

固体地球変動学 2020 年度吉田担当分：プレートテクトニクスとマントル対流の熱力学

2020年6月7日

1 はじめに～授業全体の概要

「固体地球変動学」では、プレートテクトニクスの物理的側面を取り扱う。皆さんはすでにプレートテクトニクスの概要是すでに知っているであろう。同時に、皆さんは1, 2年生の時に物理学のいろいろな授業を受けてきたはずだ。地球で起きている現象は、物理現象なので、物理学による解釈がなされねばならない。それが地球物理学というものである¹。本講義では、物理学的にプレート運動とマントル対流を見てゆくことにする。プレート運動はマントル対流の一部なので、その両方を一体として見てゆく必要がある。

物理学と言ってもいろいろあるけれど、この講義では、熱力学、流体力学、弾性体力学の側面から見てゆく。

1. プレートテクトニクスとマントル対流の熱力学 [吉田担当] ; 熱伝導、プレートの冷却モデル、マントル対流のエネルギー論、地球の熱史
2. マントル対流の流体力学 [高橋担当] ; マントル対流
3. プレートテクトニクスの弾性体力学 [金嶋担当] ; プレートに働く力とプレートの変形

私の担当部分の前半3回と後半2回に大きく分かれる。それらの予定は以下の通り：

1. はじめに（概要説明）
2. 非平衡熱力学の初步と熱伝導
3. 地殻熱流量の計測
4. 熱伝導方程式とプレート冷却モデル
5. 地球のグローバル熱収支
6. 地球の熱史

前半では、熱伝導の概念をしっかりと基礎から勉強するとともに、それをプレートの冷却に応用する。後半は、地球のグローバルな熱収支とそこから導かれる地球の冷却史を学ぶ。

¹本当は、観測手段として物理学を使うという意味での地球物理学もあるので、それだけではない。

2 非平衡熱力学の初步

熱やエネルギーを扱う学問は熱力学だけれども、学部で通常扱う熱力学は平衡熱力学であるのに対し、地球は明らかに非平衡系である。では、熱力学は使えないのかというと、そんなことはなくて、使えなければ天気予報もできない。学部では、たいていの場合、「非平衡熱力学」という看板をかけずに、何となくなし崩し的に実質的に非平衡熱力学の内容を出してきている。それを今度の授業では、ちょっとだけフォーマルに非平衡熱力学という立場を掲げて始めるこ^トにする。

2.1 热伝導の非平衡熱力学

今回の授業の最初の3回では熱伝導を取り扱う。熱伝導は必修実験でも扱っているし、わざわざ非平衡などと言わなければ、すでにいろいろなところで出てきているであろう。それを改めて非平衡の熱力学という立場から見ていって、プレートテクトニクスへの応用をみてゆく。熱伝導がどういう意味で非平衡かというと、温度が場所によって異なるという現象を扱っているからである。厳密な平衡熱力学では、系全体でただ一つだけの温度が定まる。このような状態は、日常的に経験するもので、部屋の中でも天井近くと床の近くでは温度が異なる、などなど。当たり前すぎて、非平衡熱力学などと言われても、という気になるかもしれないが、平衡熱力学では扱えない。

こういう場合の考え方として、系全体を小さな直方体ブロックに分割して、そのブロック内では平衡熱力学が使えるとする。それぞれのブロックの番号を i とし、その質量を M_i 、体積を V_i 、比体積を v_i 、密度を $\rho_i \equiv M_i/V_i = 1/v_i$ 、比内部エネルギーを e_i とする。そこでは温度 T_i や圧力 p_i や比エントロピー s_i が定義できて、それらの間の関係は平衡熱力学の場合と全く同じであるとする（局所平衡）。すなわち、

$$s_i = s_{eq}(e_i, v_i) \quad (1)$$

$$ds_i = \frac{1}{T_i} de_i + \frac{p_i}{T_i} dv_i = \frac{1}{T_i} de_i - \frac{p_i}{\rho_i^2 T_i} d\rho_i \quad (2)$$

などが成立する。あとでは、この時間変化を追うので、時間微分の形で書いて

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \frac{De}{Dt} + \frac{p}{T} \frac{Dv}{Dt} = \frac{1}{T} \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2 T} \frac{D\rho}{Dt} \quad (3)$$

としておく。ここで D/Dt はラグランジュ微分である。今は流れがない状況を考えるので、単なる時間偏微分でも良いのだが、流れがある場合でも適用できるようにラグランジュ微分しておく。つまり、局所平衡はラグランジュ的な微小要素について成立すると仮定する。

以後、定圧条件（この場合、圧力が時間にも空間にも依らないとする）で考える。

熱力学といえば、第1法則と第2法則である。それぞれがどう書けるかを考えてゆく。以下、1次元問題、すなわち、 x 方向に温度が不均質で熱が伝わる問題を考えてゆく。

まず、熱力学第1法則は、定圧条件では、

$$\frac{d(M_i e_i)}{dt} = Q_{i, left} - Q_{i, right} - p \frac{d(M_i v_i)}{dt} \quad (4)$$

である。ここで、 Q は単位時間当たりに隣のブロックとの間で出入りする熱であるとする。平衡熱力学との大きな違いは、すべてを単位時間当たりの量で書いて、微分方程式の形にす

ることだ。質量は保存するので、 M_i は定数であって微分の外に出してよい。この両辺を体積 $V_i = (\Delta x_i)(\Delta y_i)(\Delta z_i)$ で割ると、

$$\frac{M_i}{V_i} \frac{de_i}{dt} = \frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{Q_{i, \text{left}}}{(\Delta y_i)(\Delta z_i)} - \frac{Q_{i, \text{right}}}{(\Delta y_i)(\Delta z_i)} \right] - p \frac{M_i}{V_i} \frac{dv_i}{dt} \quad (5)$$

となり、熱流（単位面積単位時間当たりに流れる熱） $q_x \equiv Q_i / (\Delta y_i)(\Delta z_i)$ を定義すれば、

$$\rho_i \frac{de_i}{dt} = \frac{q_{x,i,\text{left}} - q_{x,i,\text{right}}}{\Delta x_i} + \frac{p}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} \quad (6)$$

となる。さらに、ブロックの番号を使う代わりに、すべての物理量を x の関数であるということにすれば、

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (7)$$

となる。移項して

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (8)$$

となる。さらに (3) 式を用いると

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (9)$$

と書けることになる。これは 1 次元の問題の場合だが、3 次元ならば

$$\begin{aligned} \rho T \frac{Ds}{Dt} &= - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。これが定圧局所平衡条件の下での熱力学第 1 法則である。

ついでに言えば、 $de = Tds - pd(1/\rho)$ を仕事がない場合の熱力学第 1 法則だと思っている人も多いが、上で見たように、これは違う。第一法則は (7) であり、内部エネルギー変化と熱と仕事との関係である。 $de = Tds - pd(1/\rho)$ の方は、平衡状態におけるエネルギーとエントロピーの間の関係 $s = s_{eq}(e, 1/\rho)$ を微分したものであって、第 1 法則ではない。

次に第 2 法則を考えてゆく。上の (9) の両辺を T で割ると、

$$\begin{aligned} \rho \frac{Ds}{Dt} &= -\frac{1}{T} \frac{\partial q_x}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x}{T} \right) + q_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

が導かれる。この式の解釈をするために適当な区間 $[x_1, x_2]^2$ で積分をしておこう。

$$\frac{dS}{dt} = \frac{q_x}{T}(x_1) - \frac{q_x}{T}(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} q_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) dx \quad (12)$$

