行列やテンソルもベクトルということになって、本講義では大混乱を招くことになってしまう。本講義では「ベクトル」は「矢印」しか指さないということにする。本講義（テンソル解析）の用語では、座標変換行列はベクトルではなく、後述のようにベクトルは１階のテンソルともいえるが、それ以外のテンソルはベクトルではない。

1.1.1.4.2 ベクトルとしての関数 関数もベクトルだと考えることもできる（詳しくは、関数解析の教科書を参照すること）。本講義でも、第２章の１回目でそのような考え方が出てくる。関数にも和やスカラー倍が定義できるし、内積とか座標変換も考えられる。関数が作るベクトル空間を関数空間と言う。

そういう考え方の下では、フーリエ変換の式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \tag{38}$$

は、$f(x)$ がベクトルで、$e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ が基底、$\tilde{f}(k)$ がその基底に対する成分であるというふうに見ることができる。あるいは、この式は x 空間と k 空間の間の座標変換の式だと見ることもできる。

1.1.1.4.3 ベクトルとしての単位のある物理量 一般に物理量は数字と単位の組み合わせである。数学では、数字を成分、単位をベクトルの基底とみなして、物理量はベクトルだと言うことができる。たとえば、質量は、キログラム (kg) という単位を基底とする１次元ベクトルである。単位を kg から g に変換するような操作は座標変換に相当する。

ただし、このように物理量をすべてベクトルだと言ってしまうと、質量のように普通はスカラーという言い方をするものもベクトルということになって、本講義ではやはり大混乱を招くので、本講義では「ベクトル」は「矢印」しか指さないということにする。

1.1.2　テンソルとは何だろうか？

テンソルとは、数学的にはどういう量であるべきだろうか？ここでは、具体的な例として地下水の流れに関係する浸透率テンソルと岩石の変形に関係する変形勾配テンソルの２つを導入することからテンソルが持っている性質を考えてゆくことにする。この例を選んだ理由は、先に述べたように、ベクトルの基本はものの動きだということで、動きに関連した量を例示したかったことと、それでいながら全く物理的には異なる量が、テンソルという数学的に共通な性質を持っていることを示したかったということである。数学的に共通する部分はどこかに注目してほしい。

ます、浸透率を導入してゆく。

1.1.2.1　浸透流と浸透率

浸透流の話はお馴染でないかもしれないが、地下水の流れを記述するのに良く使われる。ここは流体力学の講義ではないので、あまり細かい定義や内容には触れずにおおざっぱな雰囲気で導入してみる。地下水の流れは、水を押す力である圧力勾配に比例すると考える。ただし、表現を簡単にするため、重力は無視する。

$$\boldsymbol{q} \propto \nabla p \tag{39}$$

ここで、$\boldsymbol{q}$ は流れ（正確な定義は省略する）、∇p は圧力勾配（勾配 grad は次回にやるけれども、皆さん知っているでしょう）である。その比例係数を $-K/\mu$ として

$$\boldsymbol{q} = -\frac{K}{\mu}\nabla p \tag{40}$$

のように書く（Darcy の法則）。マイナス符号は、圧力が高い方から低い方に地下水が流れることから付けた。ここで、K は浸透率と呼ばれる量で、土や砂の中を流体（地下水）が通る時の通りやすさを表す。μ は流体（地下水）の粘性率である。つまり、K は媒質（土や砂）の通りやすさ、μ は中を通る流体の流れにくさを表す。浸透率 K は隙間の多さを反映していて、たとえば未固結の砂層だと大きくなるし、粒子の細かい粘土層や割れ目が入ったり風化したりしていない花崗岩などでは小さくなる。

[**参考**] **電磁気学が得意な人へ** 浸透流より電磁気学の方に馴染みがある人にとっては、オームの法則

$$\boldsymbol{J} = -\sigma\nabla\phi \tag{41}$$

が上の Darcy の法則とほぼパラレルな法則なので、こちらで考えても良い。ここで、$\boldsymbol{J}$ は電流密度で、浸透流の $\boldsymbol{q}$ に対応し、σ は電気伝導度で、浸透流の K/μ に対応し、ϕ は電位で、浸透流の p に対応する。

1.1.2.2　浸透率テンソル

ところで、土や岩が層構造をしていたりすると、単純な比例関係ではたぶんいけない。というのは、層構造があったりすると、層に沿って水が通りやすいだろうから、押した方向に対して斜めの方向に水が出てきたりするだろうからだ。

このときは、もうちょっと一般的な比例関係ということで、方向性は問わないけれども水を押す力と流れの間に線型性があるということを要請する。すなわち、

$$\boldsymbol{q} = K(\boldsymbol{f}) \tag{42}$$

と書いて、水の通りやすさを表す関数 K が線型性を持っていることを要請する。ただし

$$\boldsymbol{f} = -\frac{1}{\mu}\nabla p \tag{43}$$

は、圧力勾配に比例する量で、「水を押す力」に相当する。なお、関数 K が線型であるということは、前に式 (32), (33) で書いた通り、

$$K(\lambda \boldsymbol{f}) = \lambda K(\boldsymbol{f}) \tag{44}$$

$$K(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = K(\boldsymbol{f}_1) + K(\boldsymbol{f}_2) \tag{45}$$

が成り立つということである。上の式は、圧力勾配が 2 倍になれば流れも 2 倍になるということで、自然である。下の式は、たとえば、圧力勾配を x 方向と y 方向に分解しておいて、それぞれの圧力勾配による流れを足すと全体の流れを求めることができるということで、これもまた自然である。このとき、この線型関数 K を**浸透率テンソル**と呼ぶ。

次に、線型性の帰結を成分で書くために、ベクトル $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{f}$ とを基底で表現して

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{e}_i \tag{46}$$

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{3} f_i \boldsymbol{e}_i \tag{47}$$

と書くことにする。そうすると、

$$\sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{e}_i = K(\sum_{i=1}^{3} f_i \boldsymbol{e}_i) \tag{48}$$

となる。右辺に K の線形性を用いると

$$\sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} f_i K(\boldsymbol{e}_i) \tag{49}$$

と書くことができる。さらに、$K(\boldsymbol{e}_i)$ は一つのベクトルだから

$$K(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j K_{ji} \tag{50}$$

と書くことが出来て

$$\sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j K_{ji} f_i \tag{51}$$

と書き直せる。両辺の成分を比べると

$$q_i = \sum_{j=1}^{3} K_{ij} f_j \tag{52}$$

となる。このようにして、浸透率テンソルは行列の形 K_{ij} で書けることが分かった。これを浸透率テンソルの成分という。テンソルの各成分 K_{ij} は、j の向きに力がかかった時、i の向きにどのくらいの流れが生じるかを表現している。

[参考] **電磁気学が得意な人へ** オームの法則で言えば、同様の議論から電気伝導度テンソルを考えることができる。

$$J_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} E_j \tag{53}$$

ここで、$\boldsymbol{E}$ は電場ベクトル、σ_{ij} が電気伝導度テンソルの成分である。電離層の話でよく出てくる形では、z 軸を磁場の方向にとって、

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_P & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{54}$$

と書く。σ_P をペダーセン伝導度、σ_H をホール伝導度、σ_0 を平行伝導度と呼ぶ。

1.1.2.3 テンソルの定義〜線形写像その１

上でやったことを一般化して、**（２階の）テンソル**はベクトルからベクトルへの線形写像であると定義できる[8]。この意味でのテンソルを T と表す。

$$\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{u}) \tag{55}$$

テンソルの成分は

$$T(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j T_{ji} \tag{56}$$

もしくは内積[9]を使って

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T(\boldsymbol{e}_j) \tag{57}$$

から定義できて、1.1.2.2 節でやったのと同じことをすれば

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} u_j \tag{58}$$

と書くことができる。

とくに

$$I(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \tag{59}$$

（恒等写像）となるテンソルを**恒等テンソル**という。成分で書けば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \tag{60}$$

となる。

これを拡張すると、高階のテンソルも定義できる。後で 1.1.2.10 節で説明するように、スカラーは０階のテンソル、ベクトルは１階のテンソルとみなせる。ということは、２階のテンソルは、１階のテンソルから１階のテンソルへの線形写像ということになる。とすれば、４階テ

[8] ベクトル解析の歴史を説明する 1.1.8.5 節に書いたが、マクスウェルは、応力や歪みを表すにはベクトルの線型ベクトル関数が必要であると書いていた。この定義はまさにその伝統に則っている。

[9] この講義では後の 1.1.4.1 節で出てくるが、皆さん既知としても良いだろう。

ンソルを、２階テンソルから２階テンソルへの線形写像と定義することができる。たとえば、弾性率テンソル（４階テンソル）は、歪テンソル（２階テンソル）から応力テンソル（２階テンソル）への線形関数である。

このようにテンソルを抽象的に成分を用いない形で定義をする御利益は、物理的には全く違っていることがらにも同じ数学的な枠組みが使えることを示すことができることにある。そこで、1.1.2.5 節では、浸透率とは物理的には全く異なるテンソルの例を一つ見てゆく。

1.1.2.4 スカラー、ベクトル、テンソルの語源

ここでスカラー、ベクトル、テンソルという言葉がまとめて出てきたので、ついでにその語源の説明もしておく。1.1.8.2 節に書くように、スカラーとベクトルという語は、ハミルトン (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865) が四元数を発明したときに導入した。スカラー scalar は、ラテン語の scala（はしご、階段）から来ていて、scale（物差し）と同語源である。はしごから転じて、目盛を意味するようになって、物差しになったものである。英語読みすると「スケイラー」だが、日本語ではドイツ語の「スカラー」が普及している。ベクトル vector は、ラテン語では「運ぶもの」という意味で、動詞の vehere（運ぶ）から来ており、移動を示す。vehere は convection（対流）にも含まれるし、遺伝子工学で vector と言えば、遺伝子の運び屋のことである。ベクトル解析という言葉を使い始めたのは、ベクトル解析の創始者の一人であるギブス (Josiah Willard Gibbs, 1839-1903) である（1.1.8.6 節参照）。テンソル tensor は、フォークト (Woldemar Voigt, 1850-1919) が張力、伸張などを意味する tension （ラテン語なら tensus、ドイツ語なら最初を大文字にして Tension テンズィオーン）から作った言葉である（1.1.8.9 節参照）。もともとテンソルが連続体中の歪みなどを扱うために導入されたことから来ている。tension は、ラテン語の tendere（伸ばす）から来た言葉である。テンソル解析という言葉は、20 世紀の第二四半期頃から使われ始めた。

1.1.2.5 変形勾配テンソル

もう一つテンソルの例として、物質（連続体）の変形の表現に使うテンソルを見てゆく。これは完全に幾何学的な問題なので、物理が入った浸透率や電気伝導度よりは概念的にわかりやすいだろう。その一方で、式がいろいろ出てくる。テンソルはベクトルからベクトルへの線形写像であるということを念頭に置きながら見てゆくことにする。

地下では岩石が応力を受けてグニャッと変形したりする。まず、これをどう表現するかを考える。変形前の物質（連続体）に直交座標を貼っておいて、これを $\boldsymbol{\xi}$ 系とする。変形後の物質にも直交座標を貼って、これを $\boldsymbol{x}$ 系とする。それで、変形前に位置 $\boldsymbol{\xi}$ にあった点が、変形後に位置 $\boldsymbol{x}$ に移ったということを

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) \tag{61}$$

と表現する（図 1.7）。

さて、ある点（変形前だと $\boldsymbol{\xi}_0$、変形後だと $\boldsymbol{x}_0$）の周りだけを拡大してみよう。その点の周辺の座標を、変形前なら

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \Delta\boldsymbol{\xi} \tag{62}$$

変形後なら

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x} \tag{63}$$

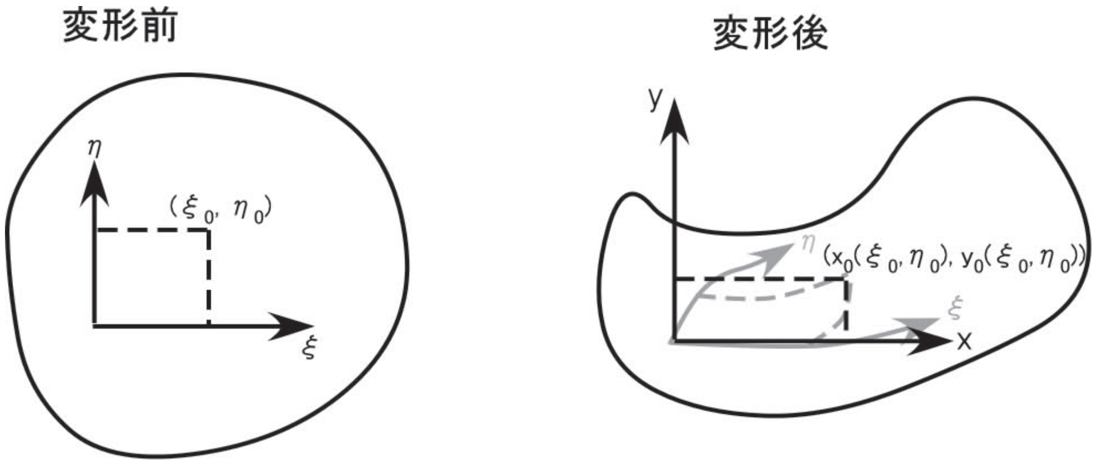

図 1.7: 変形と座標。右の図の灰色の軸と線は、左の図の軸と線が変形した後の姿である。

と表す。Δ の付いた量が小さな量ならば、$\boldsymbol{\xi}_0$（$\boldsymbol{x}_0$）の周りを拡大したことになる。変形を表す関数

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} x(\xi,\eta,\zeta) \\ y(\xi,\eta,\zeta) \\ z(\xi,\eta,\zeta) \end{pmatrix} \tag{64}$$

が与えられていれば、これを $\boldsymbol{\xi}_0$（$\boldsymbol{x}_0$）の周りでテーラー展開すると、

$$\begin{pmatrix} x(\xi,\eta,\zeta) \\ y(\xi,\eta,\zeta) \\ z(\xi,\eta,\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) \\ y_0(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) \\ z_0(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{pmatrix} \tag{65}$$

と書ける。一方、左辺は

$$\begin{pmatrix} x(\xi,\eta,\zeta) \\ y(\xi,\eta,\zeta) \\ z(\xi,\eta,\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \tag{66}$$

とも書けるから、結局

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{pmatrix} \tag{67}$$

と書ける。これを、まとめて

$$\Delta\boldsymbol{x} = \mathsf{F}\cdot\Delta\boldsymbol{\xi} \tag{68}$$

と書く。右辺の中点（$\cdot$）は行列の掛け算の意味であり（1.1.4.3 節参照)、

$$\mathsf{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \tag{69}$$

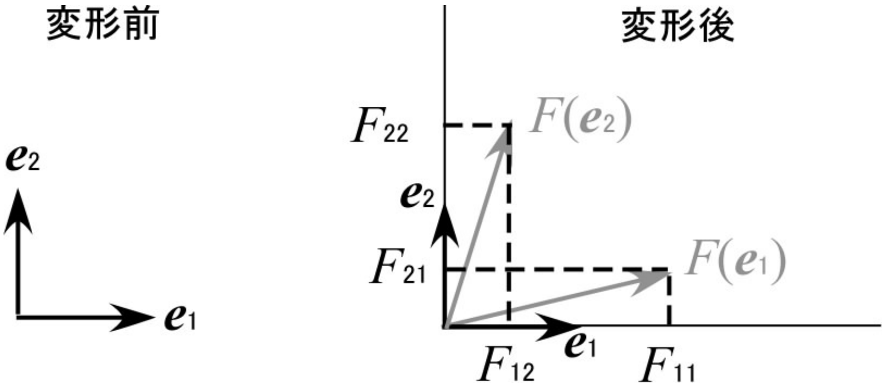

図 1.8: 変形勾配テンソルが表しているもの

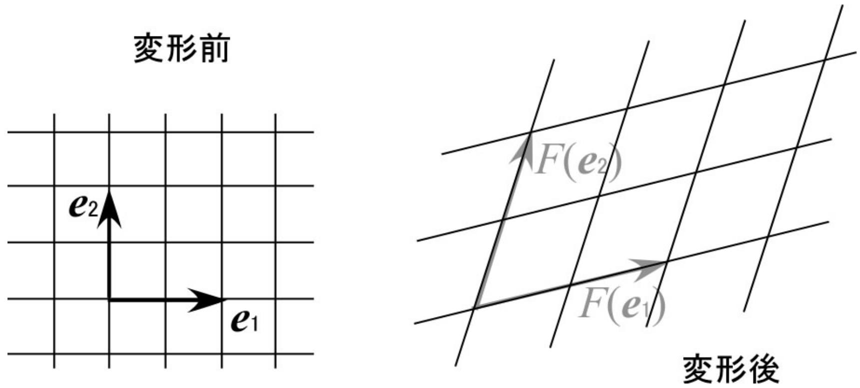

図 1.9: 変形勾配テンソルによる方眼紙の変形

のことを**変形勾配テンソル**と呼ぶ。F の成分を F_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ と書けば、上の式は前の 1.1.2.3 節の式 (58) の形で 2 つのベクトルを結びつけているから、これはテンソルである。

この変形勾配テンソルが幾何学的にどのようなことを表しているかを考えてゆく。以下、$\boldsymbol{\xi}_0$（$\boldsymbol{x}_0$）の周りの局所的な変形だけを考えることにする。そこで、記号として Δ は省いてしまって式 (68) を

$$\boldsymbol{x} = \mathsf{F} \cdot \boldsymbol{\xi} \tag{70}$$

と書いてしまおう。前の 1.1.2.3 節にならえば、このテンソルは線形写像 F

$$\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{\xi}) \tag{71}$$

と書くこともできて、

$$F(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{e}_j F_{ji} \tag{72}$$

$$F_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot F(\boldsymbol{e}_j) \tag{73}$$

の関係がある。さて、式 (72) の幾何学的な意味を考えていこう。式 (72) は、変形前に単位ベクトルであったものが変形後にどうなるかを示している。それを図 1.8 に示す。

F が線形写像であることを考えると、単位ベクトルの定数倍や和は、変形した後には、単位ベクトルが変形したベクトルの定数倍や和になるはずである。そのことを図にすると、図 1.9 のようになる。このように、変形勾配テンソルは、方眼紙を平行四辺形のマス目に変えるような変形を表している。つまり、どんな変形でも、微小要素を取り出してみると、方眼紙を平行四辺形のマス目に変えるような変形になるということである。

[問題 2] 次の変形勾配テンソルで表される変形を図 1.9 のような方眼紙の変形として図示せよ。

(1) 単純剪断

$$\mathsf{F} = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.2 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(2) 回転

$$\mathsf{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

1.1.2.6 テンソルの定義〜線形写像その２

さて、もう一度テンソルの定義の話に戻る。テンソルの定義は、1.1.2.3 節で述べたものに限らない。写像を使った定義としては、２階のテンソルを、２つのベクトルからスカラーへの双線形写像と定義するやり方もある（スカラーとは、回転座標変換によって変わらない量のことである。1.1.2.10 節参照)。すなわち、

$$s = T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \tag{74}$$

として、双線型性

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) &= T(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) && (75)\\ T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) &= T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2) && (76)\\ T(\lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= T(\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v}) = \lambda T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) && (77) \end{aligned}$$

を要請する。ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \sum_{i=1}^{3} u_i \boldsymbol{e}_i && (78)\\ \boldsymbol{v} &= \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i && (79) \end{aligned}$$

とすると、双線型性から

$$s = \sum_{i,j=1}^{3} u_i T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) v_j \tag{80}$$

となる。ここで、

$$T_{ij} = T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \tag{81}$$

と定義すれば

$$s = \sum_{i,j=1}^{3} u_i T_{ij} v_j \tag{82}$$

と書くことができる。後で内積を定義する時にも述べるが、内積はこのような双線形写像の一例であり、内積のテンソルとしての成分は恒等テンソルである。

この定義 (74) と、先の定義 (55) とはどのような関係になるのだろうか？(74) で定義された T からベクトルからベクトルへの線形写像

$$\tilde{T}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{3} T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{u}) \boldsymbol{e}_i \tag{83}$$

を構成することができる。このテンソル $\tilde{T}$ の成分は、式 (57)、(83)、(81) を順に用いてゆくと

$$\tilde{T}_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \tilde{T}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot \sum_{k=1}^{3} T(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = T_{ij} \tag{84}$$

となって、ちょうど T の成分と一致する。逆に (55) で定義された $\tilde{T}$ から、２つのベクトルからスカラーへの双線形写像

$$T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \tilde{T}(\boldsymbol{v}) \tag{85}$$

を構成することができる。このテンソル T の成分は

$$T_{ij} = T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot \tilde{T}(\boldsymbol{e}_j) = \tilde{T}_{ij} \tag{86}$$

となって、やはり $\tilde{T}$ の成分と一致する。こうして、定義 (74) と定義 (55) とは一対一に対応していることが分かる。そこで、場合に応じて便利な方の定義を用いればよいことになる。

ただし、数学的に定義 (74) と定義 (55) との間に一対一対応があるといっても、物理的な対象に対してどちらの定義も意味があるとは限らない。たとえば、浸透率テンソル $K(\boldsymbol{f})$ を使って２つのベクトルからスカラーへの双線形写像 $\boldsymbol{q} \cdot K(\boldsymbol{f})$ を作ったからといって、この写像にたいした物理的な意味があるとは思われない。物理的には、1.1.2.3 節で述べたベクトルからベクトルへの線型写像という定義が応用しやすい場合が多いように思う。

1.1.2.7　テンソルを表す記号

ベクトルは、よく太字で $\boldsymbol{v}$ のように表したり、上に矢印を付けて $\vec{v}$ のように表したりする。文字の下に〜を付けて $\underset{\sim}{v}$ と書く人もいる。それに比べると、テンソルはあまり決まった表し方が無くて、$T, \boldsymbol{T}, \mathbf{T}, \mathsf{T}, \overleftrightarrow{T}$ のように表したりする。しかし、それではテンソルの階数を表現できない。テンソルの階数を含んだ表し方としては、ベクトル（１階のテンソル）を $\underline{v}$、２階のテンソルは $\underline{\underline{T}}$、３階のテンソルは $\underline{\underline{\underline{T}}}$ のようにするやり方がある。

本講義では、わかりやすさや便利さや気分によってこれらを混ぜて用いるので、注意されたい。テキストでは、ベクトルには主として太字 $\boldsymbol{v}$ を用い、テンソルには T, T や下線を用いた表現を用いる。黒板では太字が書きづらいので、上に矢印を付けた $\vec{v}$ も用いるかもしれない。

1.1.2.8　テンソルの足し算と引き算と定数倍

テンソルに対して足し算、引き算、定数倍を定義する。テンソルは写像なので自然な定義は、関数の和、差、定数倍と同じように定義すればよい。

(55) で定義された２階テンソルの場合は

$$(T + S)(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}) + S(\boldsymbol{u}) \tag{87}$$

$$(T - S)(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{u}) - S(\boldsymbol{u}) \tag{88}$$

$$(\lambda T)(\boldsymbol{u}) = \lambda T(\boldsymbol{u}) \tag{89}$$

となる。成分で書けば

$$(T + S)_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \tag{90}$$

$$(T - S)_{ij} = T_{ij} - S_{ij} \tag{91}$$

$$(\lambda T)_{ij} = \lambda T_{ij} \tag{92}$$

となる。高階テンソルでも同様である。これによってテンソルの作る集合も線型空間（ベクトル空間）になる。

このような演算が必要であることは、たとえば弾性体での応力に関して、2つの異なるソースの影響を足し算するとか、ソースが2倍になったら応力も2倍になるとかいったようなことを行うことからわかるであろう。

