

4.2 プレーートの冷却モデル

4.2.1 1次元半無限冷却モデル

プレートは、海嶺で生まれて、海溝で沈み込む。海嶺では、マントルが上昇してくる。ただし、それはマントル対流の湧き出し口という意味ではない。周囲から引っ張られた裂け目を埋めるために上昇流が生じてマグマが発生し、地殻が生成する。海嶺では、基本的にはマントルが上がっているのだから、単純に言えばマントルの温度である。それが海嶺から離れるにつれて冷やされる (Turcotte & Schubert, Fig.4-22)。その様子を以下のようにモデル化する。

1. 1次元の熱伝導方程式を解く。最初マントルの温度をしている半無限媒体が、突然海水温度で上から冷やされる。必修実験と同じ状況を考える。
2. その解の時間 t を、海底の年代、すなわち海嶺から今の位置までやってきた時間だと読む。つまり、

$$t \rightarrow x/v \quad (1)$$

と読み替える (Turcotte & Schubert, Fig.4-23)。

3. 結果を熱流の観測や、アイソスタシーを仮定した海底の水深と比較する。

このモデルの仮定は、

1. 横方向の熱伝導を無視 →これは、鉛直方向の温度勾配が水平方向の勾配より大きければさほど問題とはならない
2. プレートはいったんできた後は下から暖められることがない →これが実際問題であることは結果的にわかる
3. 熱伝導以外の熱移動メカニズムがない →これも実際問題であることは結果的にわかる

ということである。いろいろ問題があるモデルではあるが、考えるための基本として重要である。地球科学モデルというものは、たいていそんなにきれいに合うものではない。大体合えばよいし、そこからのずれはまた新たな現象を示していることになる。

以下、まず半無限空間冷却モデルを考える。解くべき式は、1次元熱伝導方程式である (図1; Turcotte & Schubert Fig.4-20 ただし、図と違って $T_1 > T_0$ とする)。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2)$$

初期条件は

$$T = T_1 \quad \text{at } t = 0 \quad (3)$$

境界条件は

$$T = T_0 \quad \text{at } z = 0 \quad (4)$$

$$T \rightarrow T_1 \quad \text{as } z \rightarrow \infty \quad (5)$$

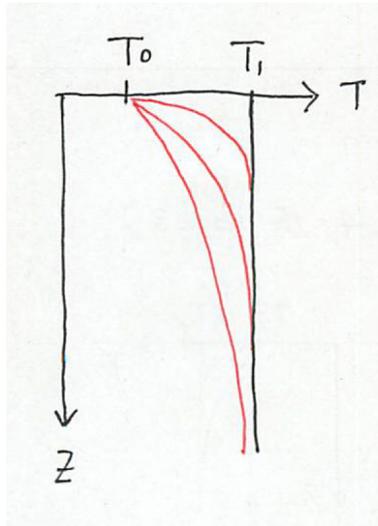


図 1: 1次元半無限冷却モデル

である。まず、式が簡単になるように規格化をする。

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (7)$$

$$\theta(z, 0) = 0 \quad (8)$$

$$\theta(0, t) = 1 \quad (9)$$

$$\theta(\infty, t) = 0 \quad (10)$$

4.2.2 相似解

熱伝導方程式の解き方は、初期条件、境界条件によっていろいろあるが、今の場合には相似解が有効である。相似解とは、解が1つの変数のみの関数になっているものである。 θ は t と z の関数である。しかし、この場合は

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (11)$$

(相似変数) という1つの変数の関数になっていることを結果的に示すことができる (やってみないとわからない)。つまり、 θ は、 η を通して z と t に依存している。どうしてこういう変数の組み合わせを選ぶかというと、熱伝導方程式で、微分を割り算だと何となく思うと

$$\frac{\theta}{t} = \kappa \frac{\theta}{z^2} \quad (12)$$

という感じになって、 $z^2/\kappa t$ という組み合わせが無次元の変数として浮かび上がる。そこで相似解があるなら、 η のようなものだろうということがわかる。ファクター 2 は結果的に係数が簡単になるように付けたものでそれほど本質的ではない。