左辺の S はその区間内の全エントロピーで、

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \rho s dx \quad (13)$$

²厳密に言えば、これは流れとともに動く区間で、 $[x_1(t), x_2(t)]$ である。

である (s は単位質量当たりのエントロピーであることに注意しよう)³。そこで、(12) の左辺はその増分を表す⁴。(12) の右辺の第 1、2 項は、左の単位面積から入ってくるエントロピー $q_x/T(x_1)$ と右の単位面積から出てゆくエントロピー $q_x/T(x_2)$ との差で、正味のエントロピー流入であると解釈できる。平衡熱力学でも（熱） / （外界の温度）がエントロピーの授受を表していたことを思い出そう。右辺の第 3 項が内部でのエントロピーの生成量を表していると解釈できる。この項は、熱流 q_x が熱力学的力 $\partial(T^{-1})/\partial x$ によって起こり、その積がエントロピー生成である、と読む。熱力学の第 2 法則はこの部分が常に正であることを主張している。すなわち、この場合、熱力学第 2 法則の要請は

$$\int_{x_1}^{x_2} q_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) dV \geq 0 \quad (16)$$

ということである。さらに、 x_1, x_2 は任意だったので、単位体積あたりのエントロピー生成

$$\sigma_S \equiv q_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{q_x}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} \geq 0 \quad (17)$$

が各点で成り立つことを要請する。これが熱伝導の場合の熱力学第二法則になる。このことは、熱が高温側から低温側に向かって流れるということを意味している。平衡状態の熱力学から考えても自然な結果だが、非平衡系の熱力学では、(1) 温度が非一様なときもあらゆる場所で成立していること、(2) エントロピーがどれだけ増加するかが数式で具体的に書かれていること、が平衡状態の熱力学よりも進んでいるところである。

2.2 Fourier の法則

熱流 q_x が熱力学的な力 $\partial(T^{-1})/\partial x$ によって起こっているとすると、一番簡単な仮定は、それが比例するとするものだ。

$$q_x = L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) \quad (18)$$

ここで L は比例係数である。このときエントロピー生成は

$$\sigma_S = L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) \right]^2 \quad (19)$$

となるから、エントロピーの生成量が正である（熱力学第 2 法則）ためには、 $L > 0$ が要請される。つまりは、逆温度が低い方から高い方、温度が高い方から低い方に熱が流れるという常

³正確に言えば、この式は 1 次元なので、 S は x 軸に垂直な面内では単位面積当たりの量になっている。

⁴左辺の導出は以下の通り。

$$\begin{aligned} \rho \frac{Ds}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho us)}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

これを積分すると

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} dx + u(x_2)(\rho s)(x_2) - u(x_1)(\rho s)(x_1) = \frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (\rho s) dx = \frac{dS}{dt} \quad (15)$$

となる。

識的には当たり前の要請である。当たり前ではあるが、第2法則から要請されるものなので、例外が無いということが重要である。この非平衡熱力学の枠組みでは、エントロピーの増え方の具体的な表式が求められているのが偉いところである。

通常は

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (20)$$

と書いて、 $k = L/T^2$ を熱伝導率と定義する。これを Fourier の法則と呼ぶ。熱力学第2法則の要請は $k > 0$ であることである。Fourier の法則は、熱流と熱力学的な力が比例するという最も単純な仮定に基づくものだが、経験的にこの比例関係はよく成り立っていることが知られている。3次元の場合、

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (21)$$

である。

単位も確認しておこう。SI系での単位を考える。熱流 \mathbf{q} は単位時間単位面積当たりの熱（ということはエネルギー）だから、 W m^{-2} である。温度勾配 ∇T は K m^{-1} である。したがって、熱伝導率 k の単位は $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ となる。

3 地殻熱流量の計測

Fourier の法則は、早速地球に応用できる。1800年代には、洞窟や鉱山では深くなるほど温度が高くなることがわかっていた。ということで、Fourier の法則によれば、地球の内部から表面に向かって熱が出て行っているはずである。温度の上昇率は、典型的には $20\text{--}30 \text{ K/km}$ である。一方で、地表の岩石の熱伝導率は $2\text{--}3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ である。すると Fourier の法則から熱流は $40\text{--}90 \text{ mW/m}^2$ ということになる。地球全体の平均的な熱流は 80 mW/m^2 で、地球全体の熱流束は、これに地球表面の面積をかけた $4 \times 10^{13} \text{ W}$ 程度だとされている。これに関しては、後でもう少し詳しく議論する。

地球内部からの熱流の測定をするには、このように深さの異なる2点以上での温度とその岩石の熱伝導率を測定する必要がある。

測定の実際上は、またいろいろな問題が出る。まず、大陸での測定を考える。

- (1) あんまり浅いところだと地表付近の短期の気温の影響が出てくるので、ある程度深いところで測定する必要がある。
- (2) 掘削をするとすれば、掘削時に水を流すので、その水の流れの影響が出ないように注意する必要がある。一つの方法は、掘削中に掘削先端の穴の底で測定するということで、流水の影響が出る前に急いで測るということである。もう一つの方法は、掘削後しばらくたって温度が馴染んでから測るということである。ただし、地下水が流れ込むと困るので、そういう場所ではしっかりと穴の壁をシールしておく必要がある。

次に、海底での測定を考える。海底での温度の測定は、大きく分けると、深いところのボアホール (boreholes) で測るのと、浅い堆積物に温度計のついた長さ 3m 程度の槍 (spear, javelin) を刺すというものがある (例: Jones Fig.8.1)。

堆積物の方が簡単なので普通である。海底では、堆積物が覆っているところで測るのがまあ普通で、そうすると槍がうまく刺さる。そうでないところだと、測定が難しい。深海底の温度は $1\text{--}2^\circ\text{C}$ で安定しているので、大陸と違って浅い場所で測っても構わない。うまくいかない場所としては

- 海嶺の近く：堆積物が薄い。なので、熱水地域は、実は測るのが難しい。さらに、熱水地域は、水が運んでいる熱があるので、熱伝導の分が全熱流量とはならない。
- 大陸の周囲の斜面や大陸棚：海底近くの温度変化が大きくて、浅い測定だと海流の影響を受ける。なので、boreholes が必要。

がある。

熱伝導率は、現地ではかる方法と、コアサンプルを探ってきて測る方法とがある。まずコアサンプルを探ってきて測る方法について考える。Jones Fig.8.1 のような装置だと、温度測定とコアサンプル採取が同時にできる。実験室内での測定法の例には以下のようなものがある。

- (1) Ratcliffe hot-plate method (Jones Fig.8.4a) : 熱を流して定常状態に達した時に、与えた熱流と温度勾配を測定して、熱伝導率を測定する。
- (2) Birch divided-bar method (Jones Fig.8.4b) : あらかじめ熱伝導率のわかっている pyrex glass と比較する。Pyrex glass と試料の温度勾配の比がわかれば、熱伝導率の比もわかる。
- (3) Needle-probe method : 温度計とヒーターを付けた針をサンプルに刺す。温度の上昇のしかたから熱伝導率を推定する。 T vs $\ln t$ のグラフの傾きから熱伝導率がわかる。

$$T = \frac{Q}{4\pi k} \left(\ln \frac{\kappa t}{a^2} \right) + C \quad (22)$$

この式は、無限に長い円柱が熱源である場合の式である（時間があれば、後で扱う。とりあえずこういうものだと思ってほしい）。ただし、 a が円柱の半径で、 $\kappa t/a^2 \gg 1$ となることを仮定している。

現地ではかる方法 (Jones Fig.8.6) は、上の Needle-probe method の現地版である。Fig.8.6 の装置は、熱流と熱伝導率を同時に現地で測定できるように設計されている。

4 热伝導方程式とプレートの冷却モデル

4.1 热伝導方程式

流れは考えないことにすると、先のエントロピーの式 (9) で、ラグランジュ微分を偏微分にして

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (23)$$

が成り立つ。これに Fourier の法則

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (24)$$

とエントロピーの微分の式

$$\begin{aligned} T ds &= T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \\ &= c_p dT - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \\ &= c_p dT - \alpha T v dp \\ &= c_p dT - \frac{\alpha T}{\rho} dp \end{aligned} \quad (25)$$