和に関する単位元（零元）として**零テンソル**がある。それは、どんなベクトル $\boldsymbol{u}$ に対しても

$$O(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \tag{93}$$

となるようなテンソル O のことである。その成分はすべて 0 になる。

1.1.2.9 テンソルの成分の座標変換

ベクトルの時と同様、テンソルであることの特徴は、成分の回転座標変換に対する変化に現れる。浸透率テンソルで考えてみよう。

$$q_i = \sum_{j=1}^{3} K_{ij} f_j \tag{94}$$

回転座標変換によって、ベクトルの成分は

$$q'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} q_j \tag{95}$$

$$f'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} f_j \tag{96}$$

のように変化するのであった。浸透率テンソルは

$$q_i = \sum_{j=1}^{3} K_{ij} f_j \tag{97}$$

$$q'_i = \sum_{j=1}^{3} K'_{ij} f'_j \tag{98}$$

の関係を満たしていなければならないから、(95) と (96) とを (98) に代入して

$$\sum_{j=1}^{3} R_{ij} q_j = \sum_{j,k=1}^{3} K'_{ij} R_{jk} f_k \tag{99}$$

が得られ、これに (97) を代入して

$$\sum_{j,k=1}^{3} R_{ij} K_{jk} f_k = \sum_{j,k=1}^{3} K'_{ij} R_{jk} f_k \tag{100}$$

となっていなければならない。どんなベクトル $\boldsymbol{f}$ に対してもこの関係が成り立つから

$$\sum_{j=1}^{3} R_{ij} K_{jk} = \sum_{j=1}^{3} K'_{ij} R_{jk} \tag{101}$$

が成り立っているはずで、両辺に $(R^{-1})_{kl} = R_{lk}$ をかけて k で和を取ると

$$K'_{il} = \sum_{j,k=1}^{3} R_{ij} R_{lk} K_{jk} \tag{102}$$

が得られる。これが、テンソルの成分の回転座標変換の規則を与える。この (102) は、行列の形では

$$K' = R \cdot K \cdot R^T = R \cdot K \cdot R^{-1} \tag{103}$$

と書けることにも注意しておく。ここで、行列の右上に T をつけた行列は転置行列を表し、中点 $(\cdot)$ は通常の行列の積を表す（1.1.4.3 参照)。

[問題 3] z 軸の周りに 180 度回転する座標変換の時に一般の浸透率テンソル

$$\begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} \tag{104}$$

はどのように変換されるか、以下のステップに従って計算せよ。

(1) この座標変換の行列 R（3×3 行列) を求めよ。

(2) 式 (103) を具体的に計算することにより、K' (回転した座標系における K の成分) を求めよ。

(3) 上の結果を確認するため、式 (95) から式 (101) までの過程をこの R に対して具体的に成分を書き下して計算することにより K' (回転した座標系における K の成分) を求めよ。

(4) テンソルの各成分が上の結果のように変換される理由を図を用いて物理的に説明せよ。

なお、上の (3) は (4) を考えるためのヒントとしてやってもらうので、式の意味を考えながら計算をたどってほしい。

1.1.2.10　テンソルの座標変換による定義〜テンソルの古典的定義

上のことは浸透流の性質を使っていないから、浸透率テンソルに限らず、すべてのテンソルで成り立つ。そこで逆に、テンソルを成分の座標変換規則をもって定義することができる。これがテンソルの古典的な定義である。

まず、**ベクトル**は、数の組 (v_i) $(i = 1, 2, 3)$ で、回転座標変換 R_{ij} （直交行列で表される。1.1.1.2 節で断ったように、今回の講義では回転座標変換しか扱わない。）に対して

$$v'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} v_j \tag{105}$$

のように変換されるものである。**（２階）テンソル**は数の組 (T_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3)$ は、同じ座標変換に対して

$$T'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} R_{ik} R_{jl} T_{kl} \tag{106}$$

のように変換されるものである。**3階テンソル** は数の組 (T_{ijk}) $(i,j,k=1,2,3)$ は、同じ座標変換に対して

$$T'_{ijk}=\sum_{l,m.n=1}^{3}R_{il}R_{jm}R_{kn}T_{lmn} \tag{107}$$

のように変換されるものである。以下高階のテンソルも同様である。

ベクトルは、1階のテンソルという言い方もできる。0階のテンソルを**スカラー**と呼ぶ。スカラーは、座標変換に対して変化しない。

[**注意**] 行列で書けるものは、何でもテンソルというわけではない。たとえば、上の座標変換の行列 (R_{ij}) は、定義からしてテンソルではない。同様に、数であれば何でもスカラーというわけではない。スカラーは座標変換に対して変化しない量を指すのだから、たとえば、ベクトル $\boldsymbol{v}$ の第1成分の v_1 のような量はスカラーではない。座標変換の際に変化してしまうからである。

しかし、このベクトルやテンソルの定義は、数学屋さん的には少し気持ち悪い。というのは、この定義で用いられている「成分」は、1.1.1.2 節でベクトルを説明するときに解説したように、「見かけの量」だからである。言い換えると、定義に現れている数（成分）が座標系に依存している。だから、数学的には成分を使わないで（座標系に依存しない形で）定義したい。それに、上の「注意」で述べたような単なる行列とテンソルの区別も、成分で書くと同じように見えるので紛らわしい。そこで、先のように線形写像で定義しておくのがスマートである。

とはいえ、上のように成分を用いた定義が良い点もある[10]。ひとつは、スカラーやベクトルがテンソルの一種ととらえられることがはっきり分かる点であり、もうひとつは、座標変換が直接出ているので実用的である点である。

本当のことを言えば、ベクトルが矢印で表されるように、テンソルも図を使って表される何かであると言いたい。でも、なかなか図では描けないので、テンソルの定義がいろいろ持って回った感じになっている。図を描こうとすると、地震学でモーメントテンソルを表すのに使う「ビーチボール」くらいなものだが、これもトレース0の対称テンソルでないと使いづらい（「トレース0」「対称テンソル」の意味は後述）。

[**問題** 4] ベクトル

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix} \tag{108}$$

から作った行列

$$U=\begin{pmatrix}u_x&0&0\\0&u_y&0\\0&0&u_z\end{pmatrix} \tag{109}$$

がテンソルを表さないことを説明せよ。u_x、u_y、u_z がベクトルの成分の変換則にしたがうとき、U の成分がテンソルの変換則に従わないことを示せばよい。

[10] 有名な数学者・理論物理学者のヘルマン・ワイルは『空間・時間・物質』の中で、成分に依らない形だけで書こうとするのは不都合だとして、以下のように書いている。「ただテンソルそのものだけでテンソル算を書きあらわそうという試みは、これまでしばしばあった。これは3次元空間におけるベクトル算の成分によらない表現と似たようなものを作ろうとする試みである。しかし、著しく発展したテンソル算の大きな体系にとっては、このような試みはまったく不都合であることがわかった。もしわれわれが絶対に成分にたよらないようにしようとすれば、非常に多数の名称や記号、また多くの計算の規則を導入しなければならない。その結果は意図に反して莫大な損失をせおいこむことになる。われわれはこのようなでたらめな形式主義の跳梁に対し強く抗議しなければならない。」（ちくま学芸文庫版 上巻 p.111）

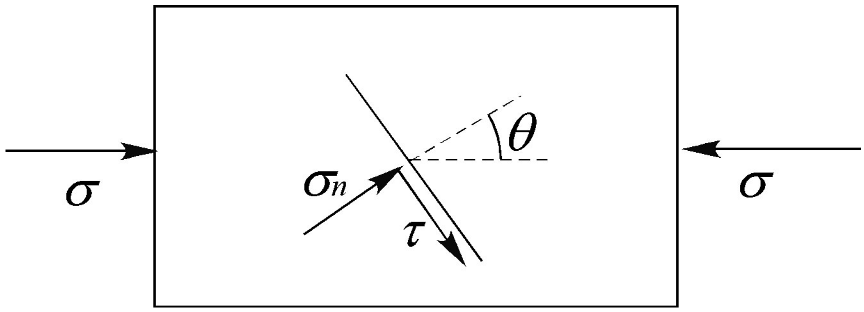

図 1.10: 一軸圧縮の場

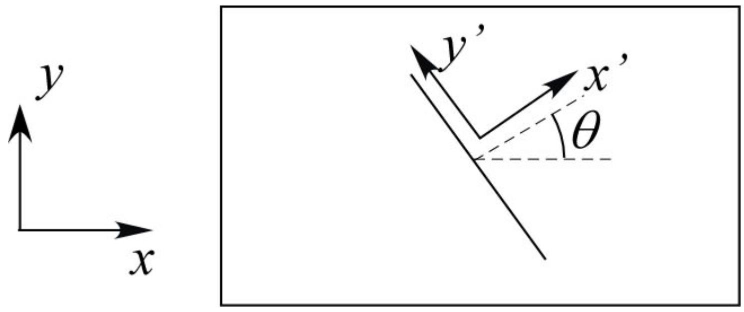

図 1.11: 問題を解くときの軸の取り方

[問題 5] (81) で定義されたテンソルの成分がテンソルの回転座標変換の法則 (106) を満たすことを示せ。

[問題 6] (x, y) 平面の平面応力で、x 方向への一軸圧縮 ($\sigma_{xx} = -\sigma$, その他の$\sigma_{ij} = 0$) の場合に、連続体の中に z 軸を含む平面を考える（図 1.10）。面の法線が x 軸となす角度 θ の関数として、面に働く法線応力 σ_n と剪断応力 τ を表せ。図 1.11 のように座標軸を取り、以下のステップに従って計算せよ。

(1) (x, y) 系から (x', y') 系への座標変換（回転）の行列 R（2×2 行列）を求めよ。

(2) (x, y) 系での応力テンソルを求めよ。

(3) 式 (103) （もしくは、同じことだが式 (106)）を具体的に計算することにより、(x', y') 系における応力テンソルを求めよ。

(4) $\sigma_n (= -\sigma_{x'x'})$ と $\tau (= \sigma_{y'x'})$ を求めよ。

(5) 剪断応力 τ の大きさが最大となる θ が 45 度と 135 度であることを確かめよ。

[問題 7] ある剛体を考えてその慣性モーメントテンソル[11]が

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \tag{110}$$

で表されるような座標 (x, y, z) を考える（慣性主軸という[12]）。その座標に対して方向

[11]定義については、式 (303) 参照。といってもその式の書き方はわかりやすくないので、わからない人は剛体の力学を力学の教科書で復習すること。

[12]1.1.5 節参照

余弦[13]が (l,m,n) であるような軸に関する慣性モーメント $I(l,m,n)$ が

$$I(l,m,n) = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 \tag{111}$$

となることを以下の手順に従って示せ（この事実は以下の手順に従わなくても簡単に分かるのだが、座標変換の練習としてこの手順に従うこと）。方針としては、以下に誘導している方法で z 軸を (l,m,n) の方向に向ける回転変換を行い、その新たな座標系 (x'',y',z') における $I_{z'z'}$ を求める。$I_{z'z'}$ が $I(l,m,n)$ である。

(1) 方向余弦を、極座標を使うように

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{112}$$

と書く。z 軸をこの方向に向けるには、座標軸を z 軸の周りに φ だけ回転して座標系 (x',y',z) を作り、その座標軸をさらに y' 軸の周りに θ だけ回転して座標系 (x'',y',z') を作ればよい。この回転座標変換の行列 R を求めよ。

(2) 式 (103)（もしくは、同じことだが式 (106)）を具体的に計算することにより、$I_{z'z'}$ を求めよ。

1.1.3 テンソルの既約分解

ここでは、テンソルを回転に対する性質の違いによって分解するということを考える。それが、既約分解と呼ばれるものである。その前に、その準備として、対称テンソルと反対称テンソルを定義する。その後、既約分解の概念を導入すると、２階反対称テンソルはベクトル的な量だということが分かるので、実際２階反対称テンソルとベクトル的な量を対応付ける。

1.1.3.1 対称テンソル

２階テンソルを成分で書いたときには

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{113}$$

となるとき、あるいは同じことだが、２階テンソルを２つのベクトルからスカラーへの線形写像 (74) と書いたときには

$$T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) \tag{114}$$

となるとき、テンソル T は**対称テンソル**であるという。

３階以上のテンソルに関しては、その成分の任意の２つの添字を交換しても変わらないときに**対称テンソル**であるという。

定義としては以上のことだけなのだが、物理学では対称テンソルがしばしばでてきて、後で主値を説明するときに見るように対称テンソル特有の性質が役に立つことがある。対称テンソルの例としては、連続体力学で出てくる応力テンソル（特殊な場合には対称でないこともあるが、通常は対称）や歪テンソル、電磁気学で出てくる Maxwell の応力テンソルなどがある。

[13]方向余弦の定義は 1.1.4.1.3 節参照。

1.1.3.2 反対称テンソル

２階テンソルを成分で書いたとき

$$T_{ij} = -T_{ji} \tag{115}$$

となる、あるいは同じことだが、２つのベクトルからスカラーへの線形写像 (74) と書いたとき

$$T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \tag{116}$$

となるとき、テンソル T は**反対称テンソル**であるという。

３階以上のテンソルに関しては、その成分の任意の２つの添字を交換したときに符号が反転するものを**完全反対称テンソル（交代テンソル）**であるという。

３階の完全反対称テンソルの最も簡単なもので、よく計算に使われるものに **Levi-Civita の完全反対称テンソル**と呼ばれるものがある。それは

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (1,3,2),(3,2,1),(2,1,3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{117}$$

と定義される。ϵ_{ijk} を単なる記号と見て、**Levi-Civita の記号** とか **Eddington のイプシロン** とか呼ぶこともある。ϵ_{ijk} に関して次の公式はしばしば用いられる。

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{118}$$

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \tag{119}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{120}$$

[**問題** 8] 上の３つの公式を証明せよ。

1.1.3.3 ２階テンソルの既約分解

1.1.3.3.1 既約分解の定義 ２階以上のテンソルを回転に対する性質の違いを利用して分解するという操作をすることが、たまにある。それを紹介しておく。ただし、これを本当に理解するには回転群の表現論の知識が必要なので、ここでは雰囲気を分かってもらうにとどめる。分解操作自身は、そういうものだと思えば、群論を知らなくてもできる。ここでは、話は２階のテンソルにとどめておく。

座標系を回転しても、対称テンソルは対称テンソルのままであり、反対称テンソルは反対称テンソルのままである。このことは、対称テンソルや反対称テンソルを (114) や (116) のように定義する限り、定義が座標系に依らないので自明である（以下の問題参照）。また、トレースは座標系を回転しても変わらない。ここで、テンソル T の **トレース**とは、

$$\mathrm{tr}\mathsf{T} \equiv \sum_{i=1}^{3} T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{121}$$

で定義される量である。実際、座標変換

$$T'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} R_{ik}R_{jl}T_{kl} \tag{122}$$

によって、

$$\mathrm{tr}\mathsf{T}' = \sum_{i=1}^{3} T'_{ii} = \sum_{i,k,l=1}^{3} R_{ik}R_{il}T_{kl} = \sum_{k,l=1}^{3} \delta_{kl}T_{kl} = \sum_{k=1}^{3} T_{kk} = \mathrm{tr}\mathsf{T} \tag{123}$$

である。そこで、テンソル T を以下のように回転によってお互いに移り変わらない３つの部分に分解することができる。

$$\mathsf{T} = \mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C} \tag{124}$$

ここで、

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} T_{kk}\delta_{ij} \tag{125}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \tag{126}$$

$$C_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} T_{kk}\delta_{ij} \tag{127}$$

である。A は、トレースが 0 の対称テンソル、B は反対称テンソル（反対称テンソルは、いつもトレースが 0 である）、C は恒等テンソルの定数倍である。これら３つの部分は回転してもお互いに混ざり合わない。

[問題 9] 対称テンソルや反対称テンソルの定義を成分で (113) や (115) のように成分で定義するとき、回転座標変換によって対称テンソルが対称テンソルに、反対称テンソルが反対称テンソルに移ることを成分を用いて示せ。

なお、ここで述べたことを、群論の言い方で言えば、以下のようなことになる[14]。２階のテンソルは９つの成分がある９次元の線形空間である。そうみると、回転に対するテンソルの変換則

$$T'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} R_{ik}R_{jl}T_{kl} \tag{128}$$

の変換行列 $R_{ik}R_{jl}$ は回転群の表現、すなわち (ij) 成分と (kl) 成分の間の９次元表現とみなすことができる（積表現）。この９次元表現は既約ではなくて、５次元＋３次元＋１次元の既約表現に簡約できる。２階テンソルの既約分解はこの簡約に対応している。回転群の１次元の既約表現は恒等表現だから、成分 C はスカラー的な量であるということができる。ベクトルの回転変換行列は回転群の３次元の既約表現だから、成分 B はベクトル的な量であるということができる。この話は３階以上のテンソルにも拡張できる。

1.1.3.3.2　既約分解の物理学への応用　弾性体力学においては、1.1.2.5 節で定義した変形勾配テンソル $F_{ij} \equiv \partial x_i/\partial \xi_j$ $(\{x_i\} = \{x, y, z\}; \{\xi_i\} = \{\xi, \eta, \zeta\})$ をしばしば次のように分解する。

$$F_{ij} = E_{ij} + \Omega_{ij} + \frac{1}{3}D\delta_{ij} \tag{129}$$

[14] 群の表現論を知らない人は、この段落がわからなくて当然なので、飛ばして読まれたい。結論の一つ「成分 B がベクトル的な量である」ということだけが次の節と関係がある。

ここで

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\right) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_k}\delta_{ij} \tag{130}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\right) \tag{131}$$

$$D = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_k} \tag{132}$$

である。E_{ij} は歪テンソルのうちの体積変化を除いた部分、Ω_{ij} は回転テンソル、D は体積膨張率である。こうしておくと、等方弾性体の応力と歪の関係は

$$\sigma_{ij} = 2\mu E_{ij} + KD\delta ij \tag{133}$$

と書くことができる。ここで μ は剛性率、K は体積弾性率（非圧縮率）である。

1.1.3.4 （完全）反対称テンソルと星印作用素

２階反対称テンソルは

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{134}$$

という形をしているので、独立な成分は３つである。そこで、この３つの成分を持つベクトルと１対１に対応が付けられる。前節 1.1.3.3 の既約分解からも２階テンソルの反対称部分がベクトル的な量であることがわかる。

そこで、具体的には、２階反対称テンソル A からベクトルへの**星印作用素** * を

$$({}^*A)_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_{jk} \tag{135}$$

と定義し、逆に、ベクトル A から２階反対称テンソルへの星印作用素を

$$({}^*A)_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_k \tag{136}$$

と定義すると、この星印作用素が２階反対称テンソルとベクトルとの対応を与える。１対１対応なので、ベクトル A もしくは２階反対称テンソル A に対して、

$$^{**}A = A \tag{137}$$

である。

３階完全反対称テンソルは

$$A = (a\epsilon_{ijk}) \tag{138}$$

という形をしており、独立な成分は１つしかない。そこで、スカラーと１対１の対応がある。具体的には、３階完全反対称テンソル A からスカラーへの**星印作用素** * を

$$^*A = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_{ijk} \tag{139}$$

と定義し、逆に、スカラー A から３階完全反対称テンソルへの星印作用素を

$$({}^*A)_{ijk} = \epsilon_{ijk} A \tag{140}$$

と定義すると、この星印作用素が３階反対称テンソルとスカラーとの対応を与える。１対１対応なので、スカラー A もしくは３階完全反対称テンソル A に対して、

$$^{**}A = A \tag{141}$$

である。

[問題 10] ３次元の場合、４階の完全反対称（交代）テンソルは零テンソル以外には存在しないことを証明せよ。

1.1.4 ベクトルやテンソルの積

ベクトルやテンソルには何通りかの「積」が定義されている。それらを見てゆこう。もちろん内積と外積が一番普通に使われる「積」[15]であるが、それ以外にもいくつかの「積」がある。

一般に「積」は、２つのベクトル（やテンソル）の双線型関数である。したがって、先の写像としてのテンソルの定義によれば、テンソルの一種であるという言い方もできる。

本講義のような話の流れだと、ベクトルの基本は線型空間であるということで、積は単にそれに付随する演算ということになるが、歴史 (1.1.8 節) を見てゆくと、ベクトルに意味のある積（内積や外積）が定義できるかどうかが、ベクトルの発明の上では鍵だったということがわかる。今から見れば、内積や外積がないと、物理学上重要なことがらが簡潔に表現できないので、当然といえば当然ではあるが。

1.1.4.1 ベクトルの内積

1.1.4.1.1 内積の定義 ２つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積（スカラー積、ドット積）**は、

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{142}$$

と定義される。テンソルが２つのベクトルからスカラーへの双線形関数であるという立場で言えば、これは恒等テンソル

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{143}$$

に相当する。同じことだが、単位ベクトルに対する作用は

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1 \tag{144}$$
$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \tag{145}$$
$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0 \tag{146}$$

となり、まとめて表現すると、

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{147}$$

[15] 1.1.8.2 節で見るようにこれらは四元数から自然に出てくる。

となる。
　内積には対称性

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \quad \text{（交換法則）} \tag{148}$$

と双線形性

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{（分配法則）} \tag{149}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{（分配法則）} \tag{150}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{151}$$

がある。
　ベクトルの大きさは、

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} \tag{152}$$

で表される。成分で書けば、

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{153}$$

となるので、これはもちろんベクトルの幾何学的な長さを表す。ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを、単に a と書くことも多い。

1.1.4.1.2　[参考] 拡張された内積　内積の概念には、考える空間によっていろいろ拡張されたバージョンがある。内積は、より一般的には２つのベクトルの対称な双線形関数である。たとえば、特殊相対論を考える時には $(x_0,x_1,x_2,x_3)=(ct,x,y,z)$ という４次元時空を考えて、

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{154}$$

のような内積を考える（Minkowski 空間）。また、関数空間の内積は、実関数 $f(x),g(x)$ に対しては

$$f\cdot g=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)dx \tag{155}$$

のように定義できる。

1.1.4.1.3　ベクトルの内積の幾何学的な意味　内積には、皆さんも御承知の通りの（高校生でも習う）幾何学的な意味がある。２つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がともに零ベクトルでないときは，それらのなす角を θ とすると

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{156}$$

が成り立つ。したがって、$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して

$$\boldsymbol{a}\text{と}\boldsymbol{b}\text{が直交する} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{157}$$

ということになるし、

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \tag{158}$$

という性質があることもすぐにわかる。
　ベクトルが座標軸となす角度の cos を**方向余弦**という。$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ が x 軸，y 軸，z 軸となす角を α,β,γ とするとき、方向余弦 (l,m,n) は

$$l = \cos\alpha \tag{159}$$

$$m = \cos\beta \tag{160}$$

$$n = \cos\gamma \tag{161}$$

と表される。内積を用いて考えると

$$l = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{162}$$

$$m = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{163}$$

$$n = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{164}$$

となる。このことから

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{165}$$

が成り立っていることも分かる。

1.1.4.1.4　ベクトルの内積の物理学への応用　物理学で、内積がいろいろな場面で現れるのは皆さんご存知だろう。なので、あまりたくさん例を挙げてもしかたがないから、一つだけ例を挙げる。質点の力学では、仕事が

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} \tag{166}$$

のように、力 $\boldsymbol{F}$ と動いた距離 $\Delta\boldsymbol{r}$ の内積としてあらわされる。力のうちで、力学的意味での「仕事」に効くのは、質点が動く方向の成分だけであることを示している。