このような解が存在するために必要な条件は、 $z=0$ と $t \rightarrow \infty$ 、 $t=0$ と $z \rightarrow \infty$ がそれぞれ対応する初期条件と境界条件になっていることである。今の初期条件と境界条件はまずこれを満たしている。

次に、熱伝導方程式が η 1 変数のみで書き直せることを確認する。

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (13)$$

とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{z}{4\sqrt{\kappa t^{3/2}}} \frac{d}{d\eta} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d}{d\eta} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d}{d\eta} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2}{d\eta^2} \quad (16)$$

となるので、解くべき式は

$$-\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \quad (17)$$

$$\theta(\infty) = 0 \quad (18)$$

$$\theta(0) = 1 \quad (19)$$

となる。これを解く。まず、式の形から自然に

$$\phi = \frac{d\theta}{d\eta} \quad (20)$$

と置く。すると、解くべき方程式は

$$-\eta\phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\eta} \quad (21)$$

となる。これは変数分離型なので、すぐに積分ができて

$$-\eta^2 = \ln \phi - \ln c_1 \quad (22)$$

$$\phi = c_1 e^{-\eta^2} \left(= \frac{d\theta}{d\eta} \right) \quad (23)$$

となる。もう一度積分すると

$$\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' = \operatorname{erfc}\eta \quad (24)$$

となる。ここで、

$$\operatorname{erf}\eta \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \quad (25)$$

$$\operatorname{erfc}\eta \equiv 1 - \operatorname{erf}\eta \quad (26)$$

はそれぞれ誤差関数 (error function) と相補誤差関数 (complementary error function) と呼ばれる関数である (Turcotte & Schubert Fig.4-21, Table 4-5)。元の変数に直すと、

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (27)$$

となり、これで温度が解けたとことになる。プレートモデルでは t がプレートの年齢、 T が温度である。

次に進む前に、このモデルがプレートの本質に関して語っているメッセージを確認しよう。このモデルでは、通常プレートの下面が等温度面であることが仮定される。つまり、温度が一定の温度より高くなると岩石の流動性が上がる。その温度面より下側がアセノスフェア、上側がリソスフェア（プレート）であるということである。その面はマントル内にあり、物質境界ではない。しかし、この点についてはいまだ解決されていない根本的な問題もある。それは、地震学的にプレート下面が見えるという研究も数多くあるということだ。プレート下面は物質境界ではなく、単なる等温面だとすると、地震学的に見えるはずがない。この点は基本的な問題でありながらもよくわかっていない。基本的な問題がよくわかっていないというのは、地球科学ではよくありがちなことである。

4.2.3 観測量との比較

温度の深さ分布は、深い穴を掘らないと観測できないので、もう少し観測しやすい量に直そう。

その一つは熱流量である。熱流量は、海底の堆積物にヤリを刺して温度を測ればよいのであった。つまり、浅いところの数点の温度だけでよい。

$$\begin{aligned}
 q &= k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \\
 &= k(T_1 - T_0) \frac{\partial}{\partial z} \left(\operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \\
 &= k(T_1 - T_0) \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\kappa t}} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \right]_{z=0} \\
 &= \frac{k(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi \kappa t}}
 \end{aligned} \tag{28}$$

つまり、

$$q = \frac{C}{\sqrt{t}} \tag{29}$$

$$C = \frac{k(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi \kappa}} \tag{30}$$

という形をしている。これを観測と比べたのが Harris & Chapman, Fig.10.2 で、 $C = 500 \text{ mW m}^{-2} \text{ My}^{1/2}$ 程度だということがわかる。 $k = 3.3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、 $\kappa = 8 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ とすると、 $T_1 - T_0 = 1350 \text{ K}$ となる。これがマントルの温度の見積もりということになる。

ところで、Fig.10.2 がこんなにきれいに合うのは、観測を海底に堆積物が厚く積もっているところに注意深く限り、かつ海嶺付近を除いているせいである。実は、もっと若い海底や古い海底まで合わせると、Harris & Chapman, Fig.10.1 c, d¹ のようになり、けっこうずれている。若い海底では、モデルより概して低くなるのは、熱水循環のせいだと思われる。海底では、伝導ではなくて水の対流で熱が運ばれている。しかし、それは浅いところの話なので、深いところではこのモデルで良いかもしれない。さらに、若い海底では測定値のバラつきが大きい。