を代入する。ここで、 c_p は定圧比熱、 α は熱膨張率である。定圧条件 ($dp = 0$) とすると、

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (26)$$

が得られる。これが熱伝導方程式である。もしも、熱伝導率 k が定数ならば、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (27)$$

となる。こちらを熱伝導方程式（あるいは熱拡散方程式）と呼ぶこともある。ここで、

$$\kappa \equiv \frac{k}{\rho c_p} \quad (28)$$

を熱拡散率もしくは温度伝導率と呼ぶ。3次元ならば

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (29)$$

である。

あとは、これを解けばよい。解けば良いと言っても、解析的一般解があるわけではなくて、解析的に解きたいときは、初期条件や境界条件によって解き方が違う。ここでは、プレートの冷却モデルを考える。そのあとで時間ががあれば、上に出てきた Needle-probe 法の基礎式 (22) も導いてみる。

4.2 プレートの冷却モデル

4.2.1 1次元半無限冷却モデル

プレートは、海嶺で生まれて、海溝で沈み込む。海嶺では、マントルが上昇してくる。ただし、それはマントル対流の湧き出し口という意味ではない。周囲から引っ張られた裂け目を埋めるために上昇流が生じてマグマが発生し、地殻が生成する。海嶺では、基本的にはマントルが上がっているのだから、単純に言えばマントルの温度である。それが海嶺から離れるにつれて冷やされる (Turcotte & Schubert, Fig.4-22)。その様子を以下のようにモデル化する。

1. 1次元の熱伝導方程式を解く。最初マントルの温度をしている半無限媒体が、突然海水温度で上から冷やされる。必修実験と同じ状況を考える。
2. その解の時間 t を、海底の年代、すなわち海嶺から今の位置までやってきた時間だと読む。つまり、

$$t \rightarrow x/v \quad (30)$$

と読み替える (Turcotte & Schubert, Fig.4-23)。

3. 結果を熱流の観測や、アイソスタシーを仮定した海底の水深と比較する。

このモデルの仮定は、

1. 横方向の熱伝導を無視 → これは、鉛直方向の温度勾配が水平方向の勾配より大きければさほど問題とはならない

2. プレートはいったんできた後は下から暖められることがない →これが実際問題であることは結果的にわかる
3. 熱伝導以外の熱移動メカニズムがない →これも実際問題であることは結果的にわかる

ということである。いろいろ問題があるモデルではあるが、考えるための基本として重要である。地球科学モデルというものは、たいていそんなにきれいに合うものではない。大体合えばよいし、そこからのずれはまた新たな現象を示していることになる。

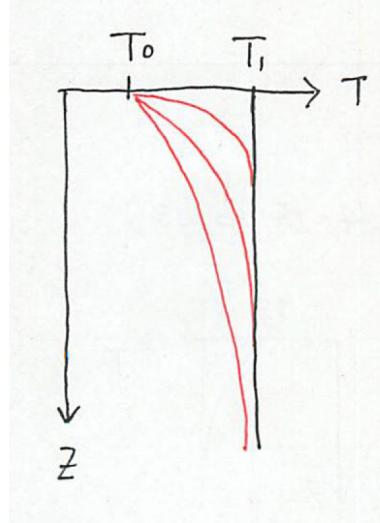


図 1: 1 次元半無限冷却モデル

以下、まず半無限空間冷却モデルを考える。解くべき式は、1次元熱伝導方程式である(図1; Turcotte & Schubert Fig.4-20 ただし、図と違って $T_1 > T_0$ とする)。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (31)$$

初期条件は

$$T = T_1 \quad \text{at } t = 0 \quad (32)$$

境界条件は

$$T = T_0 \quad \text{at } z = 0 \quad (33)$$

$$T \rightarrow T_1 \quad \text{as } z \rightarrow \infty \quad (34)$$

である。

4.2.2 相似解

熱伝導方程式の解き方は、初期条件、境界条件によっていろいろあるが、今の場合は相似解が有効である。相似解とは、解が1つの変数のみの関数になっているものである。 T は t と z の関数である。しかし、この場合は

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (35)$$

(相似変数) という 1 つの変数の関数になっていることを結果的に示すことができる（やってみないとわからない）。つまり、 T は、 η を通して z と t に依存している。どうしてこういう変数の組み合わせを選ぶかというと、熱伝導方程式で、微分を割り算だと何となく思うと

$$\frac{T}{t} = \kappa \frac{T}{z^2} \quad (36)$$

という感じになって、 $z^2/\kappa t$ という組み合わせが無次元の変数として浮かび上がる。そこで相似解があるなら、 η のようなものだろうということがわかる。ファクター 2 は結果的に係数が簡単になるように付けたものでそれほど本質的ではない。

このような解が存在するためには必要な条件は、 $z = 0$ と $t \rightarrow \infty$ 、 $t = 0$ と $z \rightarrow \infty$ がそれぞれ対応する初期条件と境界条件になっていることである。今の初期条件と境界条件はまずこれを充たしている。

次に、熱伝導方程式が η 1 変数のみで書き直せることを確認する。

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (37)$$

とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{z}{4\sqrt{\kappa t^{3/2}}} \frac{d}{d\eta} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d}{d\eta} \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d}{d\eta} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2}{d\eta^2} \quad (40)$$

となるので、解くべき式は

$$-\eta \frac{dT}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{d^2T}{d\eta^2} \quad (41)$$

$$T(\infty) = T_1 \quad (42)$$

$$T(0) = T_0 \quad (43)$$

となる。これを解く。まず、式の形から自然に

$$\phi = \frac{dT}{d\eta} \quad (44)$$

と置く。すると、解くべき方程式は

$$-\eta \phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\eta} \quad (45)$$

となる。これは変数分離型なので、すぐに積分ができる

$$-\eta^2 = \ln \phi - \ln c_1 \quad (46)$$

$$\phi = c_1 e^{-\eta^2} \left(= \frac{dT}{d\eta} \right) \quad (47)$$

となる。もう一度積分すると

$$T = T_0 + \frac{2(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' = -(T_1 - T_0) \operatorname{erfc}\eta + T_1 \quad (48)$$

となる。ここで、

$$\operatorname{erf}\eta \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' \quad (49)$$

$$\operatorname{erfc}\eta \equiv 1 - \operatorname{erf}\eta \quad (50)$$

はそれぞれ誤差関数 (error function) と相補誤差関数 (complementary error function) と呼ばれる関数である (Turcotte & Schubert Fig.4-21, Table 4-5)。元の変数に直すと、

$$T = T_1 - (T_1 - T_0) \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (51)$$

となり、これで温度が解けたことになる。プレートモデルでは t がプレートの年齢、 T が温度である (配布図 : プレートの半無限冷却モデル)。

次に進む前に、このモデルがプレートの本質に関して語っているメッセージを確認しよう。このモデルでは、通常プレートの下面が等温度面 (配布図 : プレートの半無限冷却モデル) であることが仮定される。つまり、温度が一定の温度より高くなると岩石の流動性が上がる。その温度面より下側がアセノスフェア、上側がリソスフェア (プレート) であるということである。その面はマントル内にあり、物質境界ではない。しかし、この点についてはいまだ解決されていない根本的な問題もある。それは、地震学的にプレート下面が見えるという研究も数多くあるということだ。プレート下面は物質境界ではなく、単なる等温面だとすると、地震学的に見えるはずがない。この点は基本的な問題でありながらもよくわかっていない。基本的な問題がよくわかっていないというのは、地球科学ではよくありがちなことである。