1.1.4.2　テンソルの内積

1.1.4.2.1　テンソルの内積の定義　２階テンソルに対しても**内積（２重内積、２重ドット積）**を定義できる。２つのテンソル $\underline{\underline{A}}$ と $\underline{\underline{B}}$ との内積は

$$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ij} \tag{167}$$

と定義される。ここで、記号 : は、成分で書いたときに２つの添字についての和を取ることを象徴している。これは、ベクトルの内積記号 · が１つの添字についての和を取ることを象徴しているとみて、拡張したものである。

２階テンソルの大きさは

$$|\underline{\underline{A}}| = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{A}}} \tag{168}$$

である。なお文献によっては、素直に

$$|\underline{\underline{A}}| = \sqrt{\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{A}}} \tag{169}$$

としているものもある。ベクトルと違って、幾何学的な意味が無いので、係数の取り方には任意性がある。前者の定義で 1/2 を付ける気分は、テンソルの非対角成分が重要になる場合には以下のように理解できる。２階反対称テンソル A （対角成分が 0）では、このように定義したときに

$$|A| = |{}^*A| \tag{170}$$

が成り立つ。すなわち、星印作用素で対応するベクトルの大きさと等しくなる。また、対称テンソルでたとえば $A_{12}(=A_{21})$ だけが大きくなるような場合に

$$|\underline{\underline{A}}| \simeq A_{12} \tag{171}$$

となる。さらには、1.1.5.4 節で定義される２階テンソルの第二不変量にも 1/2 が付いているので[16]、それと合わせるという意味もある。

1.1.4.2.2　テンソルの内積の物理学への応用例　物理学で内積が出てくる場面の一例には、次のようなものがある。流体力学で運動エネルギーの式を書くと

$$\text{（応力テンソル）}:\text{（速度勾配テンソル）} \tag{172}$$

という形の項が現れる。

テンソルの大きさを使う例として、マントル物質の非線形レオロジーを挙げておこう。マントルは固体だからレオロジーが通常のニュートン粘性と違っていても驚かないだろう。実際、主要な変形メカニズムとして転位クリープが考えられており、その場合、偏差応力 τ と歪速度 $\dot{e}$ は比例せず、実験式としては

$$\dot{e} = \frac{1}{2\mu B}\left(\frac{\tau}{G}\right)^{n-1}\tau \tag{173}$$

のような関係であらわされる。ここで、n が非線形性を表す定数で 3.5 くらいの数値になる。μ は粘性率、G は剛性率、B は無次元の定数である。ところが、これは１次元の関係式である。というのも、実験では、いろいろな方向から応力をかけたりいろいろな方向の歪を測ったりするのは難しいから、３次元的な関係式を決定するのは難しいからである。しかし、マントル対流のシミュレーションをするには３次元の関係式が必要である。これをどのように３次元に拡張したらよいのだろうか？ニュートン粘性の場合は偏差応力テンソル τ_{ij} と歪速度テンソル $\dot{e}_{ij}$ は

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\tau_{ij} \tag{174}$$

のように結びついている。そこで、上二つの式を単純に混ぜ合わせて

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu B}\left(\frac{\tau}{G}\right)^{n-1}\tau_{ij} \tag{175}$$

としてはどうだろうかということを思いつく。ここの τ は応力の大きさを代表する量で、それにテンソルの大きさ (168) が使われている。

1.1.4.3　行列の積としての記法

ベクトルとテンソルが関わる演算で行列の積の形で書けるものがある。呼称は教科書によってまちまちである。これを内積と呼んでいるものもあるが、本講義では紛らわしいので内積とは呼ばない。

前に 1.1.2.3 でやったように、ベクトルからベクトルへの線形写像の形 (55) で定義された２階テンソル

$$\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{u}) \tag{176}$$

は、成分で書くと

$$v_i = \sum_{i=1}^{3} T_{ij}u_j \tag{177}$$

と書くことができる。右辺は行列の積の形をしているから、このことを

$$\underline{v} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u} \tag{178}$$

[16]正確に言えば、1.1.5.4 節で説明されるように、こう定義しておくと、トレース 0 のテンソルでは、第二不変量はテンソルの大きさの自乗にマイナスを付けたものになる。

とか[17]、単に

$$\underline{v} = \underline{\underline{T}}\underline{u} \tag{179}$$

と書くことがある。前者の · は、１つの添字についての和を取ることを表し、後者は、行列の積のつもりで積の記号を書かない。しかし、後者のように積記号を書かないやり方は、後述のテンソル積で用いられることもあり紛らわしいので、本講義では使用しない。

やはり２階テンソルをベクトルからベクトルへの線形写像の形 (55) で定義したとき、ベクトル $\boldsymbol{u}$ を写像 T で変換し、それをさらに写像 S で変換するということがある。

$$\boldsymbol{v} = S(T(\boldsymbol{u})) \tag{180}$$

これを成分で書くと

$$v_i = \sum_{j,k=1,3} S_{ij}T_{jk}u_k \tag{181}$$

と書くことができる。この T と S の合成写像（２階テンソル）は、行列の積の形で書けているので、

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{T}} \tag{182}$$

とも書くことができる。この中点（·）も１つの添え字についての和を取ることを表している。この場合も積記号を書かない流儀もあるが、本講義では紛らわしいのでそうしない。

1.1.4.3.1　内積や行列の積の応用例〜歪みテンソル　こういった内積やら行列の積の形を使う例として、歪みテンソルを挙げておこう。1.1.2.5 節で、変形の記述には変形勾配テンソルを使うことを学んだ。ところが、その節の問題でも分かる通り、このテンソルは回転を表すこともある。ここでは、変形を表すが、回転を含まないようなテンソルを一つ紹介する（このようなテンソルは他にもある）。

変形勾配テンソルで表される微小領域の変形において、微小ベクトルの大きさがどのように変化するかを考える。変形

$$\boldsymbol{x} = \mathsf{F} \cdot \boldsymbol{\xi} \tag{183}$$

において、変形前のベクトル $\boldsymbol{\xi}$ と変形後のベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さの２乗の変化を見てみる。すると、

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2 &= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \\
&= (\mathsf{F} \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathsf{F} \cdot \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} F_{ki}\xi_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3} F_{kj}\xi_j \right) - \sum_{k=1}^{3} \xi_k \xi_k \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{3} F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij} \right) \xi_j \\
&= \boldsymbol{\xi} \cdot \left(\mathsf{F}^T \cdot \mathsf{F} - \mathsf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} \\
&= 2\boldsymbol{\xi} \cdot \mathsf{G} \cdot \boldsymbol{\xi}
\end{aligned} \tag{184}$$

となる。ただし、F^T はテンソル F を行列と見たときの転置を表しており、I は恒等テンソルである。最後の変形で、テンソル

$$\mathsf{G} = \frac{1}{2}\left(\mathsf{F}^T \cdot \mathsf{F} - \mathsf{I} \right) \tag{185}$$

[17] 文献によっては、$\underline{v} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}$ で $v_j = \sum_{i=1}^{3} u_i T_{ij}$ を表していることもあるので注意されたい。

を導入した。これは、グリーンの有限歪みテンソルと呼ばれる量である。これは、長さの２乗の変化を表しているのだったから、変形勾配テンソルが純粋に回転を表しているときは零テンソルになる。なお、このテンソルはベクトル $\boldsymbol{\xi}$ から長さの２乗の差というスカラー量を式 (184) によって与えるものだから、1.1.2.6 節で書いたように

$$|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2 = 2G(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \tag{186}$$

だと見るのも自然である。

1.1.4.4　テンソル積

1.1.4.4.1　テンソル積の定義　２つのテンソル（階数が異なっていても良い）

$$\mathsf{S} = (S_{ij}), \quad \mathsf{T} = (T_{ijk}), \tag{187}$$

に対して、すべての成分の相互の積を成分にもつテンソルを**テンソル積**と定義する。

$$\mathsf{S} \otimes \mathsf{T} = (S_{ij} T_{klm}), \tag{188}$$

p 階テンソルと q 階テンソルのテンソル積は $p+q$ 階テンソルになる。

記号として、積記号を省略して単に ST と書く場合もある。しかし、それは行列としての積と紛らわしいので、本講義では必ず $\otimes$ を用いることにする。

２つのベクトルのテンソル積のことをとくに**ディアド** (dyad)、**ダイアド**や**ディアド積** (dyadic product) と呼ぶこともある。ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のディアドというときには、積記号を略して $\boldsymbol{ab}$ と書くのがむしろ普通である。さらに、ディアドの和 $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} + \cdots$ の形のものを**ディアディック** (dyadic) や**ダイアディクス**と呼ぶ。しかし、任意の２階のテンソルがこのディアディックの形で書けることから、取り立ててディアディックと言わなくても２階のテンソルと言えば事足りる。そこで、いろいろな紛れを避けるためにも、本講義ではディアド（積）やディアディックという言葉は使わないし、積記号 $\otimes$ を省略することもしない。

テンソル積は、座標に依存しない形で定義することもできる。以下では２つのベクトルのテンソル積を例にして説明する。

まず、２階テンソルをベクトルからベクトルへの線形写像という形 (55) で定義するとき、ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のテンソル積は

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} \tag{189}$$

と定義できる。このテンソルの成分は確かに

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{b}) = a_i b_j \tag{190}$$

となって、先の成分による定義と一致する。

次に、２階テンソルを２つのベクトルからスカラーへの線形写像という形 (74) で定義するとき、ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のテンソル積は

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{191}$$

と定義できる。このテンソルの成分は、やはり確かに

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} = (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_j) = a_i b_j \tag{192}$$

となって、先の成分による定義と一致する。

1.1.4.4.2 テンソル積の記法の便利な利用法

[1] この記法の便利な利用法として、テンソルの基底の表現がある。たとえば、２階テンソルは

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{193}$$

のように表現できる。すなわち、基底は $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ のように表せる。実際、テンソルを２つのベクトルからスカラーへの線形写像という形 (74) で定義するとき、上の T を用いれば

$$T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=1}^{3} u_i T_{ij} v_j \tag{194}$$

となり、先の (82) と一致する。この基底を行列の形で書けば、たとえば、

$$\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{195}$$

のようになる。

[2] ２階テンソルをベクトルからベクトルへの線形写像とみるとき、ベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向への射影を表す写像は

$$P_{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \otimes \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \tag{196}$$

と表現することができる。とくに、座標軸方向 ($\boldsymbol{e}_i$ 方向) への射影は

$$P_i = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \tag{197}$$

と表すことができる。

[3] 以下の関係が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = I \tag{198}$$

ただし、I は恒等テンソルである。このことは、上の [1] のように成分表示の行列で書いてしまうと当たり前であることがわかる。さらに、必ずしも座標軸の方向を向いていない正規直交基底 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ に対しても、

$$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i \otimes \boldsymbol{p}_i = I \tag{199}$$

が成立する。このことは、座標軸を回転して $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ が座標軸を向くようにすれば、I は座標変換しても成分が変わらないので成立することがわかる。

幾何学的には、直交する３つの方向にベクトルを射影して、それを合成すると元に戻るということである。なので、明らかに成り立つと言っても良いであろう。

[4] 上の式 (198) を用いると、以下のようにして式 (37) を再び求めることができる。

$$\begin{aligned} v_i' &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i' & (200)\\ &= \boldsymbol{v}\cdot I(\boldsymbol{e}_i') & (201)\\ &= \boldsymbol{v}\cdot\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i') & (202)\\ &= \boldsymbol{v}\cdot\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j & (203)\\ &= \sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_j) & (204)\\ &= \sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j)v_j & (205)\end{aligned}$$

となることから、座標変換の式 (16) と比べて

$$R_{ij} = \boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j \tag{206}$$

を得る。これは、式 (37) である。

1.1.4.4.3 テンソル積の物理学への応用 物理学で登場するテンソル積には、たとえば、流体力学における運動量流束テンソル

$$\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} \tag{207}$$

だとか、電磁流体力学における Maxwell 応力テンソル

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\underline{B}\otimes\underline{B}-\frac{1}{2}B^2\underline{\underline{I}}\right) \tag{208}$$

(SI 単位系の場合) などがある。ただし物理学では $\otimes$ を省略して $\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}$ とか $\mu_0{}^{-1}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}-(1/2)B^2\boldsymbol{I}]$ などと書いてしまうことの方が多い

1.1.4.5 ベクトルの外積

1.1.4.5.1 外積の定義 2つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の**外積（ベクトル積、クロス積）**は、

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}a_jb_k \tag{209}$$

という成分を持つベクトルとして定義される。3階のテンソルを2つのベクトルからベクトルへの線形写像と定義すると、Levi-Civita の完全反対称テンソル ϵ_{ijk} が外積を表すテンソルということになる。外積は、形式的には、

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{210}$$

と行列式の形に表しておくと覚えやすい.

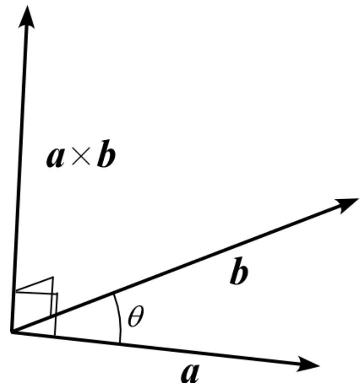

図 1.12: ベクトルの外積

外積には反対称性

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{211}$$

と双線形性

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \quad \text{（分配法則）} \tag{212}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \quad \text{（分配法則）} \tag{213}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{214}$$

がある。さらに、式 (211) において $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ とすることで、ただちに

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{215}$$

が導かれる。

特に基底に対しては

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0} \tag{216}$$

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{217}$$

が成り立つ。

1.1.4.5.2 ベクトルの外積の幾何学的な意味 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がともに零ベクトルでないとし、それらのなす角を θ $(0\le\theta\le\pi)$ とする（図 1.12）。すると、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交する長さ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ のベクトルである。この長さは、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす平行四辺形の面積を表している。$\boldsymbol{a}$ を右手の親指の方向に、$\boldsymbol{b}$ を人差指の方向にあわせたとき、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は中指の方向である。このことを $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ は**右手系**であると表現する。

[問題 11] 外積の幾何学的な意味が上記のようなものであることを、次の手順で示せ。

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ と $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が 0 になることを確かめることで、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交することを示せ。

(2) 以下の恒等式[18]が成り立つことを示せ。

$$(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)\cdot(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 \end{vmatrix} \tag{218}$$

なお、右辺の $|\cdot|$ は行列式である。

[18] これは、Binet-Cauchy の恒等式 (Cauchy-Binet の公式と書いてあるものもある）と呼ばれるものの一例である。

(3) 上の式で $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}$ と置くことにより、以下の恒等式[19]が成り立つことを示せ。

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \tag{219}$$

(4) 上の式を用いて、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさが $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ であり、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす平行四辺形の面積を表していることを説明せよ。

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行であるのは $\theta = 0$ または π のときであるから

$$\boldsymbol{a}\text{と}\boldsymbol{b}\text{が平行} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{220}$$

1.1.4.5.3　ベクトルの外積の物理学への応用　物理学では、外積はいろいろな場面で現れる。一つだけ例を挙げると、質点の力学では、角運動量が

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{221}$$

のように、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量 $\boldsymbol{p}$ の外積としてあらわされる。

1.1.4.6　３重積

２種類の３重積と呼ばれるものが出てくることがある。

1.1.4.6.1　スカラー３重積　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し、

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{222}$$

を**スカラー３重積**とよぶ。ベクトルを成分で表すと

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{223}$$

のように行列式で書ける。

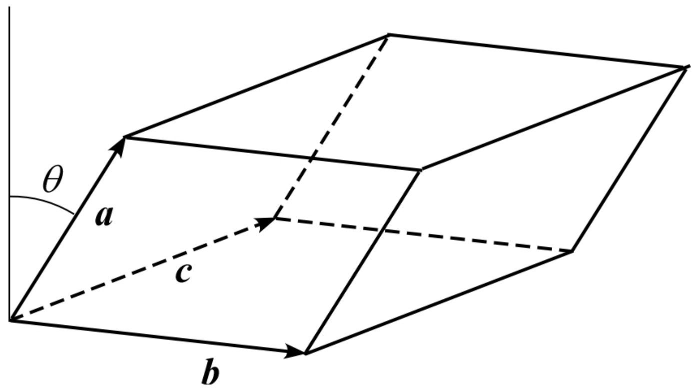

図 1.13: スカラー３重積

幾何学的には、スカラー３重積は、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で張られる平行六面体の（符号付きの）体積になる（図 1.13）。符号は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系をなす場合は正、左手系の場合は負になる。実

[19] これは、Lagrange の恒等式と呼ばれるものの 3 次元版である。

際、図 1.13 において $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ で張られる平行四辺形の面積は $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$ であり、この平行四辺形を底面とみたときの平行六面体の高さは $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ であるから，体積 V は

$$V = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})| \tag{224}$$

となる。

これに関連して、変形勾配テンソル F は、行列で書くと

$$\mathsf{F} = (F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), F(\boldsymbol{e}_3)) \tag{225}$$

のように書けることから F を行列と見たときの行列式 $|\mathsf{F}|$ は、変形前の大きさ１の立方体が変形した後の体積を表すことになる。

1.1.4.6.2 ベクトル３重積 ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対し、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ や $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ をベクトル３重積という。一般に $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ と $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ は異なる。すなわち、外積は結合則を満たさない。ベクトル３重積については次の関係式が成り立つ。

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{226}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{227}$$

とくに、$\boldsymbol{n}$ をとある単位ベクトルとして、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}$ と置いて第１の式を適用すると

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{c} \tag{228}$$

となり、項を並べ替えると

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{c}) \tag{229}$$

が得られる。右辺第１項はベクトル $\boldsymbol{c}$ を単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向に射影したものだから、右辺第２項の $-\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{c})$ はベクトル $\boldsymbol{c}$ のうちの単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ と垂直の成分となることがわかる。これは外積の図形的意味を考えてみることでもわかる。このことの応用としては、角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する系における位置 $\boldsymbol{r}$ にある質点 m にはたらく遠心力が

$$-m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{230}$$

と書けるということがある。これは大きさが $Ms\Omega^2$（s は回転軸と質点との間の距離)、向きが回転軸と垂直で回転軸から離れる向きのベクトルである。

[問題 12] 上の関係式 (226)、(227) が成立することを確かめよ。

[問題 13] ベクトル三重積に関して以下の恒等式（Jacobi の恒等式）が成り立つことを確かめよ。

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0 \tag{231}$$

1.1.4.6.3 [参考] Lie 代数 上の問題にある Jacobi の恒等式に関係して、Lie 代数を簡単に定義しておく。

外積が定義された線型空間を抽象化したものを Lie 代数と呼ぶ。Lie 代数とは、積 $[X,Y]$ が定義された線型空間で、その積が以下の２つの性質を持っているものをいう。

(a) 反交換性：$[X,Y] = -[Y,X]$

(b) Jacobi 恒等式：$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$

物理学では、解析力学の Poisson 括弧や量子力学の演算子の交換関係がこの性質を持っており、Lie 代数の数学の重要な応用例となっている。

1.1.4.6.4　３元連立一次方程式に関する Cramer の公式　スカラー３重積とベクトル３重積の公式を用いると３元連立一次方程式に関する Cramer の公式を導くことができる。考える３元連立一次方程式を x, y, z を未知数として

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \tag{232}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{233}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \tag{234}$$

と書く。それぞれの式に基底を付けて

$$a_1\boldsymbol{e}_1x + b_1\boldsymbol{e}_1y + c_1\boldsymbol{e}_1z = d_1\boldsymbol{e}_1 \tag{235}$$
$$a_2\boldsymbol{e}_2x + b_2\boldsymbol{e}_2y + c_2\boldsymbol{e}_2z = d_2\boldsymbol{e}_2 \tag{236}$$
$$a_3\boldsymbol{e}_3x + b_3\boldsymbol{e}_3y + c_3\boldsymbol{e}_3z = d_3\boldsymbol{e}_3 \tag{237}$$

と書き直す。ここで、

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{3} c_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{d} = \sum_{i=1}^{3} d_i\boldsymbol{e}_i \tag{238}$$

と書くと

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} \tag{239}$$

となる。

　ここまで準備をしておいて、やや唐突だが $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$ という量をベクトル３重積の公式を用いて計算する。すると、

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}]\boldsymbol{c} - [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]\boldsymbol{d} = [\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\boldsymbol{b} - [\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\boldsymbol{a} \tag{240}$$

である。ここにスカラー３重積が現れているので、スカラー３重積の記号を用いて書き直すと

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}\boldsymbol{c} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}\boldsymbol{d} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}\boldsymbol{b} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}\boldsymbol{a} \tag{241}$$

となる。この中辺と右辺に注目して、適宜並び替えると

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}\boldsymbol{d} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}\boldsymbol{a} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}\boldsymbol{b} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}\boldsymbol{c} \tag{242}$$

となる[20]。$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \neq 0$ とすると、

$$\boldsymbol{d} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}\boldsymbol{a} + \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}\boldsymbol{b} + \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}\boldsymbol{c} \tag{243}$$

となる。これは、任意のベクトル $\boldsymbol{d}$ を、任意の線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線形結合として表現するやり方を示している。と同時に、これと連立方程式 (239) を比べて、方程式の解として

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}} \tag{244}$$

が得られる。これは Cramer の公式である。

[20] この式は、３次元では４つのベクトルが線形独立になり得ないことを示している。

1.1.4.7　くさび積

ふつう物理学の教科書で出てくる積は、以上のものだけで十分なのだが、外積の類似品として「くさび積」を紹介しておくことにする。数学的には、外積と実質的に同じだが、外積よりもスマートな量である。先に定義した外積は、直接的には３次元でだけしか使えないという欠点がある（1.1.4.7.4 節で説明するように多次元に拡張するやり方は一応はある）。それに対して、くさび積は自然に多次元に拡張できる[21]（しかし、ここではそのことは説明せず、３次元の場合に話を限る）。さらに、以下で見るように、くさび積は、面積を表す外積と体積を表すスカラー３重積とを統一的に表現できる。

1.1.4.7.1　２つのベクトルのくさび積　外積は、２つのベクトルの双線形で反対称な線型関数であった。そこで素直に、２つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から以下のようにして２階反対称テンソルを作る。

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} \tag{245}$$

これが**くさび積**（**ウエッジ積**、**交代積**、あるいはこれを **外積** と呼ぶこともある）である。定義を言葉で言えば、２つのベクトルのテンソル積を反対称化したものということになる。成分を書き下してみると

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \sum_{i,j=1}^{3} (a_i b_j - b_i a_j) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 - b_1 a_2 & a_1 b_3 - b_1 a_3 \\ a_2 b_1 - b_2 a_1 & 0 & a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 & a_3 b_2 - b_3 a_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{246}$$

となる。外積ベクトルの成分が現れているから、外積と本質的には同じものであることが分かる。

２つのベクトルのくさび積、あるいは一般に２階反対称テンソルの基底は

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \underline{\underline{0}} \tag{247}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{248}$$

$$\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{249}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{250}$$

となり、独立なものは３つである。

このくさび積と外積との関係は (246) から明らかではあるが、形式的には 1.1.3.4 で定義された星印作用素を用いて表現できる。

$$({}^*(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))_{ij} = \sum_{k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} a_l b_m = \sum_{l,m=1}^{3} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_l b_m = a_i b_j - a_j b_i = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})_{ij} \tag{251}$$

なので、

$${}^*(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \tag{252}$$

[21] くさび積が作る代数を、1.1.8.4 節で紹介するグラスマンの業績に因んでグラスマン代数と呼ぶ。

と書くことができる。逆に、

$$({}^*(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}))_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}(a_jb_k - b_ja_k) = \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}a_jb_k = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i \tag{253}$$

なので、

$${}^*(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{254}$$

と書くことができる。このように、外積は星印作用素でくさび積に関係づけられる。

外積と同様、くさび積には

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} \neq \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\text{ と }\boldsymbol{b}\text{ は線型独立} \tag{255}$$