¹この Fig.10.1 は北大西洋と北西大西洋のデータをコンパイルしたものだ。

その理由としては、熱水循環のほかに基盤と堆積物の境界の地形が複雑なことが多くて、それによって熱流の集中が起きたりするということがある。それに加えて、若い海底では堆積物が薄いので槍が刺さらない場所が多いという問題もある。

そこで、若い海底 (80 Ma 程度より若い) では、半無限冷却モデルの妥当性を確かめるには、何か積分量に依存する観測量があればよい。それが海底深度である。海底の深さはアイソスタシーで決まっている (Turcotte & Schubert, Fig.4-44)。アイソスタシーが成り立っているとすると、ある深さよりも上の重さは同じになる。プレートは冷えるにつれて縮むから、海底の深さは深くなることになる。重さは密度の積分だから、温度の積分量でもある。そこで、こちらのほうは熱水循環の影響を受けづらいと予想できる。

アイソスタシーを考えて、海底の深さを求めてみよう (Turcotte & Schubert, Fig.4-44)。アイソスタシーの式は

$$\rho_m(w + L) = \int_0^L \rho dz + w\rho_w \quad (31)$$

である。移項して、

$$w(\rho_m - \rho_w) = \int_0^L (\rho - \rho_m) dz \quad (32)$$

とも書くことが出来る。密度が冷えるに従って大きくなるということは

$$\rho - \rho_m = \rho_m \alpha (T_1 - T) \quad (33)$$

で表される。ここで α は熱膨張率である。これを (32) に代入すると

$$\begin{aligned} w(\rho_m - \rho_w) &= \rho_m \alpha (T_1 - T_0) \int_0^\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{\kappa t}}\right) dz \\ &= 2\sqrt{\kappa t} \rho_m \alpha (T_1 - T_0) \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta \\ &= 2\rho_m \alpha (T_1 - T_0) \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \end{aligned} \quad (34)$$

となり、

$$w = \frac{2\rho_m \alpha (T_1 - T_0)}{(\rho_m - \rho_w)} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \quad (35)$$

と求められる。重要なことは、水深が \sqrt{t} に比例するということである。

なお、途中で使った $\int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta = 1/\sqrt{\pi}$ は以下のようにして証明できる。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\eta) d\eta &= \int_0^\infty \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \right] d\eta \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta'^2} \left[\int_0^{\eta'} 1 d\eta \right] d\eta' \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \eta' e^{-\eta'^2} d\eta' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \quad (36)$$

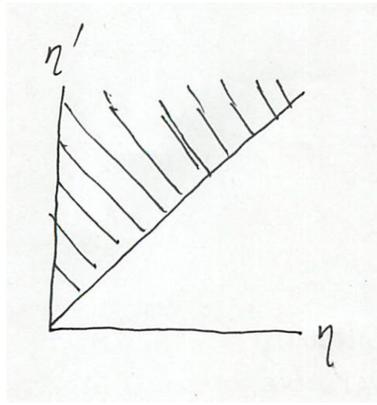


図 2: 積分の順序の入れ替え

ただし、1行目から2行目に移るときは、図2で示されるような変数の入れ替えを行い、3行目から4行目に移るとき $\xi = \eta^2$ と置いた。

水深の観測と上の理論の比較は Harris & Chapman, Fig.10.1 a, b のようになり、若い海底でも良く成り立つ。すなわち、1次元半無限冷却モデルはおおむね正しそうである。

ところが、一方で、同じ図をよく見ると、70 Ma くらいより古い海底だと、水深が頭打ちになり、熱流もほぼ一定となっている。熱流は、したがって半無限問題よりも大きくなっている。この解釈は、下からやってくる熱を無視したのがいけなかったと考えられる。

4.2.4 1次元平板冷却モデル

下からやってくる熱を考慮して、プレートはやがて一定の厚さになるものとする。その厚さを L とする。一定になる必然性はないのだが、観測によれば、古い海底では水深も熱流も一定になっているから、プレートの厚さが一定になると解釈したのだ。このモデルを使えば、後述のように観測を説明できる。しかし、なぜ一定になるモデルが良いのかは（たぶん）未だにわかっていない。下から熱が何らかの形でやってくること自体は自然なのだが、具体的にどのようにやってきているのかは未解決の問題である（と思う）。