4.2.3 観測量との比較

温度の深さ分布は、深い穴を掘らないと観測できないので、もう少し観測しやすい量に直そう。

その一つは熱流量である。熱流量は、海底の堆積物にヤリを刺して温度を測ればよいのであった。つまり、浅いところの数点の温度だけでよい。

$$\begin{aligned} q &= k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \\ &= k(T_1 - T_0) \left[\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right]_{z=0} \\ &= k(T_1 - T_0) \left[\left. \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\kappa t}} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \right]_{z=0} \\ &= \frac{k(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi \kappa t}} \end{aligned} \quad (52)$$

つまり、

$$q = \frac{C}{\sqrt{t}} \quad (53)$$

$$C = \frac{k(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi \kappa}} \quad (54)$$

という形をしている。これを観測と比べたのが Harris & Chapman, Fig.10.2 で、 $C = 500 \text{ mW m}^{-2} \text{ My}^{1/2}$ 程度だということがわかる。 $k = 3.3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、 $\kappa = 8 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ とすると、 $T_1 - T_0 = 1350 \text{ K}$ となる。これがマントルの温度の見積もりということになる。

ところで、Fig.10.2 がこんなにきれいに合うのは、観測を海底に堆積物が厚く積もっているところに注意深く限り、かつ海嶺付近を除いているせいである。実は、もっと若い海底や古い海底まで合わせると、Harris & Chapman, Fig.10.1 c, d⁵ のようになり、けっこうずれている。若い海底では、モデルより概して低くなるのは、熱水循環のせいだと思われている。海底では、伝導ではなくて水の対流で熱が運ばれている。しかし、それは浅いところの話なので、深いところではこのモデルで良いかもしれない。さらに、若い海底では測定値のバラつきが大きい。その理由としては、熱水循環のほかに基盤と堆積物の境界の地形が複雑なことが多い、それによって熱流の集中が起きたりすることがある。それに加えて、若い海底では堆積物が薄いので槍が刺さらない場所が多いという問題もある。

そこで、若い海底 (80 Ma 程度より若い) では、半無限冷却モデルの妥当性を確かめるには、何か積分量に依存する観測量があればよい。それが海底深度である。海底の深さはアイソスターで決まっている (Turcotte & Schubert, Fig.4-44)。アイソスターが成り立つるとすると、ある深さよりも上の重さは同じになる。プレートは冷えるにつれて縮むから、海底の深さは深くなることになる。重さは密度の積分だから、温度の積分量でもある。そこで、こちらのほうは熱水循環の影響を受けづらいと予想できる。

アイソスターを考えて、海底の深さを求めてみよう (Turcotte & Schubert, Fig.4-44)。アイソスターの式は

$$\rho_m(w + L) = \int_0^L \rho dz + w\rho_w \quad (55)$$

である。移項して、

$$w(\rho_m - \rho_w) = \int_0^L (\rho - \rho_m) dz \quad (56)$$

とも書くことが出来る。密度が冷えるに従って大きくなるということは

$$\rho - \rho_m = \rho_m \alpha(T_1 - T) \quad (57)$$

で表される⁶。ここで α は熱膨張率である。これを (56) に代入して L を ∞ で置き換えると⁷

$$\begin{aligned} w(\rho_m - \rho_w) &= \rho_m \alpha(T_1 - T_0) \int_0^\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) dz \\ &= 2\sqrt{\kappa t} \rho_m \alpha(T_1 - T_0) \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta \\ &= 2\rho_m \alpha(T_1 - T_0) \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \end{aligned} \quad (58)$$

となり、

$$w = \frac{2\rho_m \alpha(T_1 - T_0)}{(\rho_m - \rho_w)} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \quad (59)$$

⁵この Fig.10.1 は北大西洋と北西大西洋のデータをコンパイルしたもの。

⁶式 (57) の導出をより丁寧に言えば、以下の通り。圧力を一定としたときの状態方程式 $\rho = \rho(T)$ を $\rho_m = \rho(T_1)$ のまわりでティラー展開して 1 次まで取る。すると、 $\rho = \rho_m + (\partial\rho/\partial T)_P(T - T_1)$ となる。ここで、熱膨張率の定義から $\alpha = (1/V)(\partial V/\partial T)_P = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_P$ なので、(57) が導かれる。

⁷半無限モデルではどうせ深いところは現実的ではないのであまり気にしてしまうがないし、深いところでは $(T_1 - T)$ が小さくなるので、 L より大きいところの積分への寄与は小さい。

と求められる。重要なことは、水深が \sqrt{t} に比例するということである。

なお、途中で使った $\int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta = 1/\sqrt{\pi}$ は以下のようにして証明できる。

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta &= \int_0^\infty \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \right] d\eta \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left[\int_\eta^\infty e^{-\eta'^2} d\eta' \right] d\eta \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta'^2} \left[\int_0^{\eta'} 1 d\eta \right] d\eta' \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \eta' e^{-\eta'^2} d\eta' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}
 \end{aligned} \tag{60}$$

ただし、2行目から3行目に移るときは、図2で示されるような変数の入れ替えを行い、3行目から4行目に移るとき $\xi = \eta'^2$ と置いた。

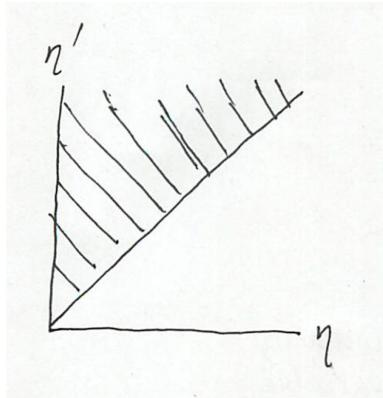


図 2: 積分の順序の入れ替え

水深の観測と上の理論の比較は Harris & Chapman, Fig.10.1 a, b のようになり、若い海底でも良く成り立つ。すなわち、1次元半無限冷却モデルはおおむね正しそうである。

ところが、一方で、同じ図をよく見ると、70 Ma くらいより古い海底だと、水深が頭打ちになり、熱流もほぼ一定となっている。熱流は、したがって半無限問題よりも大きくなっている。この解釈は、下からやってくる熱を無視したのがいけなかったと考えられる。

4.2.4 1次元平板冷却モデル

下からやってくる熱を考慮して、プレートはやがて一定の厚さになるものと考える。その厚さを L とする。一定になる必然性はないのだが、観測によれば、古い海底では水深も熱流も一定になっているから、プレートの厚さが一定になると解釈したのだ。このモデルを使えば、後述のように観測を説明できる。しかし、なぜ一定になるモデルが良いのかは（たぶん）未だにわかっていない。下から熱が何らかの形でやってくること自体は自然なのだが、具体的にどのようにやってきているのかは未解決の問題である（と思う）。

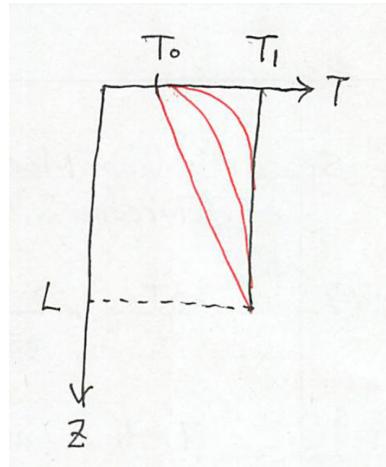


図 3: 1 次元平板冷却モデル

数学的な問題設定としては以下のようにする(図3)。解くべき式は、先の半無限冷却モデルと同じ1次元熱伝導方程式である。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (61)$$

初期条件も前と同じく

$$T = T_1 \quad \text{at } t = 0 \quad (62)$$

で、境界条件は

$$T = T_0 \quad \text{at } z = 0 \quad (63)$$

$$T = T_1 \quad \text{at } z = L \quad (64)$$

である。下側の境界が $z \rightarrow \infty$ ではなく $z = L$ で付いているのが半無限冷却モデルとの違いである。こうなると、先の相似解は使えない。というのは、 $t = 0$ と $z \rightarrow \infty$ がもはや対応しないからである。そこで、もうちょっと一般的な Fourier 級数の方法を使って解く。