という性質がある。

[問題 14] 外積を幾何学的意味を説明した節 1.1.4.5.2 の問題にあった恒等式をくさび積を用いて書き直した以下の恒等式を示せ。

(1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2):(\boldsymbol{b}_1\wedge\boldsymbol{b}_2) &= 2\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2\\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2\end{vmatrix}\\ &= 2(\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2):(\boldsymbol{b}_1\otimes\boldsymbol{b}_2)\\ &= 2(\boldsymbol{a}_1\otimes\boldsymbol{a}_2):(\boldsymbol{b}_1\wedge\boldsymbol{b}_2)\end{aligned} \tag{256}$$

なお、右辺の $|\cdot|$ は行列式である。

(2)

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}):(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{vmatrix}\\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\\ &= (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}):(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\end{aligned} \tag{257}$$

[問題 15] ベクトル３重積は、くさび積を用いて以下のように書けることを示せ。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \tag{258}$$

1.1.4.7.2 ベクトルと２階反対称テンソルの間のくさび積 次に、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と２階反対称テンソル B の間のくさび積を定義する。添字について反対称になるように３階テンソルを作る。

$$(\mathsf{a}\wedge\mathsf{B})_{ijk} = a_iB_{jk} + a_jB_{ki} + a_kB_{ij} \tag{259}$$

こうしておくと、たとえば

$$(\mathsf{a}\wedge\mathsf{B})_{jik} = a_jB_{ik} + a_iB_{kj} + a_kB_{ji} = -a_iB_{jk} - a_jB_{ki} - a_kB_{ij} = -(\mathsf{a}\wedge\mathsf{B})_{ijk} \tag{260}$$

などから、これが完全反対称テンソルであることが分かる。すなわち、

$$(\mathsf{a}\wedge\mathsf{B})_{ijk} = (a_1B_{23} + a_2B_{31} + a_3B_{12})\epsilon_{ijk} \tag{261}$$

である。あるいは、星印作用素を用いれば、

$$(\mathsf{a}\wedge\mathsf{B})_{ijk} = (a_1({}^*\mathsf{B})_1 + a_2({}^*\mathsf{B})_2 + a_3({}^*\mathsf{B})_3)\epsilon_{ijk} = (\boldsymbol{a}\cdot({}^*\mathsf{B}))\epsilon_{ijk} \tag{262}$$

とも書くことができる。

1.1.4.7.3　３つのベクトルのくさび積　３つのベクトルのくさび積は、上のベクトルと２階反対称テンソルの間のくさび積から自然に導かれる。成分で書くと

$$(\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}))_{ijk} = a_i(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}))_{jk} + a_j(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}))_{ki} + a_k(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}))_{ij} \tag{263}$$

$$= a_i(b_jc_k - c_jb_k) + a_j(b_kc_i - c_kb_i) + a_k(b_ic_j - c_ib_j) \tag{264}$$

$$= a_ib_jc_k + b_ic_ja_k + c_ia_jb_k - a_ic_jb_k - b_ia_jc_k - c_ib_ja_k \tag{265}$$

である。同様にすれば

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) \tag{266}$$

であることも導くことができる。そこで、くさび積には結合則が成り立つことがわかる（外積では成り立たなかったことを思い出そう。くさび積の方が外積よりも積としての性質が良い。）。したがって、掛け算の順序を示す括弧は省略して良い。

成分を出さない形で３つのベクトルのくさび積を書くと、

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a} \tag{267}$$

となる。これは完全反対称テンソルなので、独立な成分は一つしかない。それを求めてみると、

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})_{ijk} = a_ib_jc_k + b_ic_ja_k + c_ia_jb_k - a_ic_jb_k - b_ia_jc_k - c_ib_ja_k \tag{268}$$

$$= \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \tag{269}$$

$$= \epsilon_{ijk}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{270}$$

となる。これは、本質的にスカラー３重積と同じものである。

零テンソルでない基底は、

$$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 \tag{271}$$

$$= -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1 \tag{272}$$

$$= (\epsilon_{ijk}) \tag{273}$$

で、独立なものは１つである。これは、３階完全反対称テンソルの基底でもある。

このくさび積とスカラー３重積との関係は、1.1.3.4 で定義された星印作用素を用いて表現できる。

$$({}^*(\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}))_{ijk} = \epsilon_{ijk}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})_{ijk} \tag{274}$$

なので、

$${}^*(\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}) = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} \tag{275}$$

と書くことができる。逆に

$${}^*(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \tag{276}$$

となる。このように、スカラー３重積は星印作用素でウェッジ積に関係づけられる。

スカラー３重積と同様、くさび積には

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \neq \underset{\equiv}{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ は線型独立} \tag{277}$$

という性質がある。

1.1.4.7.4　外積の n 次元への拡張　本講義は基本的に 3 次元空間しか扱っていないが、外積の n 次元空間の拡張の仕方について少しだけ触れておく[22]。外積の拡張はそれほど自明ではない。

まず、ここまで学んできたことからすぐに考えられることは以下のとおりである。くさび積の n 次元への拡張は

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} \tag{278}$$

を n 次元ベクトルの関係だと解釈すればよいだけなので、２つのベクトルの間の外積は次元に依らず

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =^* (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \tag{279}$$

だと考えるということである。n 次元星印作用素の意味をまだ定義していないが、成分で書いたとき以下のようにすれば良い。Levi-Civita 記号を

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1 & (i_1 i_2 i_3 \dots i_n) \text{ は } (123 \dots n) \text{ の偶置換} \\ -1 & (i_1 i_2 i_3 \dots i_n) \text{ は } (123 \dots n) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{280}$$

と定義して

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_{k_1 k_2 \dots k_{n-2}} = \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{k_1 k_2 \dots k_{n-2} ij} a_i b_j \tag{281}$$

とする。ただし、こう定義した場合、2 次元の外積はスカラー、4 次元の外積は 2 階テンソルになり、ベクトルにはならないので、ベクトル積とは言えないし、4 次元以上だと星印作用素を作用させるとテンソルの階数がかえって高くなるので、あまり有用ではない。

一方、外積をベクトル積として拡張しようとするのはそれほど簡単ではない。n 次元で２つのベクトルから次の意味でのベクトル積を作ろうとすると、$n = 1, 3, 7$ しか許されないことが証明されている[23]。ここで、ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に要請されることは、２つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の双線形関数でベクトルであり、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交し $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 ||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$ が成立することとする。

話を戻して、くさび積に星印作用素を作用させたものとして外積を定義すると、たとえば３つのベクトルの間でも外積が定義できることになる。すなわち、外積を

$$\wedge^*[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \dots] \equiv^* (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \dots) \tag{282}$$

[22] 詳細は太田 (2015) の第２章を参照のこと。
[23] 証明は太田 (2015) の 2.7 節を見よ。

と定義する[24]。すると、3 次元だと、

$$\wedge^*[\boldsymbol{a}] =^* (\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{283a}$$

$$\wedge^*[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] =^* (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{283b}$$

$$\wedge^*[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] =^* (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \tag{283c}$$

のように１つのベクトルや３つのベクトルでも「外積」が定義できる。

1.1.4.7.5 くさび積を用いて連立一次方程式を解く くさび積の応用例として、連立一次方程式の解の公式である Cramer の公式の導出がある。上のようにくさび積が行列式と関係しているということと、Cramer の公式では行列式を用いていたことを思い出すと、それができて不思議はない気がするであろう。くさび積を用いると、以下に見るように、簡単に公式が導出できてしまう。

公式の導出は 1.1.4.6.4 節でも行ったが、それは３元連立方程式に限られたのに対して、このくさび積を用いる方法は n 元連立方程式にも自然に拡張できる。ただし、ずっと３次元ベクトルを考えているので、ここで考えるのも３元連立方程式にする。準備段階は、1.1.4.6.4 節の繰り返しになるが、x, y, z を未知数とする連立一次方程式

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \tag{284}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{285}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \tag{286}$$

を解くことを考える。それぞれの式に基底を付けて

$$a_1\boldsymbol{e}_1x + b_1\boldsymbol{e}_1y + c_1\boldsymbol{e}_1z = d_1\boldsymbol{e}_1 \tag{287}$$

$$a_2\boldsymbol{e}_2x + b_2\boldsymbol{e}_2y + c_2\boldsymbol{e}_2z = d_2\boldsymbol{e}_2 \tag{288}$$

$$a_3\boldsymbol{e}_3x + b_3\boldsymbol{e}_3y + c_3\boldsymbol{e}_3z = d_3\boldsymbol{e}_3 \tag{289}$$

と書き直す。ここで、

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{3} c_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{d} = \sum_{i=1}^{3} d_i\boldsymbol{e}_i \tag{290}$$

と書くと

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} \tag{291}$$

となる。両辺と $\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ とのくさび積を作ると、$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{b} = \underline{0}$ などを用いて、

$$x\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} \tag{292}$$

[24]左辺はここで造った記号である。太田 (2015) では普通の外積と同じ × が用いられているが、すると、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の解釈がこの外積なのか普通の外積なのか紛らわしい。普通の外積だと $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ や $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ のように括弧を付けないと意味をなさないので、一応区別できるといえばできるが。

となる。両辺に星印作用素を作用させると、

$$x\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \tag{293}$$

したがって

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}} \tag{294}$$

を得る。同様にすれば

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}} \tag{295}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}} \tag{296}$$

$$\tag{297}$$

となる。これは Cramer の公式に他ならない。

1.1.4.8　内積と外積（くさび積）とテンソル積の既約分解

内積と外積は、突然天下り的に出てくるようにも見えるが、後で 1.1.8.2 節で見ていくように四元数[25]からは自然に出てくるし、歴史的にも四元数の演算から派生したものである。それ以外にもテンソル積の既約分解という操作からも自然に出てくる。それを見ておこう。

1.1.3.3 節で行った２階テンソル T の既約分解 $\mathsf{T} = \mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C}$ において、とくに、T が二つのベクトルのテンソル積 $\mathsf{T} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ であるとき、

$$\mathsf{B} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \tag{298}$$

$$\mathsf{C} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\mathsf{I} \tag{299}$$

となり、くさび積と内積が自然に出てくる。ここで、I は恒等テンソルである。内積は回転に際してスカラーのように振舞い、外積は回転に際してベクトルとして振舞う。内積はトレースを使えば

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \tag{300}$$

と書くことが出来る。

A に相当する量のことも考えておこう。この量には実質的に５つの成分がある。今、ここだけのことで仮に[26]

$$\boldsymbol{a} \textcircled{d} \boldsymbol{b} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}) - \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\mathsf{I} \tag{301}$$

と書き、これをまた仮に d-積と呼ぶことにしよう[27]。この量はとくに名前もついておらず、見慣れない量のようでもあるが、必ずしもそうではない。たとえば、電磁流体力学における Maxwell

[25]四元数とは、1.1.8.2 節で解説するように、ハミルトンが発明した複素数の拡張版である。ベクトル解析が確立すると廃れてしまったが、場合によっては今でも便利に使われる。

[26]一般的に使われている記号ではないし、そもそも一般的に使われる記号がない

[27]量子力学の d 軌道にちなんで、勝手に名前を付けてみた。回転に際して５つの成分は d 軌道のように振舞う。本当は５次元ベクトルのように書くのが良いのだと思うが、そこまで徹底せずに３次元テンソルとした。

応力テンソルは、

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\boldsymbol{B}ⓓ\boldsymbol{B}-\frac{1}{6}\boldsymbol{B}^2\mathsf{I}\right) \tag{302}$$

と書けるし、剛体の力学における慣性モーメントテンソルは

$$\iiint \rho(\boldsymbol{r})\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{r}^2\mathsf{I}-\boldsymbol{r}ⓓ\boldsymbol{r}\right)d^3\boldsymbol{r} \tag{303}$$

と書ける。

ついでに、テンソル T が２つのテンソル U、V から行列の積を用いて

$$\mathsf{T}=\mathsf{U}\cdot\mathsf{V}^T \tag{304}$$

のように作られるとき（V^T は V の転置行列)、規約分解 $\mathsf{T}=\mathsf{A}+\mathsf{B}+\mathsf{C}$ の C は

$$\mathsf{C}=\frac{1}{3}(\mathsf{U}:\mathsf{V})\mathsf{I} \tag{305}$$

であって、

$$\mathsf{U}:\mathsf{V}=\mathrm{tr}(\mathsf{U}\cdot\mathsf{V}^T)=\sum_{i,j=1}^{3}U_{ij}V_{ij} \tag{306}$$

となる。すなわち、テンソルの内積はトレースを用いて表現することができる。

1.1.5 ２階テンソルの主値、固有値、不変量

1.1.5.1 応力テンソルと主応力

前にすでに応力テンソルに関係した話題を出しているが、改めて応力テンソルを簡単に復習しておこう。連続体力学では、面積力を考える必要があって、それを表現する応力ベクトル（単位面積当たりの力）$\boldsymbol{\sigma}$ を導入する。次に、応力ベクトルが法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に依存することが示されて、依存の仕方が

$$\sigma_i(\boldsymbol{n})=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j \tag{307}$$

のように表される。これは、法線ベクトルから応力ベクトルへの線形写像の形をしているので、この (σ_{ij}) の組を応力テンソルと呼び、各 σ_{ij} を応力テンソルの成分と呼んだのであった。応力テンソルは通常対称テンソルである。

[**注意**] 応力テンソルの定義の仕方によっては、

$$\sigma_i(\boldsymbol{n})=\sum_{j=1}^{3}n_j\sigma_{ji} \tag{308}$$

と書くこともある。本講義では (307) の定義を用いることにする。しかし、応力テンソルは普通は対称テンソルなので、実質的にはどちらの定義を用いても同じことになる。

さて、応力テンソルは図示するのが難しい。すこしでも分かりやすくする可能性として回転座標変換で簡単な形にする手はないかと考えてみる。回転座標変換によって応力テンソルの成分は

$$\sigma'_{ij}=\sum_{k,l=1}^{3}R_{ik}R_{jl}\sigma_{kl} \tag{309}$$

のように変化するのであった。これを行列の形で書くと

$$\sigma' = R \cdot \sigma \cdot R^{-1} \tag{310}$$

と書ける。一方、線形代数で習った（はずの）知識によれば、実対称行列は直交行列によって対角化できるのであった。上の回転座標変換の式はちょうどそのような形をしているから、σ' を対角行列の形に出来る回転座標変換 R を必ず見出すことができる。

そのような座標変換の結果得られた新しい座標軸を**応力の主軸**、応力の成分を**主応力**と呼ぶ。これによって応力をわかりやすく図示することができる。

歪テンソルも２階の対称テンソルだから同様の操作で**歪の主軸**と**主歪**を求めることができる。これも地球科学（測地学や構造地質学）で良く使われる。

1.1.5.2 ２階テンソルの主値、固有値

２階対称テンソルでは、上で見たように、回転座標変換によって、テンソルは対角形になる。そのときの座標軸を**主軸**、成分を**主値**と呼ぶ。

線形代数の知識によれば、主軸や主値を求めるには、テンソルを行列として扱ってその固有値と固有ベクトルを求めればよい。テンソルが対称テンソルでなければ、回転座標変換によっては対角化できないけれども、行列として固有値と固有ベクトルは求めることができる。それを２階テンソルの**固有値**、**固有ベクトル**と呼ぶ。ここでは触れないが、対称テンソルでなくても固有値、固有ベクトルが有用なことがあるので、対称テンソルに限定せずに話を進める。

[問題 16] ２階対称テンソル

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{311}$$

の主値、および主軸を与える回転行列 R を求めよ。

テンソル A の固有ベクトルは、$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p}$ で

$$A \cdot \boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p} \tag{312}$$

を満たすものであり、λ を固有値と呼ぶ。この式を書き直すと

$$(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{p} = \sum_{i=1} p_i (A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_i = 0 \tag{313}$$

となる。このことは、３つのベクトル $(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_i, (i = 1, 2, 3)$ が独立でないことを示している。したがって、

$$[(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_1] \wedge [(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_2] \wedge [(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{e}_3] = 0 \tag{314}$$

である（もちろんこのことはスカラー３重積を使っても表現できるが、ここではくさび積を使ってみた）。これを展開すると、

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \\
- \quad & \lambda^2 [(A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3)] \\
+ \quad & \lambda [\boldsymbol{e}_1 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) + (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) + (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \boldsymbol{e}_3] \\
- \quad & [(A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3)] = 0
\end{aligned} \tag{315}$$

となる。３つのベクトルのくさび積の基底で独立なものは１つだけ $(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3)$ だったから、ここで出てきている係数は必ず

$$\begin{aligned}(A\cdot\boldsymbol{e}_1)\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3 &+ \boldsymbol{e}_1\wedge(A\cdot\boldsymbol{e}_2)\wedge\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge(A\cdot\boldsymbol{e}_3)\\ &= I_A[\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3] \qquad (316)\\ \boldsymbol{e}_1\wedge(A\cdot\boldsymbol{e}_2)\wedge(A\cdot\boldsymbol{e}_3) &+ (A\cdot\boldsymbol{e}_1)\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge(A\cdot\boldsymbol{e}_3)+(A\cdot\boldsymbol{e}_1)\wedge(A\cdot\boldsymbol{e}_2)\wedge\boldsymbol{e}_3\\ &= II_A[\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3] \qquad (317)\\ (A\cdot\boldsymbol{e}_1)\wedge(A\cdot\boldsymbol{e}_2)\wedge(A\cdot\boldsymbol{e}_3) &= III_A[\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3] \qquad (318)\end{aligned}$$

のように書けるはずである。ただし、I_A, II_A, III_A は数で、それぞれテンソル A の**第一不変量、第二不変量、第三不変量**と呼ばれる。こう書くと、先の式 (315) は、

$$\lambda^3-I_A\lambda^2+II_A\lambda-III_A=0 \qquad (319)$$

と書きなおすことができる。これが固有方程式である。行列の線形代数の知識からわかるように、固有値や固有方程式は座標系に依存しないはずのものなので、ここに出てくる係数は座標変換によって変わらない。そこで、I_A, II_A, III_A は不変量と呼んで良いことになる。念のため、これらが本当に不変量であること（ここでは、回転座標変換に対して変わらないスカラーであるということ）をあとで直接確かめる。

1.1.5.3　２階正値対称テンソルの主値と主軸の幾何学的意味〜物質の変形の表現

ここでは、1.1.2.5 節で扱った変形勾配テンソルを例として、主値や主軸の幾何学的な意味を考えていこう。連続体は、一般には複雑な変形をするけれども、連続体内の微小領域の変形は、線形変形で表現できるのであった。つまり、微小領域で考える限り、正方形が平行四辺形に変わるような変形だと考えてよいのであった。

このような変形勾配テンソルは、一般にはどんな形の２階テンソルでも良いのだが、ここでは２階正値対称テンソルがどのような変形を表すかを考えよう。正値対称テンソルとは、すべての固有値が正の対称テンソルのことである。正値対称というのは条件が厳しいように見えるかもしれないが、実は任意の２階テンソルが正値対称テンソルと直交テンソル（回転テンソル）との合成で表現できることがわかっており（極分解）、一般論に組み込むことができる（ここでは説明しない）。

対称テンソル S は、回転行列で対角化できるということから、固有ベクトルは正規直交ベクトルの組に取ることができる。これを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ と書く。これらに対応する固有値を $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とする。固有値は実数である（正値ならば正の実数）。

$$S(\boldsymbol{p}_i)=\lambda_i\boldsymbol{p}_i \qquad (320)$$

この上で、式 (199) を用いると、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して

$$S(\boldsymbol{u})=S(I(\boldsymbol{u}))=S(\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{p}_i\otimes\boldsymbol{p}_i)(\boldsymbol{u})) \qquad (321)$$

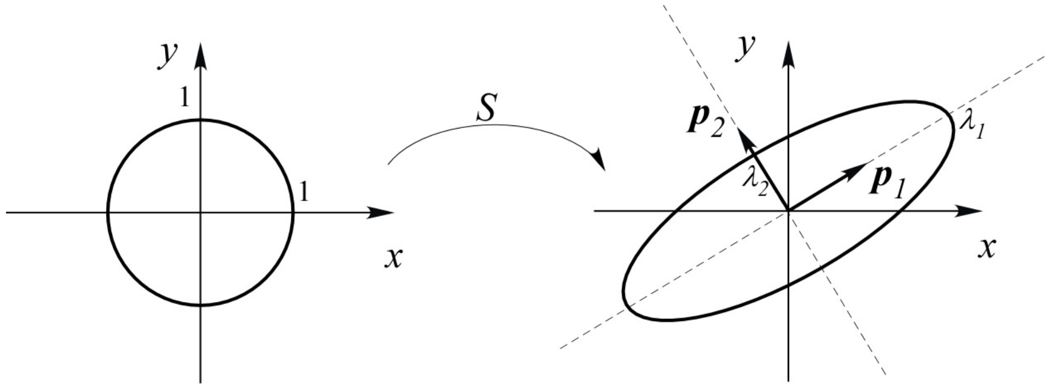

図 1.14: 2次元正値対称テンソルによる単位円の変形

となり、計算を進めると

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{u}) &= S(\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i) &(322)\\
&= \sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}_i)S(\boldsymbol{p}_i) &(323)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i &(324)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\boldsymbol{p_i}\otimes\boldsymbol{p}_i)(\boldsymbol{u}) &(325)
\end{aligned}
$$

が成り立つことがわかる。したがって、

$$
S=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\boldsymbol{p_i}\otimes\boldsymbol{p}_i) \tag{326}
$$

と書くことができる。これを対称テンソルの標準表示という。これは、主軸を座標軸に取ると対角形になると言っているだけだが、上の表示は座標軸の取り方には依存しない。さらに、ここまでは、正値でなくても成り立つ。

さて、こう表示すると、位置ベクトル $\boldsymbol{u}$ は、正値対称テンソル S によってどのように移されるということになるであろうか？上の計算の途中で出てくる式により

$$
S(\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i \tag{327}
$$

となるので、移されたベクトルは、$\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{p}_i$ 方向に射影したものを λ_i 倍してから合成したものということになる。$\lambda_i > 1$ ならばその $\boldsymbol{p}_i$ 方向には伸長し、$\lambda_i < 1$ ならばその $\boldsymbol{p}_i$ 方向には収縮することになる。単位球は、軸の長さが $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ の楕円体になる。正値対称テンソルは、このような歪みを表現している。2次元で図示すれば、図 1.14 のようになる。これが、主軸と主値の幾何学的な意味である。

[問題 17] 2次元の2階対称テンソル

$$
T=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \tag{328}
$$

が与える変形によって、単位円はどのような楕円に変形するか。その概形を図示せよ。

1.1.5.4 ２階テンソルの不変量その１

先に出てきた３つの不変量を具体的に成分で表してみる。まず、

$$A = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{329}$$

であることに注意すると、第一不変量は

$$\begin{aligned} & (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) \\ = \; & (\sum_{i=1}^{3} A_{i1} \boldsymbol{e}_i) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge (\sum_{i=1}^{3} A_{i2} \boldsymbol{e}_i) \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (\sum_{i=1}^{3} A_{i3} \boldsymbol{e}_i) \\ = \; & A_{11}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) + A_{22}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) + A_{33}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \\ = \; & (A_{11} + A_{22} + A_{33})(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \end{aligned} \tag{330}$$

より

$$I_A = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} = \mathrm{tr} A \tag{331}$$

と書くことができる。行列用語に倣って、これはテンソル A の**トレース**（**跡**（せき））と呼ばれる。第二不変量は

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{e}_1 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) + (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) + (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \boldsymbol{e}_3 \\ = \; & \boldsymbol{e}_1 \wedge (\sum_{i=1}^{3} A_{i2} \boldsymbol{e}_i) \wedge (\sum_{j=1}^{3} A_{j3} \boldsymbol{e}_j) + (\sum_{j=1}^{3} A_{j1} \boldsymbol{e}_j) \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge (\sum_{i=1}^{3} A_{i3} \boldsymbol{e}_i) \\ & + (\sum_{i=1}^{3} A_{i1} \boldsymbol{e}_i) \wedge (\sum_{j=1}^{3} A_{j2} \boldsymbol{e}_j) \wedge \boldsymbol{e}_3 \\ = \; & (A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23})(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) + (A_{11}A_{33} - A_{31}A_{13})(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \\ & + (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \\ = \; & (A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{33}A_{11} - A_{12}A_{21} - A_{23}A_{32} - A_{31}A_{13})(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \end{aligned} \tag{332}$$

より

$$\begin{aligned} II_A &= A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{33}A_{11} - A_{12}A_{21} - A_{23}A_{32} - A_{31}A_{13} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{3} A_{ii}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}A_{ji}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[I_A^2 - \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}A_{ji}\right] \end{aligned} \tag{333}$$

と書くことができる。第三不変量は

$$\begin{aligned} & (A \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge (A \cdot \boldsymbol{e}_3) \\ = \; & (\sum_{i=1}^{3} A_{i1} \boldsymbol{e}_i) \wedge (\sum_{j=1}^{3} A_{j2} \boldsymbol{e}_j) \wedge (\sum_{k=1}^{3} A_{k3} \boldsymbol{e}_k) \\ = \; & \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}\right)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \end{aligned} \tag{334}$$

より

$$III_A = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \det A \tag{335}$$

と書くことができる。行列用語に倣って、これはテンソル A の**行列式**と呼ばれる。これは、1.1.4.6.1 節で見たように、テンソル A が変形勾配テンソルの時は、変形による体積拡大率という幾何学的な意味がある量である。

これらの不変量が回転座標変換に依存しないことを直接確かめよう。回転座標変換

$$A'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} R_{ik} R_{jl} A_{kl} \tag{336}$$

に対して、第一不変量、第二不変量は

$$\begin{aligned}
I'_A &= \sum_{i=1}^{3} A'_{ii} = \sum_{i,k,l=1}^{3} R_{ik} R_{il} A_{kl} = \sum_{k,l=1}^{3} \delta_{kl} A_{kl} = \sum_{k=1}^{3} A_{kk} = I_A & (337)\\
II'_A &= \frac{1}{2}\left[I'^2_A - \sum_{i,j=1}^{3} A'_{ij} A'_{ji} \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[I^2_A - \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} R_{ik} R_{jl} A_{kl} R_{jm} R_{in} A_{mn} \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[I^2_A - \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \delta_{kn} \delta_{lm} A_{kl} A_{mn} \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[I^2_A - \sum_{m,n=1}^{3} A_{nm} A_{mn} \right] \\
&= II_A & (338)
\end{aligned}$$

となるので、不変量であることが確かめられた。第三不変量に関しては、行列式の積公式

$$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) \tag{339}$$

と、座標変換が行列の形で

$$A' = R \cdot A \cdot R^{-1} \tag{340}$$

と書けるということから

$$III'_A = \det A' = \det R \cdot A \cdot R^{-1} = \det A = III_A \tag{341}$$

となり、不変量であることが確かめられた。

最後に、特殊な形をしたテンソルに対して、3つの不変量の形を求めておこう

対角行列の形のテンソル

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{342}$$

のとき、

$$\begin{aligned}
I_A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & (343)\\
II_A &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 & (344)\\
III_A &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & (345)
\end{aligned}$$

トレースが 0 の対称テンソル 偏差応力 τ のような場合、

$$I_\tau = 0 \tag{346}$$
$$II_\tau = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}\tau_{ij} = -|\tau|^2 \tag{347}$$
$$III_A = \det\tau \tag{348}$$

1.1.5.5 2階テンソルの不変量その2

上で出てきた不変量の代わりに、2階テンソル A の不変量として以下の組が使われることもある。

$$J_{A1} = \mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} \tag{349}$$
$$J_{A2} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}A_{ji} \tag{350}$$
$$J_{A3} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}A^3 = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{3} A_{ij}A_{jk}A_{ki} \tag{351}$$

ここで、A のべき乗は、行列としてのべき乗を表す。J_{A1}, J_{A2}, J_{A3} が不変量であることは、行列のトレースで定義されていることから明らかである。対称テンソルでは、J_{A2} は、式 (168) で定義されたテンソルの大きさの2乗に等しい。

先に求めた不変量との関係は

$$I_A = J_{A1} \tag{352}$$
$$II_A = \frac{1}{2}(J_{A1}^2 - J_{A2}) \tag{353}$$
$$III_A = \frac{1}{6}J_{A1}^3 - J_{A1}J_{A2} + J_{A3} \tag{354}$$

となる。

[**問題** 18] ケーリー・ハミルトンの定理を用いて、式 (354) を導け。

1.1.5.6 不変量の物理学への応用

塑性理論では、等方的な物質の降伏条件を表現するのに偏差応力の不変量を組み合わせたものが用いられる。

1.1.6 単位のある世界、一般の座標変換、双対空間

これまでは、ベクトル空間の存在をあまり意識せずに議論してきた。単に計算をするだけならそれでそう困らない。しかし、物理学の問題を真面目に扱おうとすると、それでは困ったことが出てくることがある。先ず第一に、物理学で使うベクトルには物理的次元[28]（単位）があ

[28]たとえば、「長さ」の次元。通常は、単に次元と呼ぶが、ベクトル空間の次元と区別するために、ここでは物理的次元と呼んでおく。物理的次元を持たないことは、単に「無次元」と呼ぶことにする。これはベクトル空間の次元とは混同することは無いし（次元が0ならば、ゼロ次元と呼ぶから)、「無物理的次元」とは言いづらい。

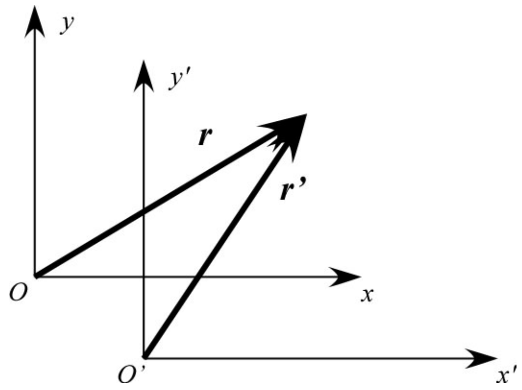

図 1.15: 平行移動による位置ベクトルの変化

る。物理的次元が違うベクトルは違うベクトル空間に属すると考えるのが自然だろう。そうすると、たとえば、角運動量 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ のように異なった物理的次元を持ったベクトルの間の積は、異なるベクトル空間の元の間の演算だと考えないといけなくなる。第二に、1.1.1.2 節で予告をしておいたように、考える座標変換を回転変換に限らないと、以下で見るように、いわゆる「ベクトル」にもいくつか種類があってそれらが住んでいる世界を区別しないといけないということになる。そういったことは、普通は気にしなくても済むことが多いけれど、気にすると概念が整理されるということもある。

なお、この節の議論は完全には閉じていない部分も多い。完全な議論を知りたい方は、より詳しい専門書をみていただきたい。

1.1.6.1 物理空間とアフィン空間

最初に座標系の平行移動が引き起こす問題を考える。これまで座標変換としては、回転しか考えなかったのだが、これに平行移動を加えてみよう。普通の物理空間[29]を考える。本講義の場合、座標変換は記述する座標系を変えるということだから、平行移動は座標系の原点を動かすということである。

位置ベクトルを問題にしよう。平行移動で座標系の原点を動かすと、位置ベクトルは図 1.15 のように矢印が変わる。つまり、位置ベクトルは、単にモノサシの置き方を変えただけで矢印が変わってしまうという普通のベクトルにはない性質がある。普通のベクトルの場合は、その矢印が実体であるとすれば、モノサシとは関係がないはずである。モノサシを回してもずらしても矢印は変わらない。そのことを、力学の教科書などでは**自由ベクトル**と**束縛ベクトル**（**固定ベクトル**）という言い方で区別をする。普通のベクトルは自由ベクトルで、物理空間を記述する座標系の原点の移動によって矢印が変わってしまうベクトルを束縛ベクトルと言う。この言い方では、位置ベクトルは束縛ベクトルである。

しかし、矢印を実体だと見ると、モノサシの置き方だけで変わってしまう位置ベクトルをベクトルだと思うのはキモチが悪い。そこで、座標原点に取り立てて意味があるわけではないから、位置ベクトルや原点は無しにしてしまった空間を考えることもある。そのような空間を**アフィン空間**という。アフィン空間は、点とベクトルで構成される。位置ベクトルから原点を外してしまったものが点である。点と点を矢印で結んだものはベクトルである。物理法則には、座標原点が出てくることは無いし、位置ベクトルは差の形（すなわち点から点への矢印の形）

[29]時間と空間というときの「空間」のことだが、一般のベクトル空間と区別するために、ここでは物理空間と呼んでおく。単に「空間」と呼ぶときは、ベクトル空間とか後述のベクトル空間とか、数学的に一般的な座標を持ったような集合を指すことにする。

でしか出てこないから、これで十分である。このようにすれば位置ベクトルを無くして物理空間を記述することができる（たとえば、ワイル (1973) ）。

このようにして、物理空間はアフィン空間として捉えることができることが分かった。それによって、束縛ベクトルという概念も不要になるはずである。とは言うものの、位置ベクトルを使わないと不便なことも多いので、以下では無節操だが位置ベクトルは束縛ベクトルであることを認識したうえで、やっぱり位置ベクトルを使う。たとえば、角運動量 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$（$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル、$\boldsymbol{p}$ は運動量ベクトル）とか波の位相 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$（$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル、ω は周波数、t は時間）のようなものを位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を使わずに簡単に書くことはできない。位置ベクトルを使っても、原点の移動を考えなければ、問題は起こらない。

ところで、速度ベクトル空間がアフィン空間の構造を持っていると考えるかどうかも興味深い。物理空間を記述する座標系の原点の移動を考える限り、速度ベクトルは自由ベクトルである。しかし、速度ベクトル空間の座標系の平行移動を考えることもできる。それは、別の慣性系に移るという操作に対応する。慣性系を移っても物理法則は変わらないので、その意味では速度ベクトル空間もアフィン空間ととらえることもできる。結局のところ、どのような座標系の原点の移動を考えるかで、自由ベクトルとか束縛ベクトルとかいう言い方は変わる。そう考えてみると、自由ベクトルと束縛ベクトルの区別にそれほど意味は無いと私には思える。

1.1.6.2 自由ベクトルと束縛ベクトルの異なる定義

ところで、自由ベクトルと束縛ベクトルの区別として、前節の定義と異なる定義をしている本やネット上の記述もかなりある。それは、物理空間上に矢印で絵を書いたときに、ベクトルの始点を変えるとものごとが変われば束縛ベクトル、変わらなければ自由ベクトルという区別である。この場合は、その中間的な glancing ベクトル[30]というものも現れる。この定義は、以下に述べる理由で問題があると思っているのだが、一応紹介しておく。

たとえば、連続体における速度ベクトルは、場所の関数なので、絵の上では、その場所を始点として矢印を描く。別の場所を始点として矢印を描くとその始点のある場所の速度ということになるから、意味が変わってくる。そこで、速度ベクトルは、本節の定義では束縛ベクトルだということになる。一方、前節の定義だと、物理空間の座標原点を変えても速度ベクトルは変わらないから、速度ベクトルは自由ベクトルである。私見では、前節の定義の方が妥当で、本節の定義には意味が無い。なぜなら、始点を変えると意味が変わるというのは、それはベクトル自体の属性を示しているのではなく、ベクトルが属する空間（速度ベクトル空間）と物理空間の重ね方の問題だからである。

次に、剛体の力学における力を考える。ベクトルの始点は力の作用点を表すものとする。力をどこに作用させるかで剛体の運動は変わってしまうので、本節の定義では力は束縛ベクトルということになる[31]。しかし、力の向いている方向の直線上に始点をずらす分には、力と力のモーメントが変わらないので、運動は変わらない。このようなものをとくに glancing ベクトルという。本節の定義では、力は、単一質点の力学では自由ベクトル、剛体の力学では glancing ベクトル、連続体の力学では束縛ベクトルということになる。一方、力は物理空間の座標原点の選び方には関係がないので、前節の定義では、いずれにしても自由ベクトルである。

---

[30] これは Dimitrienko (2002) 以外では見たことがないので、全く一般的ではないのだが、この定義に従えば自然に出てくるので、一応紹介しておく。ここで紹介するだけなので、和訳を与えることもしない。

[31] たとえば、啓林館高校理科ユーザーの広場「物理 II」
`http://www.keirinkan.com/kori/kori_physics/kori_physics_2_kaitei/contents/ph-2/1-bu/1-1-1.htm`
ではこのように自由ベクトルと束縛ベクトルの説明をしている。

1.1.6.3 波数ベクトルとコベクトル

次に縮尺変換が引き起こす問題を考える。1.1.6 節以前は、座標変換として回転しか考えてこなかったが、今度は縮尺の変化を考えてみよう。たとえば、m 単位ではかっていたのを cm 単位で測るように変更するということだ。そこで波を考えてみる。今まで波長が 0.1 m と見ていたものは、縮尺を cm 単位にすると 10 cm になる。すると、長さ 0.1 m の物理空間ベクトルは長さ 10 cm の物理空間ベクトルになる。大きさを表す数字は大きくなる。一方、20π m^{-1} の大きさの波数ベクトルは、縮尺を cm 単位にすると 0.2π cm^{-1} の大きさになる。大きさを表す数字は小さくなる。もちろん、物理的次元が逆数の関係にあるベクトルだから当たり前といえば当たり前ではある。波数ベクトルと空間ベクトルは異なるベクトル空間に属しているのである。

が、これは困った話である。第一に、回転の場合は、ベクトルの成分の座標変換を表す式は、ベクトルに依らず同じ形で書けていたのに対し、縮尺の変化の場合はそうはいかないということである。第二は、内積の問題である。波の位相は、よく

$$\phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t \tag{355}$$

という形で表す。ここで、ϕ は位相、$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル、$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル、ω は周波数、t は時間である。この式には内積が使われている。が、厳密に言えば、内積は同じベクトル空間の中のベクトルの間でしか計算できない。そこで、波数ベクトルとは何かを改めて考え直す必要が出てくるわけだ。

ここで、1.1.2 節の議論が参考になる。そこでの考え方で行けば、ベクトルからスカラーへの線形関数はベクトルと考えられるのであった。しかし、今は内積が定義できないので、注意深く内積を使わないようにして最初から考え直す必要がある。式 (355) の右辺の第１項（波の位相のある特定の一瞬の様子）

$$k(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \tag{356}$$

は、位置ベクトルの線形関数であり、その関数 $k(\boldsymbol{r})$ を波数と見なすことにする。これを、波数**コベクトル**と呼ぶことにする。すなわち、ベクトルからスカラーへの線形関数を**コベクトル**と呼ぶことにする。数学用語では、コベクトル空間はベクトル空間の**双対空間**である。

コベクトル空間は、ベクトルからスカラーへの関数全体がなす空間である。関数の和やスカラー倍も自然に定義できるから、これは一種のベクトル空間である。関数がなすベクトル空間といえば、無限次元空間かと思うとそうではない。1.1.1.3 節で説明したように、線型性という制限があるために、線型関数は基底ベクトルに対する作用さえわかればすべてわかるからである。したがって、物理空間ベクトルの３つの基底ベクトルに対する作用さえわかれば良いので、３次元空間である。以下、コベクトル空間がどのような空間になるかを見てゆくのだが、その前に位置ベクトル空間の方がどのような空間かをはっきりさせる。

位置ベクトルのベクトル空間の基底を $\boldsymbol{t}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ と書くことにする。$\boldsymbol{e}_i$ と書かなかったのは、正規直交とは限らない一般の基底を指すことにしたいからである。縮尺を変えることを考えているのだから、必ずしも規格化されていないことを考えないといけないし、ついでに、直交していなくても良いことにする。さらに、後の便宜上成分の添え字の位置を上付きにしてある（添え字を上に付ける理由は、1.1.6.5 節で説明する）。そして、位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} r^i \boldsymbol{t}_i \tag{357}$$

と書く。この際、微妙なのは、物理的次元を成分 r^i に持たせるのか、基底 $\boldsymbol{t}_i$ に持たせるのかということである。基底が規格直交基底 $\boldsymbol{e}_i$ の時は、基底の大きさは抽象的に 1 ということにしたいので、物理的次元は成分の方にあると考えるのがふつうである。一方で、縮尺の変化を

考えるときは、基底 $\boldsymbol{t}_i$ がモノサシということにしたいので、基底に物理的次元を持たせて（たとえば 1m の長さの基底ベクトルなどという感じで）、成分は無次元ということにしたい。そこで、本講義では、基底を $\boldsymbol{e}_i$ と書くときは、成分は物理的次元を持っており（$\boldsymbol{e}_i$ は無次元）、基底を $\boldsymbol{t}_i$ と書くときは、成分は無次元の単なる数（$\boldsymbol{t}_i$ が有次元）ということにする。

上のように位置ベクトル空間を設定した時、波数コベクトル空間の基底 φ^i（これは関数である）を

$$\varphi^i(\boldsymbol{t}_j) = \delta^i_j \tag{358}$$

と取っておく。δ^i_j は通常のクロネッカーのデルタと同様、添字 i と j が等しいときは 1 でそうでないときは 0 とする。位相は無次元なので、これは空間の物理的次元を持つ量から無次元量への関数である。この基底を用いると、一般にベクトル $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \boldsymbol{t}_i$ の成分が

$$\varphi^i(\boldsymbol{x}) = \varphi^i(\sum_{j=1}^3 x^j \boldsymbol{t}_i) = \sum_{j=1}^3 x^j \varphi^i(\boldsymbol{t}_j) = \sum_{j=1}^3 x^j \delta^i_j = x^i \tag{359}$$

のようにして求められることに注意する。

(359) 式を用いると、任意の波数は、

$$k(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^3 k_i \varphi^i(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^3 k_i r^i \tag{360}$$

と書くことができる。このとき、波数コベクトルの成分は

$$k_i = k(\boldsymbol{t}_i) \tag{361}$$

という関係にある。式 (360) は、同じ添え字の成分の値をかけて和を取っているので内積のようであるが、波数が属する空間と位置が属する空間が異なるので内積ではない。

量子物理学では、Dirac が発明したブラケット記法を用いることがある。それは、コベクトルを $\langle \boldsymbol{k}|$ のように表現し、ベクトルを $|\boldsymbol{r}\rangle$ のように表す記法で、今例にしている波の位相の場合は

$$k(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{k}|\boldsymbol{r}\rangle = \sum_{j=1}^3 k_j r^j \tag{362}$$

のように書くことができる。そして、ベクトルをケット、コベクトルをブラと呼ぶ。ただし、このブラケット記法が最も有用なのは、内積のある複素数に拡張されたベクトル空間（ユニタリ空間）の場合である。この記法で外積などを表現するのは格好が悪いので、3 次元空間の幾何学的ベクトルではあまり使わない。

以上のことを踏まえて、コベクトルをどう図示したら良いかを考える。波数コベクトルは $k(\boldsymbol{r})$ という位相を与える関数だったのだから、位相の等値面で図示するのがもっとも自然である（図 1.16）。等位相面を 1 ラジアンおきに描くとき、波数は等位相面をベクトル $\boldsymbol{r}$ が横切った回数になる。

1.1.6.4 コベクトルをベクトルと同じ図に描く

ベクトルとコベクトルとは違う空間に属するとはいえ、やっぱり波数の矢印を描きたいこともある。コベクトルを、あたかもベクトルの空間の元であるかのように偽装して、矢印として描くことを考えよう。以下、波数コベクトル空間を例にして考える。

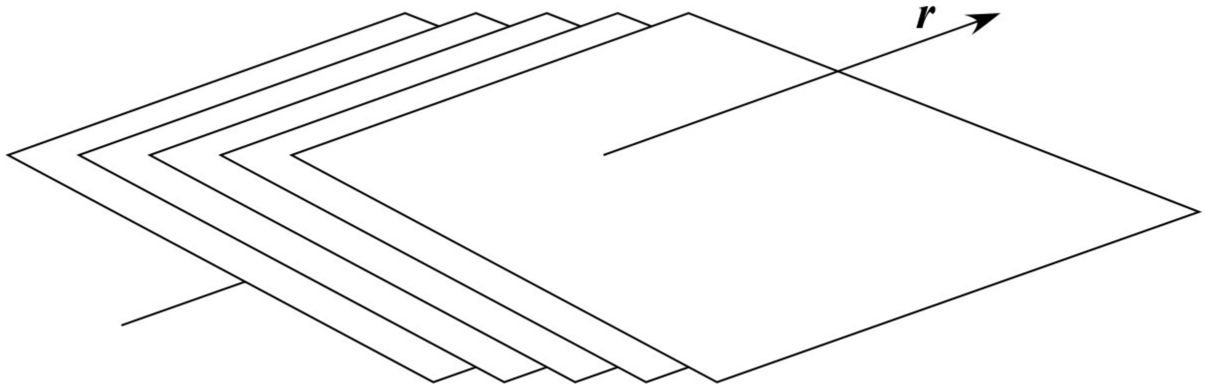

図 1.16: 等位相面が波数コベクトルのイメージである。等位相面を１ラジアンおきに描くとき、波数は等位相面をベクトル $\boldsymbol{r}$ が横切った回数になる。

コベクトル空間の基底 φ^i に対応するベクトル $\boldsymbol{n}^i$ を作ることを考える。そのようなベクトルは、

$$\boldsymbol{n}^i \cdot \boldsymbol{t}_j = \delta^i_j \tag{363}$$

となるように作れば良く、実際

$$\boldsymbol{n}^i = \frac{\epsilon_{ijk}\boldsymbol{t}_j \times \boldsymbol{t}_k}{\boldsymbol{t}_1 \cdot (\boldsymbol{t}_2 \times \boldsymbol{t}_3)} \tag{364}$$

のように作ることができる（i, j, k は $1, 2, 3$ の偶置換）。ただし、注意しなければならないのは、$\boldsymbol{t}_i$ が長さの物理的次元を持つとき、$\boldsymbol{n}^i$ は、長さの逆数という物理的次元を持っているということである。したがって、厳密に言えば、同じベクトル空間にはいないのだが、上の式に従って、同じ図の中に描くことができるものを作ることができる。

その上で、

$$\boldsymbol{k} = \sum_{i=1}^{3} k_i \boldsymbol{n}^i \tag{365}$$

と定義すれば、

$$k(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = (\sum_{i=1}^{3} k_i \boldsymbol{n}^i) \cdot (\sum_{j=1}^{3} r^j \boldsymbol{t}_j) = \sum_{i=1}^{3} k_i r^i \tag{366}$$

と書くことができる。

縮尺を変えることは以下のように表現される。たとえば $\boldsymbol{t}_1$ の長さを縮めると、$\boldsymbol{n}^1$ の長さはそれに反比例して伸びると同時に、位置ベクトルの第１成分は大きくなり、波数コベクトルの第１成分は小さくなる。そのようにして、モノサシの縮尺を変えても矢印は変わらなくなる。

このようにして、波数コベクトル空間の元をあたかも位置ベクトル空間の元であるかのように偽装できて、位置ベクトル空間の上に矢印を描いて見せることができる。これが、実際普通に波数ベクトルとして描かれるものである。

偽装と言わなくても、波数コベクトル空間の元を矢印として書くことはよくある。たとえば、固体物理やＸ線回折の理論を勉強したことがあれば、$\boldsymbol{t}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を実格子（直接格子）空間の基本ベクトルとすると、(364) で表される $\boldsymbol{n}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ は逆格子空間の基本ベクトルであることに気付くだろう。逆格子空間は波数の空間なのだから、当然である。逆格子空間は実格子（直接格子）空間の双対空間である。