まず、式と境界条件が簡単になるように変数変換をする。

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} - \frac{z}{L} \quad (65)$$

$$\zeta = \frac{z}{L} \quad (66)$$

$$\tau = \frac{\kappa t}{L^2} \quad (67)$$

すると、解くべき式と境界条件は

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (68)$$

$$\theta(\zeta, 0) = 1 - \zeta \quad (69)$$

$$\theta(0, \tau) = 0 \quad (70)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad (71)$$

となる。この変数変換のポイントは、(a) θ 、 ζ 、 τ を無次元の変数にしたこと、(b) 解くべき式の係数を 1 にしたこと、(c) 両端での値を 0 にすることで、Fourier 級数の方法を使いややすくしたことである。

上のポイント (c) は、 \sin 関数での Fourier 級数展開をするために行ったことである。その作戦に従って、解を次の Fourier 級数の形で求める。

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\tau) \sin(n\pi\zeta) \quad (72)$$

この式は自動的に境界条件 (70)、(71) を満たす。この式を解くべき式 (68) に代入すると、 Θ_n が満たすべき式が求められる。

$$\frac{d\Theta_n}{d\tau} = -(n^2\pi^2)\Theta_n \quad (73)$$

初期条件は (69) より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(0) \sin(n\pi\zeta) = 1 - \zeta \quad (74)$$

となるが、 \sin 関数の直交性を利用してこれを Θ_n について解くと

$$\begin{aligned} \Theta_n(0) &= 2 \int_0^1 (1 - \zeta) \sin(n\pi\zeta) d\zeta \\ &= \frac{2}{n\pi} \left\{ -[\cos(n\pi\zeta)]_0^1 + [\zeta \cos(n\pi\zeta)]_0^1 - \int_0^1 \cos(n\pi\zeta) d\zeta \right\} \\ &= \frac{2}{n\pi} \left\{ -[(-1)^n - 1] + (-1)^n - \frac{1}{n\pi} [\sin(n\pi\zeta)]_0^1 \right\} \\ &= \frac{2}{n\pi} \end{aligned} \quad (75)$$

となる。したがって、

$$\Theta_n(\tau) = \frac{2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2\tau} \quad (76)$$

となる。そこで、

$$\theta = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\tau} \sin(n\pi\zeta) \quad (77)$$

となり、元の変数に戻すと

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \left[\frac{z}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n^2\pi^2\frac{\kappa t}{L^2}\right) \sin\left(n\pi\frac{z}{L}\right) \right] \quad (78)$$

ということになる。仮定から当然だが、 $t \gg L^2/\kappa$ なら

$$T \approx T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z}{L} \quad (79)$$

となる。

観測と比べられる量として、熱流量と海底深度も求めておく。熱流量は

$$q = k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{k(T_1 - T_0)}{L} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^2\pi^2\frac{\kappa t}{L^2}\right) \right] \quad (80)$$

となる。 $t \gg L^2/\kappa$ なら

$$q \approx \frac{k(T_1 - T_0)}{L} \quad (81)$$

	PS77	GDH1
κ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	8×10^{-7}	8×10^{-7}
k ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)	3.1	3.1
α (K^{-1})	$(3.28 \pm 1.19) \times 10^{-5}$	$(3.1 \pm 0.8) \times 10^{-5}$
ρ_m (kg m^{-3})	3,300	3,300
ρ_w (kg m^{-3})	1,000	1,000
L (km)	125 ± 10	95 ± 15
T_1 ($^\circ\text{C}$)	$1,333 \pm 274$	$1,450 \pm 250$

表 1: プレート冷却モデルのパラメタ。PS77 は Parsons and Sclater (1977) によるもので、北太平洋と北大西洋の海底深度データのみから求められている。GDH1 は Stein and Stein (1992) によるもので、北太平洋と北西大西洋の海底深度と 50 Ma より古い部分の熱流量の両方から求められている。

となる。海底深度は

$$\begin{aligned} w &= \frac{\rho_m \alpha}{\rho_m - \rho_w} \int_0^L (T_1 - T) dz \\ &= \frac{\rho_m \alpha (T_1 - T_0) L}{\rho_m - \rho_w} \int_0^1 \left[(1 - \zeta) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{\kappa t}{L^2}\right) \sin(n\pi\zeta) \right] d\zeta \\ &= \frac{\rho_m \alpha (T_1 - T_0) L}{\rho_m - \rho_w} \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \exp\left(-(2m+1)^2 \pi^2 \frac{\kappa t}{L^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (82)$$

となる。 $t \gg L^2/\kappa$ なら

$$w \approx \frac{\rho_m \alpha (T_1 - T_0) L}{2(\rho_m - \rho_w)} \quad (83)$$

となる。

あとは、これを観測と突き合わせて、パラメタを決めればよい。その結果が表 1 である。観測データとの比較が Harris and Chapman, Fig.10.1 で、長い破線が PS77、短い破線が GDH1 である。図は GDH1 の論文から取ってきているものなので、当然のことながら GDH1 の方がよく合っているように見える。

このプレート冷却モデルによれば、プレートの底から

$$q \approx \frac{k(T_1 - T_0)}{L} = (3.1 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}) \frac{1450 \text{ K}}{95 \text{ km}} = 48 \text{ mW m}^{-2} \quad (84)$$

という量の加熱があるはずだ（パラメタは GDH1）。地球全体の平均的な熱流量がおおよそ 80 mW m^{-2} であったことを思い出すと、この量はその約半分強である。海嶺付近での熱流量が大きいことが平均を押し上げている。

このような底面加熱が具体的にどのようにになっているのか（たとえば、プルームがやってきていたとか小さな熱対流が起こっているとか）に関しては、まだ確立したイメージがあるわけではない。したがって、プレートの底面を一体何が決めているのかは未だに明らかではない。

4.3 Needle-probe 法の基礎式の導出

3 節の Needle-probe 法の基礎式 (22) を導く。

無限に長い円柱の熱源があると思って、円筒座標 (r, ϕ, z) で考える。 z 方向に一様で、軸対称とすると、 r 方向の 1 次元で考えればよい。熱伝導方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (85)$$

となる。ここでも相似変数を用いる。

$$\eta = \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (86)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{z}{4\sqrt{\kappa t^{3/2}}} \frac{d}{d\eta} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d}{d\eta} \quad (87)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} = \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d}{d\eta} = \eta \frac{d}{d\eta} \quad (88)$$

$$\kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\sqrt{\kappa}}{2r\sqrt{t}} \frac{d}{d\eta} = \frac{1}{4\eta t} \frac{d}{d\eta} \quad (89)$$

となるので、解くべき式は

$$-\eta \frac{dT}{d\eta} = \frac{1}{2\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dT}{d\eta} \right) \quad (90)$$

$$T(\infty) = T_0 \quad (91)$$

$$-k \frac{\pi a}{\sqrt{\kappa t}} \frac{dT}{d\eta} \left(\frac{a}{2\sqrt{\kappa t}} \right) = Q \quad (92)$$

となる。これを解く。まず、式の形から自然に

$$\phi = \eta \frac{dT}{d\eta} \quad (93)$$

と置く。すると、解くべき方程式は

$$-\eta \phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\eta} \quad (94)$$

となる。これは変数分離型なので、すぐに積分ができる

$$-\eta^2 = \ln \phi - \ln c_1 \quad (95)$$

$$\phi = c_1 e^{-\eta^2} \left(= \eta \frac{dT}{d\eta} \right) \quad (96)$$

となる。 $a \ll \sqrt{\kappa t}$ として、境界条件から c_1 を決める

$$\frac{dT}{d\eta} = -\frac{Q}{2\pi k} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta} \quad (97)$$