1.1.6.5 コベクトルの成分の座標変換

次に、このコベクトルの成分の座標変換を考える。今、位置ベクトルに対する座標変換を

$$r'^i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} r^j \tag{367}$$

と書く。A_{ij} は座標変換の行列で、直交行列とは限らない。コベクトルは

$$\sum_{j=1}^{3} k'_j r'^j = \sum_{i=1}^{3} k_i r^i \tag{368}$$

を満たしていないといけないから、

$$\sum_{i,j=1}^{3} k'_j A_{ji} r^i = \sum_{i=1}^{3} k_i r^i \tag{369}$$

でないといけない。$r^i = \delta_{ik}$ $(k = 1, 2, 3)$ と置くことにより、

$$k_i = \sum_{j=1}^{3} k'_j A_{ji} \tag{370}$$

したがって、コベクトルの成分の変換則は

$$k'_i = \sum_{j=1}^{3} k_j (A^{-1})_{ji} \tag{371}$$

となる。

一方で、基底ベクトルの変換則も求めておこう。基底ベクトルは、

$$\sum_{j=1}^{3} r'^j \boldsymbol{t}'_j = \sum_{i=1}^{3} r^i \boldsymbol{t}_i \tag{372}$$

を満たしていないといけないから、

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ji} r^i \boldsymbol{t}'_j = \sum_{i=1}^{3} r^i \boldsymbol{t}_i \tag{373}$$

でないといけない。$r^i = \delta_{ik}$ $(k = 1, 2, 3)$ と置くことにより、

$$\boldsymbol{t}_i = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{t}'_j A_{ji} \tag{374}$$

したがって、基底ベクトルの変換則は

$$\boldsymbol{t}'_i = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{t}_j (A^{-1})_{ji} \tag{375}$$

となる。これはコベクトルの成分の変換則と同じ形をしている。同様にすれば、コベクトル空間の基底ベクトルを φ^i（これは、双対となるベクトル空間からスカラーへの関数）と書くとき、その変換則はベクトル空間の成分の変換則と同じ形の

$$\varphi'^i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} \varphi^j \tag{376}$$

になる。

さきほどからベクトルやコベクトルの成分や基底の添え字を上に付けたり下に付けたりしているのは、変換則が２種類あることを明示するためである。ベクトルの成分と同じように変換するものには上付きの添え字を付け、その逆行列で変換されるものには下付きの添え字を付けることにしていた。並べて書くときには、添え字が上付きの方は縦に並べ、下付きの方は横に並べるのがふつうである。すなわち

$$\begin{pmatrix} r'^1 \\ r'^2 \\ r'^3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \varphi'^1 \\ \varphi'^2 \\ \varphi'^3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{pmatrix} \tag{377}$$

ならびに

$$\begin{pmatrix} k'_1 & k'_2 & k'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} A^{-1} \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}'_1 & \boldsymbol{t}'_2 & \boldsymbol{t}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \boldsymbol{t}_2 & \boldsymbol{t}_3 \end{pmatrix} A^{-1} \tag{378}$$

1.1.6.6　コベクトルのいろいろ

ある物理的なベクトルがふつうのベクトルなのかコベクトルなのかを考えてゆくとおもしろい。

たとえば、力はコベクトルであるとも考えられる。これは、エネルギーや仕事 $W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ が基本的な量であるという考え方に基づく。力は、変位ベクトルから仕事への線形関数であるという意味でコベクトルである。その意味では、仕事は $W = F(\Delta\boldsymbol{r})$ と書かれるべきである。力は、ポテンシャル力であれば、矢印ではなくてポテンシャルの等高線でイメージされる量ということになる。

北野 (2009) では、電磁気学にでてくるいろいろな量をベクトルとコベクトルに丁寧に分類してある。

1.1.6.7　軸性ベクトルと極性ベクトル

座標変換として、回転だけでなく鏡映（空間反転）を考えると**極性ベクトル**と**軸性ベクトル**の区別が出てくる。極性ベクトルは、ふつうのベクトルで、たとえば速度ベクトルのように、矢印と平行に鏡を置いて映すと矢印の向きが変わらないのに対し、矢印と垂直に鏡を置いて映すと矢印の向きが反転するものである。一方で、軸性ベクトルとは、渦度ベクトルのように、矢印と平行に鏡を置いて映すと矢印の向きが変わるのに対し、矢印と垂直に鏡を置いて映すと矢印の向きが変わらないものである。一般にテンソルにおいても軸性と極性を区別することができる。

Levi-Civita の記号を一度かけると軸性と極性が入れ替わる。そこで、ベクトルの外積とか星印作用素とかベクトルの回転（1.2 節）とかの操作で軸性と極性が入れ替わることになる。

1.1.7　斜交座標系

1.1.1.2 節と 1.1.6 節で斜交座標系の話が少し出てきたが、それを本格的に扱うとどういうことになるかを見てゆく。ここで考える空間は、相変わらず３次元ユークリッド空間に限る。内積は通常のユークリッド空間の内積が定義されているものとする。しかし、考える座標系が斜交座標系になる場合のことを考える。すなわち、座標系の間の座標変換として、回転変換だけでなく、一般の線型変換を考えてゆく。

1.1.7.1 斜交座標系における内積と計量テンソル

1.1.6 節で見たように、コベクトル k に対して $k(\boldsymbol{r}) = \sum_j k_j r^j$ は一見内積に見えて内積ではない。内積は、ベクトルとベクトルからスカラーへの双線型関数である（その意味で、コテンソル[32]である）。基底が正規直交基底に限らない場合、基底を $\boldsymbol{t}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とすると、ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積は、

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (\sum_{i=1}^{3} x^i \boldsymbol{t}_i) \cdot (\sum_{j=1}^{3} y^j \boldsymbol{t}_j) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x^i y^j \tag{379}$$

と書くことができる。ただし、

$$g_{ij} = \boldsymbol{t}_i \cdot \boldsymbol{t}_j \tag{380}$$

は**計量テンソル**と呼ばれる。考えているのは通常のユークリッド空間なので、$\boldsymbol{t}_i$ を正規直交基底に関する成分で表せば、計量テンソルはすぐに計算できる。デカルト座標（基底が正規直交基底）のときは、計量テンソルは恒等テンソルになる。正規直交基底に関する成分でなければ、内積は単純に同じ添え字の成分どうしをかけて和を取って計算するのではなくて、計量テンソルを用いる必要がある。

一般に、ベクトル空間は内積が定義されているとは限らない。内積が定義されているベクトル空間を内積空間と呼ぶ。言い換えると、計量テンソルが定義されている空間が内積空間である。

非ユークリッド空間を考えると、そこで内積がどうなるかは自明ではない。むしろ、計量テンソルがその空間の幾何学的構造を決めるという言い方ができる。その意味で、計量テンソルは、そういった幾何学では空間の性質を決定する基本的な量になる。

1.1.7.2 反変成分と共変成分

内積が定義された空間だと、ベクトルをコベクトルに偽装することもできるし、そのような量を作っておくのが便利だということを示す。

まず、手掛かりとして、正規直交基底を取る場合、内積空間では、一般のベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot I = \boldsymbol{x} \cdot \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_i \tag{381}$$

すなわち、$\boldsymbol{x}$ の基底 $\boldsymbol{e}_i$ に関する成分は

$$x_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{382}$$

と書くことができたことを思い出そう。しかし、一般の基底では

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \boldsymbol{t}_i \tag{383}$$

で、

$$x_i \equiv \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{t}_i = (\sum_{j=1}^{3} x^j \boldsymbol{t}_j) \cdot \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{j=1}^{3} g_{ji} x^j = \sum_{j=1}^{3} g_{ij} x^j \tag{384}$$

としても、$x_i \neq x^i$ である。ここで、g_{ij} は 1.1.7.1 節で定義された計量テンソルで、もしも $\boldsymbol{x}$ が長さの物理的次元を持っているとすると、計量テンソルは長さの 2 乗の次元を持っている。

[32]コテンソルをまだ定義していなかったが、ベクトルからスカラーへの線型関数をコベクトルと呼んだのと同じ意味で、ベクトルとベクトルからスカラーへの双線型関数はコテンソルと呼ぶことができる。

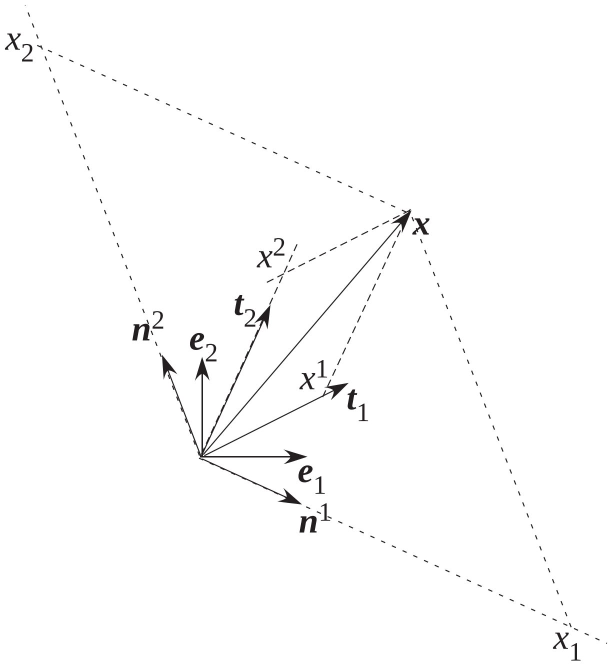

図 1.17: 斜交座標系における共変成分と反変成分の図示

そうすると、x^i は無次元なのに対し、x_i は長さの 2 乗の物理的次元を持つことになるので、そもそも x_i と x^i とは比べられない。しかし、前にコベクトルの偽装の時に使った (364) で定義される $\boldsymbol{n}^i$ を使えば、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{n}^i \tag{385}$$

となる（下の問題；図 1.17)。つまり成分 $x_i \quad (i = 1, 2, 3)$ でベクトルを表現することができて、しかも無理やり $\sum_{i=1}^{3} x_i \varphi^i$（$\varphi^i$ はコベクトル空間の基底であって、双対となるベクトル空間からスカラーへの関数）という関数を考えると、あたかもコベクトルのようなふりができる。ただし、コベクトルとは異なり、この成分 x_i は物理的次元を持っている。このような x_i をベクトルの**共変成分**と呼び、ふつうの x^i をベクトルの**反変成分**と呼ぶ。1.1.6.5 節の説明から分かる通り、x_i はベクトルの基底と同じ座標変換に従う。その意味で「共変」と呼ばれる。これに対し、その逆行列で変換する x^i を「反変」と呼ぶならわしになっている。ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積は

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x^i y^j = \sum_{i=1}^{3} x^i y_i = \sum_{i=1}^{3} x_i y^i \tag{386}$$

と書くことができる。ブラケット記法では、ベクトル $\boldsymbol{y}$ を $|\boldsymbol{y}\rangle$、ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対応するコベクトル $\sum_{i=1}^{3} x_i \varphi^i$ を $\langle \boldsymbol{x}|$ と書くことによって、

$$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \tag{387}$$

となるので、$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積と呼ぶ。

[問題 19] (385) 式を証明せよ。

計量テンソルを行列と見たときの逆行列 g^{-1} の成分を

$$g^{ij} \equiv (g^{-1})_{ij} \tag{388}$$

と書くことにすれば、

$$x^i = \sum_{j=1}^{3} g^{ij} x_j \tag{389}$$

と書くことができる。これに倣って、コベクトル $\alpha = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \varphi^i$ の成分から

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^{3} g^{ij} \alpha_j \tag{390}$$

という量を作ることもできる。座標変換の時の規則を考えて、「ふつうの」成分 α_i（無次元）をコベクトルの**共変成分**、α^i（こちらは物理的次元がある）をコベクトルの**反変成分**と呼ぶ。

このように計量テンソルを用いると、ベクトルとコベクトルの間を自由に行ったり来たりできる。計量テンソルを使って反変成分と共変成分を行き来すると、成分の添え字が上と下を行き来するので、その操作を**添え字の上げ下げ**と呼ぶ。対応するベクトルとコベクトルはしばしば同一視され、あまり区別しないことがある。以下では、コベクトル $\alpha = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \varphi^i$ のことをベクトルと同様の記号

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{n}^i \tag{391}$$

と表現することも許すことにする。

1.1.7.3 [参考] ユニタリ空間

ブラケット記法が出てきたので、ちょっとだけ脱線して、複素数に拡張したベクトルの大枠を見てゆこう。ここでは、斜交座標は考えず、直交座標を用いる。記法としてはブラケット記法を最初から用いてゆく。

ケット（ベクトル）として

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \tag{392}$$

を考えると、これに対応するブラ（コベクトル）は

$$\langle A| = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}^1 & \bar{A}^2 & \cdots & \bar{A}^n \end{pmatrix} \tag{393}$$

となる。ここで $\bar{\cdot}$ は複素共役を表す。ケット $|A\rangle$ と ケット $|B\rangle$ の内積は

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i B^i = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}^i B^i \tag{394}$$

と定義される。この定義だと

$$\langle A|B\rangle = \overline{\langle B|A\rangle} \tag{395}$$

となって、内積は対称ではない。このような枠組みで組み立てられたベクトル空間がユニタリ空間である。

1.1.7.4　テンソル、コテンソル、混合テンソル

ベクトルとコベクトルを区別する立場だと、テンソルにも同様の区別を設ける必要がある。

２階のテンソルには３種類のものが考えられることになる。デカルト座標系で、テンソルをベクトルとベクトルからスカラーへの双線型写像と定義する立場で言えば、

- コベクトルとコベクトルからスカラーへの双線型写像がテンソル
- ベクトルとベクトルからスカラーへの双線型写像はコテンソル
- コベクトルとベクトルからスカラーへの双線型写像は混合テンソル

となる。同様に、デカルト座標系で、ベクトルからベクトルへの線型写像をテンソルだと定義する立場で言えば

- コベクトルからベクトルへの線型写像がテンソル
- ベクトルからコベクトルへの線型写像はコテンソル
- ベクトルからベクトル、あるいはコベクトルからコベクトルへの線型写像は混合テンソル

となる。以下、必要に応じて区別することにするし、面倒になれば区別しないことにする。

1.1.7.5　テンソル積

次にベクトルとベクトルの間のテンソル積がどうなるかを考えよう。ベクトルとコベクトルの区別をする場合、２階テンソルは、コベクトルとコベクトルからスカラーへの線型写像という言い方ができる。

1.1.4.4.1 節のテンソル積の定義を参考にすれば、ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の間のテンソル積の成分は、コベクトルの基底 φ^i、φ^j を用いて

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})^{ij}=\varphi^i(\boldsymbol{a})\varphi^j(\boldsymbol{b})=a^ib^j \tag{396}$$

と書くことが出来る。ここで、(359) 式を用いた。したがって、

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\sum_{i,j=1}^{3}a^ib^j\boldsymbol{t}_i\otimes\boldsymbol{t}_j \tag{397}$$

である。

1.1.8　ベクトルとテンソルの概念に関する簡単な歴史

本講義では歴史を追ってベクトルの概念を解説するわけではないが、それでも簡単にベクトルとテンソルの概念が成立した歴史を知っておくのは有益であろう。しかし、興味がなければ、読み飛ばして差し支えない。この 1.1.8 節のベクトル解析の歴史の内容は、主に Crowe (1985) に基づく。これが数学史の本であるのに対して、1.1.8.9 節のテンソルの歴史の内容は、Dimitrienko (2002) と Sochi (2016) というテンソル解析の本の序の部分に主に基づいており、それほど詳しくないことをお許しいただきたい。

ベクトル解析の歴史はそう古いものではない。今のベクトルの概念は、電磁気学の体系が整備される中で、ギブスとヘビサイドによって 19 世紀末に作られた。つまり、今から見ると奇

妙にさえ思えることだが、力学や電磁気学の体系が最初に出来たときには、ベクトルの記号は使われていなかったということである。

ベクトルの概念の源は、数学と物理学にある。数学の方は、数の概念の拡張の延長上にある。物理学の方は、力学や電磁気学の展開に伴うものである。力学で、速度と力とかいったベクトル的な量が生まれ、さらに電磁気学ではベクトル場的な概念が出てくる。これらの２つの伝統が 19 世紀に合流してベクトルの概念が生まれることになる。

テンソルの概念の源も、数学と物理学にある。数学の方は、行列の計算、ならびに曲線や曲面の微分幾何学にある。これが連続体力学や一般相対論で使用されるようになって、物理学に広く普及するようになった。

1.1.8.1　18 世紀まで

19 世紀以前からベクトルにつながるような萌芽的な概念は三つほどあった。

一つ目は、速度や力が平行四辺形の形で合成されるという考え方である。これはかなり古くからある。しかし、それは何かの「和」であるとみなされてはいなかった。

二つ目は、ライプニッツ (Gottfried Wilhem Leibniz) が 17 世紀末ごろに考えた「状況の幾何学 (geometry of situation)」である。ライプニッツは、図形や運動を表す数学を模索していた。しかし、彼が作ったのは、合同関係を記号化したもので、図形をある程度表現は出来たものの、和や積の概念には到達していなかったし、物理学へ応用もできなかった。

三つ目は、複素数の複素平面上の表示である。これは２次元平面上の向き付きの線分、すなわちベクトルのようなものとみなすこともできる。これは 1797 年から 1831 年の間に Wessel、Gauss、Argand、Buée、Mourey、Warren という６人の数学者によってほぼ同時期に独立に発明された。複素数の幾何学的表示を最初に行ったのは、ノルウェーの Caspar Wessel であるが長い間知られていなかった[33]。もっとも有名で影響力があったのはガウス (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) によるもので[34]、そのために複素平面のことはしばしばガウス平面と呼ばれる。

1.1.8.2　ハミルトンの四元数

複素数によって平面上の線分を表現できるようになった。ハミルトン (Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865) はそれを３次元化する工夫の中で**四元数** (quaternion) を発明した。それがやがてベクトルへとつながってゆく。

ハミルトンは、1805 年にダブリンで生まれた。小さいときから神童の呼び声高く、物理数学だけでなく古典も得意であった。語学も得意で、13 の外国語を勉強した。20 代から 30 代前半にかけて、解析力学と光学の分野で大きな業績を上げて有名になり、1837 年にはアイルランド王立アカデミー (Royal Irish Academy) の長に選ばれた。1843 年に四元数を発見して、その後死ぬまでの 20 年余りを四元数の研究に費やした。

ハミルトンは、まず複素数の理論的基礎付けを考えていて、1833 年頃、複素数を２つの実数の組 (a_1, a_2) であるととらえるという考え方に達した（出版されたのは 1837 年）。虚数単位 i を使って書けば、(a_1, a_2) は $a_1 + a_2 i$ に対応する。そこで、それを３つ（以上）の実数の組に拡張しようと考えるのは自然な話である。ところが、これはけっこう難しかった。というのは、複素数が持っている以下の５つの性質をできるだけ保持したいと考えたからである (1) 和と積に関する結合則 (2) 和と積に関する交換則 (3) 分配則 (4) 0 以外による割り算が一意的に出来

[33] 1797 年に発表し、1799 年に出版されたが、ヨーロッパで知られるようになったのは 1897 年にフランス語訳が出版されてからである。

[34] 出版は 1831 年だが、アイディアは 1799 年頃にはすでに持っていたようだ。

ること (5) 積の大きさが大きさの積になること。その上で３次元幾何学的に意味のある量を作ろうとした。これが難しいことは、今普通に使われるベクトルのスカラー積（内積）やベクトル積（外積）が上の性質を満たしていないことからも想像できるだろう。

四元数のアイディアは 1843 年 10 月 16 日に降って湧いたということが書簡に記録されている。四元数とは、

$$p = a_0 + a_1\mathrm{i}_1 + a_2\mathrm{i}_2 + a_3\mathrm{i}_3 \tag{398}$$

という形をした数である。ここで、a_0、a_1、a_2、a_3 は実数で、i_1、i_2、i_3 は次の関係を満たす。

$$\mathrm{i}_1^2 = \mathrm{i}_2^2 = \mathrm{i}_3^2 = -1 \tag{399}$$

$$\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2 = \mathrm{i}_3 = -\mathrm{i}_2\mathrm{i}_1 \tag{400}$$

$$\mathrm{i}_2\mathrm{i}_3 = \mathrm{i}_1 = -\mathrm{i}_3\mathrm{i}_2 \tag{401}$$

$$\mathrm{i}_3\mathrm{i}_1 = \mathrm{i}_2 = -\mathrm{i}_1\mathrm{i}_3 \tag{402}$$

これは、積に対する交換則は満たさないが、上述の要請のうちそれ以外のものは満たす。とくに、結合則が満たされ、割り算が出来ることは、内積や外積には無い性質である。

ハミルトンは、四元数

$$p = a_0 + a_1\mathrm{i}_1 + a_2\mathrm{i}_2 + a_3\mathrm{i}_3 \tag{403}$$

の

$$\mathrm{S}p \equiv a_0 \tag{404}$$

の部分をスカラー部分、

$$\mathrm{V}p \equiv a_1\mathrm{i}_1 + a_2\mathrm{i}_2 + a_3\mathrm{i}_3 \tag{405}$$

の部分をベクトル部分と呼び、ベクトル部分には (a_1, a_2, a_3) という成分を持つ３次元空間の向き付きの線分（要するに「矢印」）を対応させた。これが、**スカラー**とか**ベクトル**とかいった単語が使われるようになった始まりである[35]。

四元数の積は、今のベクトルの内積と外積ともつながっている。スカラー部分のない２つの四元数 $p = a_1\mathrm{i}_1 + a_2\mathrm{i}_2 + a_3\mathrm{i}_3$ と $q = b_1\mathrm{i}_1 + b_2\mathrm{i}_2 + b_3\mathrm{i}_3$ の積を作ると、

$$pq = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{i}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathrm{i}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathrm{i}_3 \tag{406}$$

となり、今でいうベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{407}$$

の内積と外積の形が自然に現れることが分かる。すなわち、

$$\mathrm{S}pq = -\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{408}$$

$$\mathrm{V}pq = \sum_{i=j}^{3} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_j \mathrm{i}_j \tag{409}$$

である。あるいは、ここで、

$$qp = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - (a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{i}_1 - (a_3b_1 - a_1b_3)\mathrm{i}_2 - (a_1b_2 - a_2b_1)\mathrm{i}_3 \tag{410}$$

[35] ただし、radius vector ということばはその前から使われていた。

となることに注意すれば、

$$\frac{1}{2}(pq+qp) = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{411}$$

$$\frac{1}{2}(pq-qp) = \sum_{i=j}^{3}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_j \mathrm{i}_j \tag{412}$$

のように p と q の反交換子（$pq+qp$ のこと）と交換子（$pq-qp$ のこと）を用いて内積と外積を表現することができる。

このように四元数を用いるとベクトルの内積や外積も表現できることから、これで力学や電磁気学も表現できることがわかる。

ハミルトンの生前、四元数はなかなか広まらなかった。四元数は、積の交換則を満たさないということから、同時代人には抵抗もあった。さらに、1853 年にハミルトンが出版した『四元数講義 (Lectures on Quaternions)』が形而上学的な文言も多く含んだきわめて難解なものであったことから、四元数はなかなか広まらなかった。用語も vector、vehend、vection、vectum 等々多すぎて混乱を招くものであった。

四元数が広まったのは、むしろハミルトンの死後である。ハミルトンは、その後辞書的に使える本『四元数の基礎 (Elements of Quaternions)』を書き、生前ほぼ完成していたものが死の翌年の 1866 年に出版された。そのさらに翌年、テイト (Peter Guthrie Tait)[36]が物理学への応用も含んだ分かりやすい本『四元数の初等的理論 (Elementary Treatise on Quaternions)』を出した。テイトは 1859 年からこの本を書き始めていたが、ハミルトンが Elements を出すまで出版しないでくれという要請をしていたので、出版が 1867 年まで引き延ばされた。この二つの本が相補的な役割を果たして、四元数が広まるきっかけとなった。さらに平易な入門書『四元数入門 (Introduction to Quaternions)』が 1873 年にケランド (Phillip Kelland) とテイトにより著され、これは東京大学の前身の東京開成学校で教科書として用いられた。

しかし、ギブスとヘビサイドのベクトル解析が広まるにつれて、四元数は使われなくなる。

1.1.8.3　19 世紀前半〜ハミルトンの同時代人

ハミルトンが四元数を発明したのとほぼ同時期にベクトル的なもの（つまり有向線分とその演算）を案出した数学者が何人かいた。ここでは、August Ferdinand Möbius, Giusto Bellavitis, Hermann Günter Grassmann, Adhémar Barré (別名 Comte de Saint-Venant), Augustin Cauchy, Reverend Matthew O'Brien の６名について簡単に紹介する。これらの人々はハミルトンほど有名ではなかったので、のちのベクトル解析の発展にはたいした影響を与えなかった。しかしながら、これだけの人々がベクトル的なものを考えたということは、当時の時流としてベクトル的なものが発明される機運があったのだと言える。この中ではグラスマン (Grassmann) がとくに重要なので、グラスマンとそれに関連したコーシー (Cauchy) については、項を改めて述べる。

「メビウスの輪」で有名なメビウス（August Ferdinand Möbius, 1790–1868) は「重心計算 (barycentric calculus)」を発案した。これは、点に場所と大きさ（質量に相当）を付与するもので、足し合わせて重心を計算するようになっていた。1827 年にまとまった本を出版している。死後 1887 年に出版された本の中では、グラスマンの影響を受けて内積や外積に当たる量も出してきている。ただし、外積に相当する量はベクトルであるとは考えられておらず、単に面積であるとされている。

[36] 1.1.8.5 節参照。

ベラヴィティス (Giusto Bellavitis, 1803–1880) は「等価計算 (calculus of equipollences)」を発案した。これは有向線分を考えるもので、和は今のベクトルと同じように定義されていた。積や商は、水平面からの角度を偏角とするような複素数の積や商と同じように定義された。考え方は 1835 年の論文にまとまった形で書かれている。ただし、ベラヴィティスは複素数を認めない立場だったので、有向線分を複素数の幾何学的表現と考えていたわけではなく、有向線分を幾何学的な実体であると考えていた。

グラスマンの主著は 1844 年に出版されており、それは項を改めて述べる。以下の二人は順番で言えばその後に主要な論文を出している。

サンブナン (Adhémar Barré, Comte de Sain-Venant, 1797–1886) は、1845 年の論文でベクトル解析に近いものを案出した。有向線分に対して、幾何和、幾何差（これらはベクトルの和と差に相当するもの)、幾何積（これがくさび積に相当するもの）を定義した。幾何積は有向面積である。ただしこれは短い論文で、体系的とはいえない。サンブナンがどうしてこのようなアイディアに至ったのかは不明だし、この論文の後世への影響もあまりない。

グラスマンより少し後になるが、オブライエン (Reverend Matthew O'Brien, 1814–1855) は、独自に今のベクトルに相当するものを考えていた。最も重要な論文は 1852 年の Philosophical Transactions に掲載されている。オブライエンは線分に沿った矢印の平行移動を考え、線分と矢印が垂直な場合を lateral、並行な場合を longitudinal と呼んだ。lateral に対応する u と v の積を $u.v$（これが今の外積に対応)、longitudinal に対応する積を $u \times v$（これが今の内積に対応）と書いた。オブライエンは、ハミルトンの四元数を元にして、このような積を発想したもののようである。しかし、積を取った結果がどういう量なのか（ただの数か線分か面積か）が明確に書かれておらず、積を２回取ったときにどうなると考えていたのか（結合則がどうなるか）わからない形なので、数学的に完成されていなかった。

1.1.8.4　グラスマンとコーシー

グラスマン (Hermann Günter Grassmann, 1809–1877) は、後から見れば、ハミルトンに比肩するような業績を上げているのだが、同時代人にはあまり評価されず、後のベクトル解析への影響は歴史的にはあまりなかった。しかし、以下に見るように、グラスマンは、ほぼ現代の n 次元ベクトル空間と同じものを作り上げている。

グラスマンは、ギムナジウムの教師の家に生まれた。ハミルトンと違って、小さい頃はそれほど秀才ではなかった。ベルリン大学に入学し、主に文献学と神学を学んだ。卒業後は、中等教育の学校教員として生涯を送った。

グラスマンは教師としての地位を上げようとして、1840 年、ベルリン科学試験委員会に『潮汐の理論 (Theorie der Ebbe und Flut) 』という研究成果を送った。ここに彼のベクトルの理論の初めての記述がある。しかし、この論文は委員会の主査によってあまりちゃんとは読んではもらえなかった。これが出版されたのは 1911 年になってからであった。

彼は、ベクトルのアイディアを 1832 年頃に発想した。彼はまず、有向線分を考えて、和を $AB + BC = AC$ で定義した。彼は、そのような和の概念が力学において有効であることに気付いた最初の人である。次に、ベクトルの「幾何積 (geometrical product)」を定義した。これは、２つのベクトルが作る平行四辺形であるとした（大きさが面積で、面の向きが決まっている有向面積）。二つの積が等しいとは、大きさが等しく、面が平行であることである。このグラスマンの積は、今で言う外積と似ているが、外積がベクトルであるのに対して、グラスマンの積は有向面積である。のちにギブスやウィルソンが、物理学への応用ではベクトルと考えた方が良いと主張して、それ以後、物理学では外積ベクトルが使われるようになった。それはともかく、このような積を定義すると、分配則が成立し、積について反交換則が成立する。さら

に、３つのベクトルの積は、その３つのベクトルが作る平行六面体であるとした[37]。これに加えて、グラスマンは、今で言う内積を「線型積 (linear product)」という名前で定義した。この積に関しては、分配則と交換則が成り立つ。

彼は、こういった積を力学に適用すると計算が簡単になることを見出し、潮汐の理論に応用した。それが 1840 年の「潮汐の理論」である。

グラスマンの理論の原型になっているのは、彼の父親のユストゥス (Justus Günter Grassmann, 1779-1852) が本に書いていたことである。ユストゥス・グラスマンは、点と点の積が線分で、線分と線分の積が長方形であるというように考えていた。これを長方形でなくて平行四辺形であるとして一般化したのが息子のヘルマンである。ヘルマン・グラスマンのアイディアは、メビウスに似ているようであるが、彼は、自分のベクトルのアイディアを作ってしまった後でメビウスの仕事に気付いた。ヘルマン・グラスマンがガウスの複素平面のことを知ったのも 1844 年のことで、ベクトルを複素数の拡張として考えたわけでもない。

グラスマンは、1844 年に出版された『線型拡大の理論 (Die lineale Ausdehnungslehre) 』でより完全な形でベクトルの理論を提示した。ここで彼は、対象を３次元空間に限る必要がないことに気付いて、現在の抽象代数の原型にたどりついている。本の題名に「拡大」とついているのは、空間の概念を一般の n 次元空間に拡大するという意味である。この本で展開された理論はきわめて先見性に富むものであったが、かなり抽象度が高くて分かりづらく、1840 年代には他の人からまったく理解されなかった。ガウスでさえ、こんなものを読んでいる暇は無いと書いている。

グラスマンは、一般的に空間の要素を「形式 (form) 」と呼んだ。１階の形式が有向線分（ベクトル）で、２階の形式が有向面積であるという具合である。n 階の形式は、本講義でいえば、n 階の反対称テンソルに相当する。形式の間には、和、差、積、商に対応する４種類の演算が定義できるものとした。これらの演算は、幾何学とは無関係に交換則、結合則などから抽象的に定義された。和と積に相当するものを、グラスマンは総合的結合 (synthetic connection) と呼んだ。差と商に相当するものを分析的結合 (analytic connection) と呼んだ。和は交換則と結合則で特徴付けられた。積は分配則で特徴付けられ、交換則や結合則は必ずしも要請されないものとした。和は同じ階数の形式どうしの演算で、結果は同じ階数の形式になる。n 階の形式と m 階の形式の積は $(n+m)$ 階の形式になる。このようにして、グラスマンは一般的な抽象ベクトル空間の概念にほぼ行き着いていた。

1844 年の本では、ベクトルの**外積** (outer product) と**内積** (inner product) という語が歴史上初めて導入されている。これは、1840 年の段階では、それぞれ「幾何積」と「線型積」と呼ばれていたものである。グラスマンが内積という言葉を使った理由は、２つのベクトルが共通の方向成分を持っているときにゼロにならないということからである。外積は、２つのベクトル（矢印）に対して、一方のベクトル（矢印）の起点をもう一方のベクトル（矢印）に沿って動かしたときにできる平行四辺形の向き付きの面積であると定義している。さらに、これが多次元空間に拡張されるように作られていたから、今の外積よりも適用範囲が広く、現代風に言えば、1.1.4.7 節で説明するくさび積を定義していることになっていた。

グラスマンは点に関する演算もいろいろ考えている。たとえば、点 α と点 β との外積は、α から β へ向かうベクトル $[\alpha\beta]=\beta-\alpha$ であるというふうに。これが外積であるという意味は、$[\alpha\alpha]=0$ や $[\alpha\beta]=-[\beta\alpha]$ のような反交換則が成り立つということである。

コーシー (Augustin Cauchy, 1789-1857) には、グラスマンは 1847 年に自著の『線型拡大の理論』を贈っている。その後の 1853 年にコーシーは「代数的な鍵について」という論文を出している。これはすでにグラスマンが書いていたアイディアに似ていて、外積を利用して代数

[37] この点で、グラスマンの積は 1.1.4.7 節で説明するくさび積とみなせるものであり、外積よりも数学的な性質は良いとも言える。グラスマンがすばらしく先見的なところである。

方程式を解く方法であった。この方法は、本講義では 1.1.4.7.5 節においてくさび積を使った形で扱った。しかし、ほとんど同じ方法をグラスマンがすでに「線型拡大の理論」で書いており、先取権の問題を生じた。ただし、この問題は、1857 年にコーシーが死んだのでうやむやになった。コーシーはすでにグラスマンの本を持っていたわけだから、剽窃の疑いさえある。

1850 年代に入るとやや風向きが変わって、グラスマンの理論の理解者が現れてくる。1852 年頃、ハミルトンは『線型拡大の理論』を読んだらしく、1853 年の手紙では、グラスマンのアイディアが自分の四元数に近く、「もう少しで四元数に到達する寸前だった」ことに驚いている。メビウスやサンブナンらもある程度の理解を示した。

1862 年にグラスマンは『拡大の理論 (Die Ausdehnungslehre) 』の第２バージョンを出版した。1844 年版に比べて余分なことをだいぶん削ぎ落としているものの、新しい結果も多く含んでおり、難解であった。そこでこれもほとんど理解されなかった。

1860 年代後半になると、グラスマンを強く支持する人々が現れる。ハンケル (Hermann Hankel, 1839-1873) が 1867 年に出した「複素数系の理論 (Theorie der complexen Zahlensysteme)」ではその一割くらいがグラスマンの体系の説明に充てられている。シュレーゲル (Victor Schlegel, 1843-1905) はグラスマンの体系の熱烈な支持者となり、その解説をしたり理論を発展させたりした。しかし、批判的に再構成するところまでは至らなかった。そのほかにもグラスマンの研究に関心を示す数学者はだんだんと増えていった。とはいいながら、彼の考えが広まる前に、彼のアイディアの多くは再発見されたり他の体系の中に取り込まれたりして、歴史的には後世にあまり影響を与えなかった。

一方、グラスマン自身は多才な人だったので、1860 年代以降は、数学以外のことに研究の重点が移っていった。とくに言語学には重要な貢献をしている。サンスクリット語の研究をして、1870 年には『リグ・ヴェーダ』の翻訳と『リグ・ヴェーダ辞典』の出版を行い、1876 年にテュービンゲン大学から名誉博士号を授与された。

1.1.8.5 1860–70 年代

この時代には、ベクトルのような体系の必要性が広く認識されるようになってゆく。1870 年代から 1890 年代には四元数の体系が一般に広まった。グラスマンの体系は 1890 年代になってから主にドイツで広まった。

テイト (Peter Guthrie Tait, 1831–1901) は、四元数に関してハミルトンの後継者である。ハミルトンがやらなかった物理学への応用を行い、その結果は後にベクトル解析に翻訳された。テイトは、スコットランドに生まれた。エジンバラ大学で１年学んだ後、ケンブリッジ大学で学んだ。1854 年からクイーンズ大学ベルファストで教鞭を執るようになる。1857 年に、四元数を物理学に応用すると便利なことに気付いて、それ以降四元数の研究を続ける。1869 年にはエジンバラ大学の自然哲学科の学科長になる。しかし、四元数の研究者としては驚くべきことに、テイトは講義には四元数を取り入れなかった。それは、おそらく当時の物理学には四元数に対する拒否反応があったためだろう。たとえば、偉大な物理学者のケルビン卿は、ベクトルや四元数を全く役に立たないものとみなしていた。

1.1.8.2 節で述べたように、テイトが書いた四元数の教科書『四元数の初等的理論 (Elementary Treatise on Quaternions)』(1867) とケランドと共著の『四元数入門 (Introduction to Quaternions)』(1873) は、四元数を世の中に広めるのに大きく寄与した。『四元数の初等的理論』は、物理学への応用に力点が置かれており、とくに 1873 年に出された第２版は、ギブスとヘビサイドが学んだという意味で、歴史的に重要である。『四元数の初等的理論』の第１章では、ベクトルの和と差とスカラー倍が定義されている。第２章では四元数の積と商が導入され、第３章

ではその解釈が説明される。今の内積や外積で出てくる

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta \tag{413}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = (|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin\theta)\boldsymbol{\eta} \tag{414}$$

（ただし、$\boldsymbol{\eta}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ に垂直な単位ベクトルである）に相当する式（四元数で表現されている）が出ている。第４章は四元数の微分、第５章は線型ベクトル関数（今のディアド積[38]に相当するものなど）である。それに続く４つの章は幾何学への応用、最後の２つの章は物理学への応用であった。

上述のように、テイトの『四元数の初等的理論』は、今のベクトル解析とよく似ている。とくに、テントが演算子 ∇ (nabla, del, atled などと読む) を用いて理論を展開したことは重要で、グリーンの定理、ストークスの定理、ガウスの定理などが見通し良く書かれることになった。テイトの功績は、四元数が物理学にとって有用であることを示したことにある。

パース (Benjamin Peirce, 1809–1880)[39] は、アメリカ合衆国の最初の大数学者であった。パースは四元数の研究はしていないが、四元数の支持者であり、四元数をアメリカに広めると共に、四元数から発展した線形結合代数を創った。線型結合代数とは、四元数を一般化したような代数系の可能性を探索したものである。パースは教鞭を執っていたハーバード大学では四元数の講義をしており、その影響で多くのアメリカの大学で四元数の講義がなされた。

マクスウェル (James Clerk Maxwell, 1831–1879) は、1860 年代に電磁気学の基礎方程式のセットを最初に提案した。これは成分で書かれていた。友達だったテイトの勧めに応じて、マクスウェルは 1870 年代になって四元数の勉強を始めた。そうして、1873 年の本『電気と磁気の理論 (Treatise on Electricity and Magnetism)』においては、方程式は成分と四元数の両方で書かれるようになった。

1871 年の論文『物理量の数学的な分類について (On the Mathematical Classification of Physical Quantities) 』において、マクスウェルは、ハミルトンがスカラーとベクトルの区別をしたことは非常に重要だと書いている。この論文で、マクスウェルはベクトルを「力ベクトル (force vector)」（単位長さあたりの量）と「流束ベクトル (flux vector)」（単位面積当たりの量）に分類した。さらにテイトが発展させた演算子

$$\nabla = \mathsf{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathsf{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathsf{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{415}$$

$$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) \tag{416}$$

（記号は現代風に改めてある[40]）に注目し、スカラー関数 s に対して ∇s を s の「勾配 (slope)」[41]、$\nabla^2 s$ を「集中度 (concentration)」と呼ぶことを提案している。一方、この ∇ をベクトル（スカラー部分の無い四元数）$v = v_1\mathsf{i}_1 + v_2\mathsf{i}_2 + v_3\mathsf{i}_3$ に演算すると、

$$\nabla v = -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + \mathsf{i}_1\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \mathsf{i}_2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + \mathsf{i}_3\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \tag{417}$$

となる。マクスウェルは、このスカラー部分 $S\nabla v$ を v の「収束 (convergence)」、ベクトル部分 $V\nabla v$ を「**回転** (curl もしくは version)」[42]と名付けた。

---

[38] 1.1.4.4.1 節参照

[39] プラグマティズムの創始者として有名な Charles Sanders Peirce は Benjamin Peirce の次男である

[40] とはいえ、∇^2 の符号が現在のラプラシアンとは逆になってしまうのは、四元数の演算上やむをえない。

[41] 『電気の磁気の理論』の第２版以降では「空間変化 (space variation)」という語を用いている。

[42] 『電気と磁気の理論』の第２版以降では rotation という語を用いている。

マクスウェルは、四元数を勉強して四元数の支持者になった。彼にとって、四元数は単に計算を簡単にする道具とか思考の節約の道具とかではなかった。四元数やベクトルは、物理量の心的な像を与えるものであった。彼にとって、ベクトル的なアプローチは、物理的な実体の直接的な数学的表現であった。しかし、マクスウェルは、四元数による計算に不満も持っていた。とくに、ベクトルの自乗が負になってしまい、運動エネルギーが負になるような点に困惑していた。

マクスウェルの最も重要な著作は、1873 年の『電気と磁気の理論』である。ここで、電磁気学の方程式は成分の形と四元数の形で書かれている。完全に四元数の形になっていないのは、当時四元数がそれほど人々に知られていなかったことと、計算ではいずれ成分を使うことになるからであった。上述のベクトルの自乗が負になる問題もマクスウェルは気にしていて、完全に成分の形を捨てるわけにはいかなかったようである。この本は、人々が四元数を学ぶようになるきっかけともなった。

マクスウェルは『電気と磁気の理論』の中でも、ハミルトンによる四元数で座標に頼らずに物理量が表現できることを強調し、スカラーとベクトルの区別を重要視している。さらには、応力や歪みはスカラーでもベクトルでもなく、ベクトルの線型ベクトル関数で表されると述べている。これは 1.1.2.3 節で述べるテンソルの定義の先駆けともみなすことができる。

クリフォード (William Kingdon Clifford, 1845–1879) は、四元数からベクトル解析への過渡期を作った。彼は、四元数とグラスマンの解析の両方を知っていた。彼は 1878 年の『力学の要点 (Elements of Dynamic) 』[43] において、ほぼ現在と同じ形のベクトル積とスカラー積[44]を導入している。ベクトル積は２つのベクトルが作る面に垂直なベクトルであるとしてある。ただし、四元数の名残で、スカラー積の符号が現在のものと逆になっている。

1.1.8.6　ギブスとヘビサイドによる現代ベクトル解析の創始〜1880 年代

この時代に、今のベクトル解析が発案されて整備される。ギブスとヘビサイドは、ほぼ同時期に四元数の積が物理学にとって不要で、内積と外積があれば十分だということに気付き、今の形のベクトルの代数を作り上げた。

ギブス (Josiah Willard Gibbs, 1839–1903) は、1858 年にイェール大学を卒業した。1863 年にアメリカ合衆国で初めての工学博士号を取得した。1871 年からイェール大学の数理物理学の教授になり、亡くなるまでその職にとどまった。1876 年と 1878 年に論文「不均質な物質の平衡について (On the equilibrium of heterogeneous substances) 」を Transactions of the Connecticut Academy に発表した。これは化学熱力学の基礎となる概念を確立したきわめて重要な論文である。これがヨーロッパで知られるようになったのは、1890 年代になってからで、オストワルドがドイツ語に翻訳してからであった。

ギブスが電磁気学に興味を持ったのは、マクスウェルの『電気と磁気の理論』が出版されてから、すなわち 1870 年代になってからであった。『電気と磁気の理論』を勉強していくうちに、四元数の積が不要で、スカラー部分（今で言う内積）とベクトル部分（今で言う外積）だけがあればよく、∇ に関してもスカラー部分とベクトル部分に分離しても良いことに気付いた。そこで、四元数を排して最小限のシステムを作ろうということでベクトル解析の理論を作った。作り上げたものがグラスマンの体系に近いことには、ギブスは後から気付いている。

ギブスは、やがて自分の研究をまとめて『ベクトル解析の要点 (Elements of Vector Analysis)

---

[43] この本は https://archive.org/details/elementsofdynami01clifiala で閲覧することができる。

[44] 外積と内積と言ってもよいが、クリフォードが使っている用語としては vector product と scalar product である。

』[45]として自費出版し（1881 年に前半の第１章と第２章、1884 年に後半の第３～５章)、有力な研究者に配った。第１章は、ベクトルの代数ということで、まずスカラーとベクトルを区別し、direct product（今で言う内積）や skew product（今で言う外積）などが導入されている。記号としては、ベクトル α と β の direct product を $\alpha.\beta$、skew product を $\alpha \times \beta$ のように書いている。第２章は、微積分ということで、演算子 ∇ を導入している。スカラー u の derivative（今で言う勾配）∇u、ベクトル ω の「**発散** (divergence)」、「**回転** (curl)」が定義される。関連する基本定理（ガウスの定理など）も示されている。第３章では線型ベクトル関数が取り扱われ、その中にはギブス独自の貢献が見られる。本講義では 1.1.4.4.1 節で触れる「**ディアド** (dyad)」や「**ディアディック** (dyadic)」の概念がここで現れる。第４章は第２章の補足、第５章はディアディックの超越関数である。このようにして、この本は後のベクトル解析の基礎となった。

ギブスは、講義や論文等を通じてベクトル解析を世に広めた。ギブスは、グラスマンが作った多重線型代数の重要性もよく認識し、これを賞賛した。ギブスはさらに、ベクトル解析の手法が電磁気学だけでなく天体力学にとっても有用であることを示した。

一方、イギリスでもヘビサイド (Oliver Heaviside, 1850–1925) がギブスとは独立にベクトル解析を案出した。彼の家はあまり裕福ではなかったので、大学へは行けず、電信技士となった。1874 年に仕事を辞め両親の元で独自に勉学と研究に励んだ。彼は、ギブスと同様に、マクスウェルの『電気と磁気の理論』を勉強したのがきっかけで、四元数を単純化することによってベクトル解析にたどり着いた。ヘビサイドは、1888 年になってギブスの『ベクトル解析の要点』を手に入れ、自分が作ったものと本質的に同じものであることに気付いた。もちろん、グラスマンの研究のこともギブスの本を見るまでは知らなかったようである。

ヘビサイドがベクトルを使った最初の論文は、1882–1883 年の「磁力と電流の関係 (The relations between magnetic force and electric current)」であった。ここでは回転 curl が半定量的に導入され、Gauss の定理と Stokes の定理に相当するものが証明される。四元数からは離れたものの、まだベクトルどうしの積の概念は出てきていない。次の「電流のエネルギー (Current energy)」(1883) という論文ではスカラー積が出てくる。さらに次の「静電的ならびに磁気的な関係式 (Some electrostatic and magnetic relations)」(1883) では、「**発散** (divergence)」がマクスウェルの「収束 (convergence)」の符号を反対にしたものとして定義される。そしてスカラー P の「空間変化 (space variation) [46]」∇P とベクトル R の発散 div R と回転 curl R を明確に別のものとして扱った（四元数だと、発散と回転が一緒に出てくることとの対比)。1885 年の「電磁気的誘導とその伝播 (Electromagnetic induction and its propagation)」においてベクトル積が導入された。以上の経過を経て、1885 年の「電磁波面 (On the electromagnetic wave surface)」において、ヘビサイドは初めて彼のベクトルの体系をまとまった形で示した。スカラー積とベクトル積が定義され、演算子 ∇ が定義された。