$\eta \ll 1$ の範囲では

$$\frac{dT}{d\eta} \approx -\frac{Q}{2\pi k} \frac{1}{\eta} \quad (98)$$

と近似できるので、もう一度積分すると、

$$T \approx -\frac{Q}{2\pi k} \ln \eta + C = \frac{Q}{4\pi k} \ln \left(\frac{\kappa t}{r^2} \right) + C \quad (99)$$

となる。ここで、 C は積分定数である。これで (22) が導かれた。

5 グローバル熱収支

プレート冷却とマントル対流をこれまで学んできた。それらを元にして、今度は地球全体の熱収支を考えてゆく。

5.1 グローバルな熱力学第1法則

熱力学第1法則は、エネルギー保存則であって、これは平衡系でも非平衡系でも同様に成り立つ。固体地球（=太陽エネルギーが及ばない範囲）グローバルなエネルギー収支は、以下のように書ける。

$$\frac{d}{dt}(E + E_{kin} + E_{grv} + E_{mag} + E_{nuc}) = -Q_S + \int_V \Phi_{tide} dV \quad (100)$$

ここで、

- E : 内部エネルギー
- E_{kin} : 運動エネルギー
- E_{grv} : 重力エネルギー
- E_{mag} : 磁場エネルギー⁸
- E_{nuc} : 原子核エネルギー ($H_{rad} = -dE_{nuc}/dt$ は放射性熱源)
- Q_S : 地表熱流量 ($= \oint_{\partial V} \underline{q} \cdot d\underline{S}$)
- Φ_{ext} : 潮汐力による仕事

である。大気圧は無視して、それによる仕事は無視した。

いろいろな項があるけれども、詳細は省くと、このうちで重要な項だけ取り出すと

$$\frac{dE}{dt} = -Q_S + H_{rad} \quad (101)$$

となることがわかっている。すなわち、地球は熱を放出しながら冷えて行っているのだけれども、放射性熱源という暖める要素もある。あるいは、次の形で書くことも良くある。

$$Q_S = H_{rad} + Q_{cool} \quad (102)$$

ここで

$$Q_{cool} = -\frac{dE}{dt} \quad (103)$$

すなわち、地球が出している熱は、放射性熱源からの熱と地球初期からの余熱である。以下、(102) の各項の見積もりをしてゆく。

⁸磁場エネルギーを考え、かつ積分範囲を地球表面で切ってしまえば、Poynting vector の項なども入ることになる。しかし、それは面倒なので、磁場に限っては全空間で積分していると考えるものとする。

5.2 グローバルな地表熱流量

先ずは (102) の Q_S の見積もりをしてゆく。これは、地球全体で見たときに、地球がどれほど熱を失っているかということである。Davies (2013) に基づく。熱流量の観測は、地球表面ではたくさんなされているところとなされていないところがある (Davies Fig.1)。それから、プレートの冷却を考えたときには、若い海底の観測値が熱水循環の影響を受けていて、必ずしも地球内部から出てくる熱を表していないことを見た。そこで、Davies (2013) は以下のようにしてグローバルな熱流量の地図を作った (Davies Fig.6)。

1. 67.7 Ma よりも若い海底は、半無限冷却モデルに基づく (全グリッドの 40%)。
2. それ以外で観測があるところは、その平均もしくはメジアンを取る (全グリッドの 25%)。
3. 観測がないところは、地質からの推定値を用いる (全グリッドの 35%)。

その結果、地球全体で見ると、平均の熱流量は 83 mW m^{-2} 、全熱流量は 44 TW であることがわかった。

以下、海底と大陸に分けて中身をより詳しく見てゆく。

5.2.1 海底からの放熱

以前 4.2.3 節で見てきたように、若い海底では熱水循環の影響を受けて、熱伝導の測定だけではマントルからの熱流がわからない。そして、海底深度の観測から半無限冷却モデルが基本的には正しいと信じられている。そこで、若い海底 (80 Ma 程度より若い) では、以前やった半無限冷却モデルに基づく値を用いる。半無限冷却モデルによれば、熱流は

$$q_{young seafloor} = \frac{C_q}{\sqrt{t}} \quad (104)$$

と表され、比較的信頼できる観測から C_q を決める $C_q = 500 \text{ mW m}^{-2} \text{ My}^{1/2}$ 程度になることを以前見た。

それより古い海底は観測値を用いればよい。先に配布した Davies の図ではそのようにして海底での熱流を推測している。

観測によれば、古い海底ではあまり年代によらず、

$$q_{old seafloor} \approx (48 \pm 3) \text{ mW m}^{-2} \quad (105)$$

であることがわかっている。

以上の事実から、海底から放出される熱を概算してみよう。

$$Q_{ocean} = \int q dS = \int_0^{\tau_{max}} q(\tau) \frac{dS}{d\tau} d\tau \quad (106)$$

で、 τ は海底の年代、 $S(\tau)$ は τ より若い海底の面積である。これには

$$\frac{dS}{d\tau} = C_S \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{max}} \right) \quad (107)$$

という近似式があって、Jaupart & Mareschal Fig.8.2 より $C_S = 2.85 \text{ km}^2 \text{ yr}^{-1}$ 、 $\tau_m = 180 \text{ My}$ である。ただし、 C_S の見積もりには縁海を含めるかどうかというような問題があって、この

値は含んでいない。含めるなら、 $C_S = 3.34 \text{ km}^2 \text{ yr}^{-1}$ という値になる。 $C_S = 3.0 \text{ km}^2 \text{ yr}^{-1}$ という値として、80 My より若い海底と古い海底に分けて熱流量を見積もると

$$\begin{aligned} Q_{80-} &= \int_0^{80} \frac{C_q}{\sqrt{\tau}} C_S \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{max}}\right) d\tau \\ &= 2C_q C_S \left[\sqrt{\tau} \left(1 - \frac{\tau}{3\tau_{max}}\right) \right]_0^{80} \\ &= 23 \text{ TW} \\ Q_{80+} &= \int_{80}^{\tau_{max}} q_{old seafloor} C_S \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{max}}\right) d\tau \\ &= q_{old seafloor} C_S \left[\tau \left(1 - \frac{\tau}{2\tau_{max}}\right) \right]_{80}^{\tau_{max}} \\ &= 4 \text{ TW} \end{aligned} \tag{108}$$

となる (Jaupart & Mareschal Fig.8.3)。これにホットスポットからの寄与を 3 TW 程度として (2–4 TW という見積もりがある) 加えると

$$Q_{ocean} = Q_{80-} + Q_{80+} + Q_{hotspots} \approx 30 \text{ TW} \tag{109}$$

となる。

5.2.2 大陸からの放熱

大陸のデータは通常深いボアホールで測定され、きちんとした測定がなされていれば、海底データより信頼できる。しかしながら、データの分布が極めて不均一で北半球の温帯に偏っている上、地熱地帯のものが多いので、単純に平均してはいけない。そこで、配布した Davies の図では、データがあるところでは 2°グリッドでメジアンを取り (メジアンを取ると、極端に飛び離れたデータを除くことができる)、データが無いところは、地質からの推定値を用いてある。

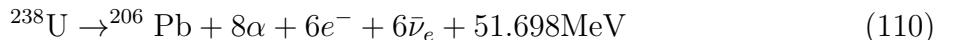
平均すれば、大陸からの熱流は $q_{continents} \approx 65 \text{ mW m}^{-2}$ の程度であって、これに大陸の面積 $210 \times 10^6 \text{ km}^2$ を乗じて、14 TW が大陸からの熱流量である。