ヘビサイドの主な功績は、ベクトル解析を電磁気学に体系的に応用したことである。主著『電磁気論 (Electromagnetic theory)』は３巻本で、各巻は 1893、1899、1912 年に出版された。このうち第一巻の第３章が、ベクトル解析の体系的な展開に充てられている。これは、現代的なベクトル解析全般の初めての出版物である。ヘビサイドは、ギブスの功績を認めているが、ギブスの記法は気に入らず、別の記法を用いている。まず、ギブスがベクトルをギリシャ文字で表したのに対し、ヘビサイドは太字で表した[47]。それから、スカラー積とベクトル積は、それぞれ、$\mathbf{AB}$、V$\mathbf{AB}$ のように書いた。ヘビサイドは、四元数は物理的には意味がなくベクトルこそが意味のあるものだと明確に述べており、四元数だとベクトルの自乗が負になることもおか

[45] この本は https://archive.org/details/elementsvectora00gibbgoog や http://jacqkrol.x10.mx/assets/articles/eltsvectoranalysis.pdf で見ることができる。

[46] 前に書いたようにこれはマクスウェルが用いた語である。

[47] 正確には Clarendons というフォントだが、LaTeX ではどう出したらよいかわからないので ここでは LaTeX 標準の太字 (mathbf) とした。

しいと書いている。

ヘビサイドのベクトル解析は直ちに世の中に受け入れられたわけではない。しかし、1887 年にヘルツが電磁波の送受信の実験に成功したことなどから、マクスウェルの電磁気学への関心が高まり、ヘビサイドの理論にも関心が集まるようになってきた。1892 年には彼の『電気学論文集 (Electrical Papers)』が出版された。翌年、George Francis FitzGerald がこれを高く評価する書評を書いた。ただし、表現は読みづらいとした。ドイツでは August Föppl が 1894 年に広く読まれることになる電磁気学の教科書を書いた。この教科書ではヘビサイドのベクトル解析が使われていた。このように、ヘビサイドのベクトル解析は、電磁気学を通して広まっていった。

1.1.8.7　1890 年代前半の生存競争

1890 年から 1894 年の間にベクトルの方法を巡って様々な議論が交わされた。いわば、多重線型代数の方法に関する生存競争が起こった。

1890 年にテイトは四元数を擁護する文章を２つ書いた。その一つにおいては、四元数は超越的に表現力があり (transcendently expressive)、自然だ (natural) と論じた。一方で、デカルト座標系の使用は人為的だ (artificial) とした。もう一つの文章においては、ギブスのベクトル解析を、ハミルトンとグラスマンの記法を混ぜこぜにした怪物だと批判している。翌 1891 年にはギブスは反論を書いている。反論の一つは、物理学において内積や外積は自然に現れるのに対して、四元数の積に対応する物理的な実体がないことである。もう一つは、ベクトルは高次元に容易に拡張できるという点である。これに対するテイトの反論は、ギブスのディアドが人為的であることと、高次元など意味がないというものであった。もちろん、今から見れば、高次元への拡張は意味がある（関数空間のような無限次元空間さえある）わけで、テイトの言い分は不当である。ただ、四元数の積には結合則が成り立つのに、外積では成り立たないということに関しては、四元数の方に軍配が上がるかもしれない。

同じ 1891 年、ギブスは Nature に『四元数と拡大の理論 (Quaternions and the Ausdehnungslehre)』という記事を書いた。ここで、ギブスは、四元数論者がハミルトンの先取権を言い立てるのに対抗して、グラスマンを引用した。グラスマンの方法を引き立てることで、自分のベクトル解析を擁護した。テイトがグラスマンの業績をよく知らなかったのに対して、ギブスはハミルトンとグラスマンの両方の業績に通じていたから、グラスマンの評価に関してはギブスの方が正しい。さらに、ギブスは、幾何学や物理学の例では、内積と外積が重要で四元数の積は表れないことを再度強調している。テイトは、これに対して短い返答を書いたのみで、まともに反論できなかった。

テイトとギブスの論争を踏まえて、マクファーレン (Alexander Macfarlane, 1851-1913) は、四元数とベクトルを折衷したようなものを 1891 年に考案し、1892 年に『物理学の代数の原理 (Principles of Algebra of Physics)』という論文にした。しかし、これはその後使う人がいなかった。ベクトル解析のもう一人の創始者であるヘビサイドは、テイトとギブスの論争はギブスの勝ちだと『電磁場の力、応力、エネルギー流束について (On the Forces, Stresses, and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field)』(1893) で論じた。それは、物理量がベクトルであるからということであり、ギブスとヘビサイドの立場は記法以外の点については一致していた。この時期、マコーレー (Alexander McAulay, 1863-1931) は、論文や『物理学における四元数の効用 (Utility of Quaternions in Physics)』(1893) という本の中で四元数を擁護する議論をいろいろしているが、論理的というよりも感情的で煽動的なものであった。テイトは、書評でこの本を好意的に評価しているが、さすがに煽動的な議論には辟易している。テイトは、ヘビサイドの論文に対しては、こんな粗野な数学を勉強する気が起きないという意味のことを書いている。

ギブスは 1893 年に再び Nature に『四元数とベクトル代数 (Quaternions and the Algebra of Vectors)』という論文を書いて、議論に加わった。マコーレーらは、四元数が普及しないのは記法のせいだとしていた。これに対し、ギブスは、四元数はベクトルの幾何学的意味を覆い隠すようになっているのがいけないとした。ベクトル的な考え方はすでに 50 年くらい前からあるもので自然に出てくるのだと主張した。物理学の流れと数学の流れが自然に一体になったところにベクトルがあるのだという考えであった。ギブスは、四元数に対するテイトの貢献も十分に評価していた。ヘビサイドもギブスに同調して、ベクトルの方が四元数よりも簡潔で明快だと主張した。ただし、ヘビサイドの書き方はいささか不遜なものであった。

四元数擁護側のまともな議論としては、ノット (Cargill Gilston Knott, 1856-1922) [48]が 1892 年に Proceedings of the Royal Society of Edinburgh に書いた『ベクトル理論の近年の改革 (Recent Innovations in Vector Theory)』がある。ノットは、まず、近年のベクトル理論はオブライエンの理論（1.1.8.3 節参照）からほとんど進んでいないとケチをつけた。次に、ギブスがスカラー積とベクトル積が基本的だと論じているのに反対して、四元数は除算ができるから基本的だと論じた。ノットは、そもそも二種類の積を作るということに抵抗を感じており、同様に $\nabla\cdot\omega$ と $\nabla\times\omega$ を別々に定義しないといけないのも問題だと考えた。ギブスの線型ベクトル関数の取扱も複雑すぎて、四元数を使ったほうが簡潔だと論じた。ギブスはこれに反論し、その後もいろいろなやり取りがあった。

なお、ベクトルの自乗が負になる（四元数）か正になる（ギブス・ヘビサイド流のベクトル解析）かは、単に定義の問題といえばそれまでで、どちらが良いとはっきり決めうるようなことではない。

1894 年には、「四元数を含むベクトル的手法」対「座標を使う方法」という四元数対ベクトルとは少し違う議論が、ケイリー (Arthur Cayley, 1821-1895) とテイトの間で起こった。Proceedings of the Royal Society of Edinburgh の『座標対四元数 (Coordinates versus Quaternions』という論文で、ケイリーは、四元数は純粋数学者から見れば重要であるが、応用面から言えば結局座標を使わないといけないので、四元数は単なる記法の簡略化に過ぎないと論じた。これに対し、テイトは同じ雑誌に『四元数の方法の内在的性質について (On the Intrinsic Nature of the Quaternion Method)』という論文で反論をしている。彼によれば、四元数こそが実体で座標に依存しないものであり、座標は人為的な方便に過ぎない。この論点に関しては、現代的な見方ではテイトに軍配が上がる。四元数にせよベクトルにせよ、四元数やベクトルそのものが実体で、座標は計算上の便宜であると考えることができる。

こういった 1890–1894 年の四元数対ベクトル解析の議論を全体としてまとめてみると、以下のようになるだろう。四元数派から見ると、ベクトルは四元数を部分的につまみ食いしているくせに、その結果が四元数よりも優れていると議論する不届きな輩に見えたのだろう。これに対して、ギブスは冷静で説得力のある議論を行った。ヘビサイドはベクトル解析を電磁気学に応用することで、ベクトル解析を広めた。ギブスやヘビサイドが物理学との適合性や理解しやすさなどの実用性を重視したのに対して、四元数派は数学的な洗練度や代数的な単純さを重視した。議論をもっと冷静に広い目で見れば、ベクトル解析にしても四元数の伝統から生まれてきたものなので、それほど対立する必要も無かったのかもしれない。さらに、四元数にしてもギブス・ヘビサイド流のベクトル解析にしても、広い意味でのベクトル解析の二つの流儀であるという見方もできる。とはいえ、結果的には、ギブス・ヘビサイド流のベクトル解析が広く受け入れられるに至った。

[48]ノットは、帝国大学理科大学のお雇い外国人教師をしていたことがあり、田中館愛橘とともに日本全国で磁気調査を行った [e.g. 山田と矢島, 2015]。この磁気調査には、当時学生だった長岡半太郎も加わっている。

1.1.8.8　現代的なベクトル解析の誕生〜1894–1910 年

1894 年から 1910 年までの間には、10 余りのベクトル解析の本が出版されて、ベクトル解析が普及した。これらの本を見てゆくことにする。

フェップル (August Föppl) の『マクスウェルの電気学理論入門 (Einfuhrung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität)』(1894) は、ドイツにマクスウェルの電磁気学を紹介した最初の本である。マクスウェルの電磁気学は、それまでにイギリスでは広まっていたものの、ドイツではまだそれほど広まっていなかった。しかし、1887 年のヘルツの実験をきっかけにドイツでも関心が高まって、フェップルがこの本を書くことになった。この本でベクトル解析は、ヘビサイドの流儀で書かれ、記号もヘビサイドに従っている。この本は版を重ねており、ドイツで広く読まれた。フェップルは、ベクトル解析を用いた力学の本『力学技法講義 (Vorlesungen über technische Mechanik)』(1897-1900) も著している。

これと似た本がイタリアでも出版された。フェラーリス (Galileo Ferraris) による『電気技術講義 (Lezioni di Elettrotecnica)』(1894) である。こちらもヘビサイド流である。

ウィルソン (Ediwin Bidwell Wilson) が 1901 年に著した『ベクトル解析：ウィラード・ギブスの講義に基づく数学と物理学との学生のための教科書 (Vector Analysis: A Text Book for the Use of Students of Mathemacis and Physics Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs)』は、現代的なベクトル解析だけのために書かれた初めての本である。ウィルソンは、ハーバード大学の数学科を卒業し、大学院でイェール大学に行った。そこで専攻長の勧めにしたがって、ギブスのベクトル解析の講義を受けた。ウィルソンは、すでにハーバード大学で四元数の講義を受けていたので、最初はあまり乗り気でなかったが、しかたなく受講した。しかし、すぐに講義を理解して、イェール大学の 200 年記念出版事業の一環としてこの本を出版した。この本は、ギブスの初期の仕事をほとんど網羅するとともに、線型ベクトル関数の話などを付け加えてある。

ドイツで初めて出版されたベクトル解析だけのための本は、ブヒャラー (Alfred Heinrich Bucherer) の『ベクトル解析の基礎とその理論物理学への応用例 (Elemente der Vektor-Alanysis mit Beispielen aus der theoretischen Physik)』(1903) であう。彼も電磁気学への関心からベクトル解析を勉強しており、基本的にはヘビサイド流で、グラスマンの業績も取り入れている。ベクトルの和、積、微分、ポテンシャル論、座標変換など主要なトピックが扱われているのに加えて、力学、流体力学、電磁気学への応用を含んでいる。この本の第１版と第２版の間に『数理科学百科事典 (Encyklopädie der mathematischen Wissenshaften)』の編纂に際して記号の整理が行われた。そこで、第２版ではそこで採用された記号が用いられている。

ドイツでは、1905 年に相次いで２つの本が出版された。ガンス (Richard Gans) の『ベクトル解析入門とその数理物理学への応用 (Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik)』は物理学者や技術者のために書かれた本で、ベクトルの和、積、微分積分、座標変換、曲線座標などのトピックと、力学、流体力学、電磁気学への応用を含んでいる。この本は７版まで出版されるとともに、英語やスペイン語にも翻訳されて広く読まれた。数学者ヤーンケ (Eugen Jahnke) による『ベクトル算法講義とその幾何学、力学、数理物理学への応用 (Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik)』は、グラスマン流のベクトル解析の本で、ハミルトン-ヘビサイド流も多少利用している。ヤーンケは、グラスマンの流儀が幾何学にも数理物理学にも応用できて便利だと考えていた。ベクトルの積としては、内積、グラスマン流の外積、グラスマン流の regressive 積の３つが紹介されている。しかし、この regressive 積は現代のベクトル解析では全く使われない。ベクトルの微分を扱うところでは、勾配、回転、発散、線型ベクトル関数など、ハミルトン-マクスウェル-テイト-ヘビサイドの伝統に基づく用語と概念も使われている。

しかし、この本は版を重ねていないことから、それほど読まれていないと見られる。

1906 年には、ギブスの論文集の一環として、ギブスの元々のベクトル解析の本が出版された。ギブスの論文と併せて読むことができる。この本は短いので、ウィルソンによる大部の教科書と相補的である。

ソモフ (Pavel Osipovich Somoff, or Somov) は 1907 年にロシア語で『ベクトル解析とその応用』を出版した。これはロシアにおける初めてのベクトル解析の本である。著者は広くベクトル解析に通じていたので、あまり偏りがなく標準的な技法が使われている。記号は、基本的にはギブス-ウィルソン流である。

ファレンティナー (Siegfried Valentiner) の『ベクトル解析 (Vektoranalysis)』(1907) はブヒェラーやガンスの本と同様に物理学者のために書かれたものであるが、先行する本と違って、ギブス流の見方で線型ベクトル関数を扱っている。基本的にはヘビサイド-フェップル流ではあるが、ギブス-ウィルソン流も程好く取り入れられている。

数学者のブラリ・フォルティ (Cesare Burali-Forti) と物理学者のマルコロンゴ (Roberto Marcolongo) は 1909 年に共著で『ベクトル計算の基本とその幾何学、力学、物理数学への多くの応用 (Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla Fisica-Matematica)』を著した。ブラリ・フォルティはペアノ (Giuseppe Peano, 1858-1932) の影響でグラスマンの体系の信奉者となった。そこでこの教科書も基本的にはグラスマン流なのだが、ギブス-ヘビサイド流も少し混ざっていて、たとえばベクトル積が有向面積ではなくてベクトルになっている。この本の評判はあまり良くなくて、それほど読まれなかった。

1909 年には、物理学者コフィン (Joseph George Coffin) の『ベクトル解析：ベクトルの方法と物理学や数学への様々な応用 (Vector Analysis: An Introduction to Vector Methods and Their Various Applications to Physics and Mathematics)』も出版された。この本はウィルソンの本の簡略版のようなもので、ギブス-ウィルソンの流儀に従いながら、電磁気学や力学への応用にも力を入れている。この本はよく読まれ、今でも販売されている[49]。

イグナトフスキー (W. V. Ignatowsky) は 1909 年と 1910 年に２部作として『ベクトル解析とその理論物理学への応用 (Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik)』を出版した。これは、ブヒェラー、ガンス、ファレンティナーの本と同様物理学者向けのもので、かなり大部である。記号はフェップル流である。テンソルの節も含まれていた。書き方は独特で、定理の証明では成分による表記を避けるとか、ベクトル積を積分で定義するなどしている。

1898 年から 1935 年にかけて出版された『数理科学百科事典〜その応用を含めて〜 (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen)』の中にはベクトルの方法に関係する記事があり、影響も大きかった。幾何学の中にはグラスマンとハミルトンの体系に関する広範な記述があるが、これらは 1915 年以降に出版された。剛体の項 (1902) では、ティマーディング (H.E. Timerding) がグラスマンの体系の応用を書いている。連続体力学の項 (1901) では、アブラハム (Max Abraham) がグラスマン流とギブス-ヘビサイド流を折衷したような形式を用いている。物理学の節の中の「電気学と光学」ではベクトル解析が広く使われている。その中の最初の２つの節はローレンツ (Hendrik Antoon Lorentz, 1853-1928)[50] が書いており (1903)、全体でヘビサイド-ギブス流のベクトル解析が使われている。引き続く節でも、ガンス、ローレンツ、アブラハムらがベクトル解析を使っている。

このような様々の本の出版を通じて、ギブス-ヘビサイド流のベクトル解析が広く普及した。

[49] amazon.co.jp では Andesite Press のペーパーバック版が 1584 円、Forgotten Books のペーパーバック版が 1591 円 (2018/04/06 調べ)。

[50] ローレンツ力やローレンツ力で有名なオランダの物理学者である。ローレンス・ゲージで有名なデンマークの物理学者 Ludvig Valentin Lorenz と混同しないこと。こちらは t が入らない。

グラスマンの体系やハミルトンの体系に関する書物も出版されてはいたものの、それほど普及はしなかった。ギブスとヘビサイドを比べると、ギブスの方が数学的には体系的であったが、ヘビサイドの方が電磁気学と強く結びついていたために影響力があった。

ベクトル解析の歴史はこれで終わり、次の節では短くテンソル解析の歴史の説明をする。

1.1.8.9 テンソル概念の歴史

テンソルの計算や概念の源泉は、数学方面では、行列の計算、ならびに曲線や曲面の微分幾何学にある。

行列計算の基礎を作ったのは、ケイリーであった。とくに 1841 年には、現在も使われている行列式の記法

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{418}$$

を導入した。線型代数方程式の理論の基礎を作ったのは、クロネッカー (Leopold Kronecker, 1823-1894) であった。二次形式の理論は、ケイリーやリー (Marius Sophus Lie, 1842-1899) が作った。

19 世紀にガウスが曲線や曲面の微分幾何学の基礎を作り、リーマン (Bernhard Riemann, 1826-1866) がそれを一般の n 次元に拡張した。その中でテンソルの算法が生まれてきて、その開発者として重要な人物には、クリストッフェル (Elwin Bruno Christoffel, 1829-1900) やビアンキ (Luigi Bianchi, 1856-1928) がいる。とくに、クリストッフェルはテンソルの座標変換の規則や共変微分の概念を作った。

物理学の問題としては、弾性体力学が 18 世紀に始まった。応力は、はじめ X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z のように書かれていた。これらは立方体の各面に働く力を座標軸方向に投影したものと考えられた。この記法は現代的なベクトル解析を作ったギブスも用いていた。

現代的なテンソル解析を始めたのは、19 世紀終わりから 20 世紀始めにかけてのイタリアの数学者リッチ (Gregorio Ricci-Curbastro, 1853-1925) とその弟子のレヴィ・チヴィタ (Tullio Levi-Civita, 1873-1942) である。リッチは複数の添え字をつけた反変、共変テンソルの算法と微分を編み出し、n 次元空間の微分幾何学を確立した。このような計算のことをリッチ自身は絶対微分計算 (absolute differential calculus) と呼んでいたが、後の人はリッチ算法 (Ricci's calculus) と呼ぶこともあった。今では、一般にはテンソル解析と呼ぶ。レヴィ・チヴィタはこの計算をリーマン空間に応用し、リーマン空間における平行移動の概念を確立した。レヴィ・チヴィタ記号 ϵ_{ijk} は彼が導入したものである。

この新しい算法は、早速弾性論や結晶学に応用された。フォークト (Woldemar Voigt, 1850-1919) は、弾性体力学で応力を記述するのにテンソルという語を 1898-1903 年に使った（1.1.2.4 節参照）。フォークトは、結晶の物性の記述するのに、成分を行列の形に書いたテンソルを初めて用いた。ここからテンソルという単語が広まった。

テンソル解析が普及したのは、一般相対論で必須の道具として使われるようになってからである。一般相対論は 1911 年から 1916 年にかけてアインシュタイン (Albert Einstein, 1879-1955) が作ったものだが、1916 年の論文で、添え字が重なるところは和を取り和記号を省略するというアインシュタインの規約が現れた。さらにテンソル解析は、連続体力学でも重要となった。

そういうわけで、20 世紀初頭にテンソル解析が発達した。その時期の教科書としては、レヴィ・チヴィタの『絶対微分計算 (Lezioni di calcolo differenziale assoluto, 1925; The absolute differential calculus, 1927)』やスハウテン (Jan Arnoldus Schouten, 1883-1971) の『リッチ算法 (Der Ricci-Kalkül)』(1924) が有名である。

その後の展開としては、たとえば以下のものがある。ワイル (Hermann Weyl, 1885-1955) は、テンソルを２次形式から代数的に定義する方法を導入した。連続体力学においては、20 世紀半ばに Rivlin、Eriksen、Noll、Adkins、Green、Smith、Truesdell、Lurier らによってテンソルで成分をあらわに出さない書き方が導入された。不変式論や群論との関係も出てきて、20 世紀後半からは非線形テンソル関数も研究されている。

参考書、参考文献

Michael J. Crowe (1985) ”A History of Vector Analysis — The Evolution of the Idea of a Vectorial System”, Dover [オリジナル版は 1967 年、University of Notre Dame Press。1.1.8 節のベクトルの歴史の記述は主にこれによる。]

Yu I. Dimitrienko (2002) ”Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions”, Springer Science + Business Media (Originally published by Kluwer Academic Press)

Taha Sochi (2016) ”Tensor Calculus Made Simple”, Createspace Independent Pub (Amazon Kindle)

太田浩一 (2015) ナブラのための協奏曲—ベクトル解析と微分積分、共立出版

北野正雄 (2009) 新版 マクスウェル方程式（SGC BOOKS P4)、サイエンス社

公田蔵 (2002) 四元法 (quaternion) と明治前期の日本—日本の「高等数学」教育史の一断面—, 数理解析研究所講究録, 1257, 244-249 [1.1.8.2 節の記述の参考にした。]

シュッツ (1987) 物理学における幾何学的方法（物理学叢書 53)、吉岡書店

田代嘉宏 (1981) テンソル解析（基礎数学選書 23)、培風館

P. チャドウィック (1979) 連続体力学、ブレイン図書出版

H. フランダース (1967) 微分形式の理論、岩波書店

山路敦 (2000) 理論テクトニクス入門—構造地質学からのアプローチ、朝倉書店

山田直利・矢島道子 (2015) E. ナウマン著「地殻の構造によって影響される地磁気．付：全地球磁気調査の提言」全訳, GSJ 地質ニュース, 4(6), 161-172 [1.1.8.7 節脚注で引用した。]
`https://www.gsj.jp/publications/gcn/gcn4-06.html`

吉田総仁 (1997) 弾塑性力学の基礎、共立出版

H. ワイル (1973) 空間・時間・物質（内山龍雄訳)、講談社 [その後、ちくま学芸文庫から 2007 年に再版されたが現在品切れ]

参考 web pages

Introduction to Elasticity/Tensors,
`http://en.wikiversity.org/wiki/Introduction_to_Elasticity/Tensors`
もしくは `http://www.thefullwiki.org/Introduction_to_Elasticity/Tensors`