海と合わせて、地球全体の放熱量は 44 TW 前後となる。

5.3 放射性熱源

次に放射性熱源、すなわち (102) の H_{rad} の見積もりをしてゆく。放射性元素の崩壊に伴つて発生する熱である。

地球の形成期を除けば、考えないといけない放射性元素は U、Th、K の 3 種類だけである。考えないといけない崩壊は



である。反応式の読み方としては、たとえば一番上だと、 ^{238}U は α 崩壊を 8 回、 β 崩壊を 6 回起こして ^{206}Pb になるということである。電子型反ニュートリノは、ベータ崩壊を 1 回起こす度に 1 つずつ出てくる。これらの崩壊がどのくらい起こっているかの見積もりには、細かく言えばいろいろな方法があるが、要するに隕石やマントル岩や玄武岩などの組成から推定する。 U 、 Th は refractory lithophile 元素で、 K は moderately volatile 元素なので、 K は始原的隕石の値よりもある程度減っているであろうことも考慮する必要がある。それから、 K はコアにもある程度含まれている可能性もあるだが、ここでは無視しよう。いろいろな見積もりを配布する (Jaupart and Mareschal の Table 8.7)。あまり細かい違いにはとらわれず、見積もり方によってこの程度の幅があるということだけ見ておく。最大で倍程度の違いがある。今、仮に新しい見積もりである Lyubetskaya and Korenaga (2006) の平均値を採用したとして、どのくらいの熱になるかを見ておく。岩石の単位質量あたりの発熱量は

$$H/\text{pW kg}^{-1} = 95.2[\text{U}/\text{ppm}] + 25.6[\text{Th}/\text{ppm}] + 34.8[\text{K}/\%] \quad (115)$$

と書けるので、先の L & K の値を代入すると、 $H = 3.9 \text{ pW kg}^{-1}$ となる。代入するとき K の 190 ppm = 0.019 % であることに注意する。これに Bulk silicate Earth (mantle + crust) の質量 $4.03 \times 10^{24} \text{ kg}$ を掛け算すると、16 TW となる。内訳は、 U が 6.5 TW、 Th が 6.5 TW、 K が 2.7 W である。Table 8.7 からわかるとおり、 L & K は低めの見積もりで、高めの $H \approx 5 \text{ pW kg}^{-1}$ を取れば 20 TW となる。Table 8.7 にある見積もりの幅を考えると (15–20) TW を見ておくのが良さそうである。この表の作者 (Jaupart and Mareschal) は 20 TW を推奨している。ただし、もう少し古い文献だと、もう少し高めの値を採用していることが多い。

最近、放射性元素の崩壊に伴う反ニュートリノ (geoneutrino) の観測によって、地球内部の放射性元素の量を制約することができるようになってきた。反ニュートリノはベータ崩壊に伴って発生する。



^{40}K の電子捕獲以外の崩壊ではベータ崩壊が起こっているので、電子型反ニュートリノが出てくる (Wan et al., 2017)。日本の KamLAND 観測が先頭を走っていて、イタリアの Borexino 観測がこれに続いている。これらの実験はもともとニュートリノそのものの研究のために作られたものであるが、その副産物として geoneutrino を測っている。測定精度はまだそれほど高くはない。

結果的には、発熱量としては ^{238}U と ^{232}Th で (6–19) TW で最もありそうな値が 11 TW であることがわかっている (Shimizu, 2015)。 ^{235}U と ^{40}K の寄与は 3 TW 程度なので、合計 14 TW とすれば、先の L & K の見積もりよりもさらに低めであることがわかる。誤差の幅を考慮すると、geoneutrino 観測から求められる放射性熱源は (9–22) TW 程度となり、先の地球化学的見積もりと同程度だがやや低めということになる。今後 10 年くらいの時間スケールで geoneutrino の観測は改善されると考えられる。

どの数字を取るにせよ、現在のコンセンサスでは、放射性熱源は、地球全体の放熱の 44 TW よりは小さいと考えられていて、後述のように残りのほとんどは地球全体の冷却である。以下では、放射性熱源の数字としては、 L & K と geoneutrino 観測のおすすめの値の間を取って 15 TW を使うことにする。

5.4 地球の冷却

最後に地球の冷却、すなわち (102) の Q_{cool} の見積もりをしてゆく。

$$Q_{cool} = -\frac{dE}{dt} \approx -M_E C \frac{dT}{dt} \quad (117)$$

ここで、 M_E は地球の質量、 C は地球の平均的な比熱である。

2つの議論からマントルの温度（ポテンシャル温度＝マントル最上部の温度と思えばよい）の減少は 50 K/Gy 程度だと見積もられている。

1. 地球初期にマグマオーシャンがあるときは急速に冷えたはずで、マントルがほぼ全部固体になると冷却速度が急に遅くなるはずである。40 億年前にはこのような状態になっていたはずで、マントルのポテンシャル温度は、そのとき 1800 K くらいである。これに対して、現在のマントルのポテンシャル温度は、1600 K くらいになる。ということは、40 億年で 200 K くらい冷えたということになる。冷却率は 50 K/Gy ということになる。
2. MORB のリキダス温度は、MORB マグマができたときのマントルの温度を示しているはずである。これを太古代の MORB から現在まで調べてみると、やはり 40 億年で 150 K くらい冷えているものと見られる。

すると、内部エネルギー変化はおおざっぱに言えば、

$$Q_{cool} \approx -M_E C \frac{dT}{dt} = 10 \text{ TW} \quad (118)$$

となる。

5.5 熱収支のまとめ

こうして、現在地球からの放熱 44 TW のうち、放射性熱源の寄与は 20 TW 以下程度でおそらく 15 TW 程度、内部エネルギーの減少が 10 TW 程度だということがわかった。

$$Q_S = H_{rad} + Q_{cool} \quad (119)$$

ということは、困ったことに地球の放熱量を十分にまなかうだけの熱源がなさそうなのである。

44 TW の中身が少し足りないらしいというようなことは、一昔前までは、問題にならなかつた。放射性熱源の見積もりも地球の冷却率も不定性がきわめて大きかったためである。しかし、今や放射性熱源の上限が地球ニュートリノで押さえられるようになり、地球の冷却率の推定もなされるようになってきたので、この問題が表面化してきつつある。解決方法としては以下のようなことが考えられるが、決着は付いていない。

1. 下部マントルが上部マントルよりも速く冷えている。
2. コアからマントルに伝わる熱が大きい。
3. 40 億年で (150–200) K 冷えているとしても、昔はゆっくり冷えていて現在は急速に冷えている。

他にも解決方法があるかもしれない。皆さんも考えてほしい（立派な研究になるかもしれない）。

この後は、地球の熱史という別の角度からエネルギー収支を考察する。

6 地球の熱史

6.1 熱史を考える方程式

熱史を考えるための式は、前回使ったエネルギーの式である。

$$\frac{dE}{dt} = -Q_S + H_{rad} \quad (120)$$

これを過去に遡ってその変化を調べる。このままでは微分方程式としては解けないので、各項の具体的表現を求め、微分方程式として解けるようにすることを考える。

まず左辺は前回のように冷却を表すと考えて

$$\frac{dE}{dt} = M_E C \frac{dT}{dt} \quad (121)$$

とする。ここで、 T はマントルの平均的な温度である。本当はコアも別に考えなければいけないけれども、コアの質量はマントルの約半分なので、第 0 近似的にはまずマントルを考えて、コアも同じ速さで冷えてきていると考えて良いだろう。

次に、地表面熱流量 Q_S である。それとマントルの平均的な温度との関係を付けたい。そのためには熱対流の基礎知識が必要だが、それはこれから高橋さんの授業で教わるはずである。その結果をここでは先取りする。熱対流の問題で典型的に考える状況は、平行平板の間に流体がある、下面を温めて上面を冷やすことにより対流を起こすものである。温められた流体は上昇し、冷やされた流体は下降する。上下の温度差を ΔT 、対流層の厚さを D とすると、対流の駆動力を表す無次元のパラメタとしてレイリー数

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T D^3}{\kappa \nu} \quad (122)$$

が出てくる。ここで、 α は熱膨張率、 g は重力加速度、 κ は温度伝導率（熱拡散率）、 ν は動粘性係数である。一方で、対流は熱を下から上に運ぶ。この熱流（単位面積単位時間あたりの熱）を q とすると、これを無次元化した量としてヌッセルト数

$$Nu = \frac{qD}{k\Delta T} \quad (123)$$

が考えられる。ここで k は熱伝導率である。これは対流で運ばれる熱流を熱伝導で運ばれる熱流で割ったものである。これらヌッセルト数とレイリー数の関係は、おおむね

$$Nu \approx \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{1/3} \quad (124)$$

で表されることが知られている。ここで、 Ra_c は臨界レイリー数と呼ばれる量で、だいたい 1000 くらいの数であることがわかっている⁹。

さて、これをマントルに応用しよう。ヌッセルト数 Nu と地表熱流量 Q_S との関係は

$$Q_S = Nu A k \frac{T - T_s}{D} \quad (125)$$

⁹ この導き方は高橋先生の講義で聞いてください。

と読み替えられる。ここで、 A は地球表面積、 k はマントルの熱伝導率、 T はマントルの平均的な温度、 T_S は地表温度、 D はマントルの厚さである。レイリー数とマントルの平均温度 T との関係は

$$Ra = \frac{\alpha g(T - T_S)D^3}{\kappa\nu} \quad (126)$$

と読み替えられる。すると、

$$\begin{aligned} Q_S &= Ak \frac{T - T_S}{D} \left(\frac{\alpha g(T - T_S)D^3}{\kappa\nu Ra_c} \right)^{1/3} \\ &= Ak \left(\frac{\alpha g}{\kappa Ra_c} \right)^{1/3} (T - T_S)^{4/3} \nu^{-1/3} \end{aligned} \quad (127)$$

となる。ここでは、 Q_S が D に依存しなくなることが一つのポイントである。もともと $Nu \propto Ra^{1/3}$ の法則はそうなるように導かれたと言うこともできる。さらに、粘性係数 ν がマントルの温度に強く依存するということも重要である。以下では、それを

$$\nu = \nu_0 \exp \left[\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (128)$$

と書いてみたり

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-n} \quad (129)$$

($n \approx 35$) と書いてみたりする。ここで、 ν_0 は $T = T_0$ (現在のマントルの平均温度) における粘性係数、 E_a は活性化エネルギーである。このようにして、 Q_S を T の関数として表すことができた。

最後に、右辺第2項は放射性熱源である。放射性元素は U, Th, K による寄与の和だが、まとめて近似的に

$$H_{rad} = H_{rad,0} \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \quad (130)$$

のように表してよいことがわかっている。ここで t は現在を 0 とする時間、 τ_{rad} は平均的な壞変定数。 $H_{rad,0}$ は現在の放射性熱源である。

以上をまとめると、熱史の方程式は

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Ak \left(\frac{\alpha g}{\kappa Ra_c} \right)^{1/3} (T - T_S)^{4/3} \nu^{-1/3} + H_{rad,0} \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \quad (131)$$

となる。以下、 ν 以外のいろいろな係数は定数と考える。 ν の温度依存性として指数関数型 (128) を用いるときは

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Q_0 \left\{ \left(\frac{T - T_S}{T_0 - T_S} \right)^{4/3} \exp \left[-T_\nu \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] - Ur_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \right\} \quad (132)$$

となる。ここで、

$$Q_0 = \frac{Ak(T_0 - T_S)}{D} \left(\frac{Ra_0}{Ra_c} \right)^{1/3} \quad (133)$$

$$Ra_0 = \frac{\alpha g(T_0 - T_S) D^3}{\kappa \nu_0} \quad (134)$$

$$T_\nu = \frac{E_a}{3R} \quad (135)$$

$$Ur_0 = \frac{H_{rad,0}}{Q_0} \quad (136)$$

で、 D はマントルの厚さ、 Ra_0 は現在のマントルの Rayleigh 数である。 Ur_0 は現在の Urey 比である。Urey 比とは、放射性熱源と地表熱流量の比である。粘性としてべき乗型 (129) を用いるときは

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Q_0 \left[\left(\frac{T - T_S}{T_0 - T_S} \right)^{4/3} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{n/3} - Ur_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \right] \quad (137)$$

となる。

上で出てきたように放射性熱源と地表面熱流量の比を Urey 比と呼ぶ。

$$Ur = \frac{H_{rad}}{Q_S} \quad (138)$$

ここで

$$Q_S \equiv \oint_{Earth Surface} \underline{q} \cdot d\underline{S} \quad (139)$$

である。先の見積もりによれば、現在の地球の Urey 比は $Ur = 15 \text{ TW}/44 \text{ TW} = 0.34$ となる。ただし、熱史を考える上では、大陸地殻の放射性熱源（大陸地殻には放射性熱源が濃集している）はマントル対流と関わらないので除外して考えるべきだという考え方もあり、その考え方によれば、現在の地球の Urey 比は $Ur = (15 - 7) \text{ TW}/(44 - 7) \text{ TW} = 0.22$ となる（おおむね 1/5）。

6.2 热史の方程式の解の振る舞い

まず、このような方程式の解がどう振舞うかを理解しておこう。

まず、いろいろな依存性を切り捨てて単純化した式

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Q_0 \left[\frac{T - T_S}{T_0 - T_S} - Ur_0 \right] \quad (140)$$

の振る舞いを復習しよう。これは単純な式だから、答えはすぐにわかる。答えは

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-t/\tau} \quad (141)$$

となる。ここで、 t は現在を 0 とする時間で、

$$T_\infty = T_S + (T_0 - T_S) Ur_0 \approx T_0 Ur_0 \quad (142)$$

$$\tau = M_E C T_0 / Q_0 \quad (143)$$

である。わかること：

- 時間が無限に経つと、右辺が 0 になるような温度に近づく。つまり、放射性熱源による発熱と対流による放熱が釣り合うような温度になる。その温度は、現在の温度に Urey 比をかけたくらいである。
- 温度が落ち着くための時定数 τ は、現在の熱流がずっと続いたとして地球の温度が 0 になる時間である。それはおおむね $1.5 \times 10^{31} \text{ J}/40 \text{ TW} \approx 10 \text{ Gyr}$ (100 億年) となる。
- Urey 比がおおむね 1 より小さければ、現在地球は冷えているということだし、1 より大きければ暖まっているということになる。

以上を踏まえて、熱史の式 (137) を現在から過去に向かって積分した計算例を挙げる (配布図 Korenaga 2008)。わかること :

- 時間を過去に遡ると、現在の Urey 比が小さめだと、有限の時間で温度が発散する。これはなぜかといえば、過去に遡ると、マントルの温度が高くなるので、熱輸送効率が良くなって、より冷えやすくなるためである。
- 逆に現在の Urey 比が大きめだと、過去には地球が暖まっていた時代が出てくる。
- そういうわけで、過去の温度がありえそうな範囲に収まるためには、現在の Urey 比が 0.7 から 0.75 程度でないといけないと結論付けられる。ところが、地球化学的な議論によれば、現在の Urey 比は $1/5$ 程度であり、大きくて 0.4 くらいである。この矛盾は、エネルギー収支のところで考えた収支が合わない問題を熱史の観点から言い換えたものである。解決策としては、先に述べたように地球深部のせいにするか、 β や n を減らすということが考えられる。
- β や n を小さくすると thermal catastrophe が起こりにくくなり、昔に行くほど冷却速度が速くなる割合が小さくなる。そこで、Urey 比としてより広範囲の値が可能になる。これは先に述べた昔の冷却速度を小さくするということに対応する。
- 時間を未来に積分してゆくと、やがては微分方程式の右辺が小さくなるように変化する。つまり、放射性熱源による発熱と対流による放熱がだいたい釣り合うような温度になる。つまり、地球はやがて放射性熱源の減少に歩調を合わせるように冷却してゆくようになる。