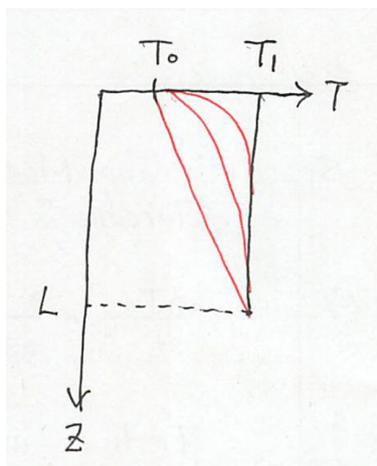


図 3: 1次元平板冷却モデル

数学的な問題設定としては以下のようにする (図 3)。解くべき式は、先の半無限冷却モデル

と同じ 1 次元熱伝導方程式である。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (37)$$

初期条件も前と同じく

$$T = T_1 \quad \text{at } t = 0 \quad (38)$$

で、境界条件は

$$T = T_0 \quad \text{at } z = 0 \quad (39)$$

$$T = T_1 \quad \text{at } z = L \quad (40)$$

である。下側の境界が $z \rightarrow \infty$ ではなく $z = L$ で付いているのが半無限冷却モデルとの違いである。こうなると、先の相似解は使えない。というのは、 $t = 0$ と $z \rightarrow \infty$ がもはや対応しないからである。そこで、もうちょっと一般的な Fourier 級数の方法を使って解く。

まず、式と境界条件が簡単になるように変数変換をする。

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} - \frac{z}{L} \quad (41)$$

$$\zeta = \frac{z}{L} \quad (42)$$

$$\tau = \frac{\kappa t}{L^2} \quad (43)$$

すると、解くべき式と境界条件は

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (44)$$

$$\theta(\zeta, 0) = 1 - \zeta \quad (45)$$

$$\theta(0, \tau) = 0 \quad (46)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad (47)$$

となる。この変数変換のポイントは、(a) θ 、 ζ 、 τ を無次元の変数にしたこと、(b) 解くべき式の係数を 1 にしたこと、(c) 両端での値を 1 にすることで、Fourier 級数の方法を使いやすくしたことである。

上のポイント (c) は、sin 関数での Fourier 級数展開をするために行ったことである。その作戦に従って、解を次の Fourier 級数の形で求める。

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\tau) \sin(n\pi\zeta) \quad (48)$$

この式は自動的に境界条件 (46)、(47) を満たす。この式を解くべき式 (44) に代入すると、 Θ_n が満たすべき式が求められる。

$$\frac{d\Theta_n}{d\tau} = -(n^2\pi^2)\Theta_n \quad (49)$$

初期条件は (45) より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(0) \sin(n\pi\zeta) = 1 - \zeta \quad (50)$$

となるが、 \sin 関数の直交性を利用してこれを Θ_n について解くと

$$\begin{aligned}
\Theta_n(0) &= 2 \int_0^1 (1 - \zeta) \sin(n\pi\zeta) d\zeta \\
&= \frac{2}{n\pi} \left\{ -[\cos(n\pi\zeta)]_0^1 + [\zeta \cos(n\pi\zeta)]_0^1 - \int_0^1 \cos(n\pi\zeta) d\zeta \right\} \\
&= \frac{2}{n\pi} \left\{ -[(-1)^n - 1] + (-1)^n - \frac{1}{n\pi} [\sin(n\pi\zeta)]_0^1 \right\} \\
&= \frac{2}{n\pi}
\end{aligned} \tag{51}$$

となる。したがって、

$$\Theta_n(\tau) = \frac{2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2\tau} \tag{52}$$

となる。そこで、

$$\theta = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\tau} \sin(n\pi\zeta) \tag{53}$$

となり、元の変数に戻すと

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \left[\frac{z}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n^2\pi^2 \frac{\kappa t}{L^2}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{L}\right) \right] \tag{54}$$

ということになる。仮定から当然だが、 $t \gg L^2/\kappa$ なら

$$T \approx T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z}{L} \tag{55}$$

となる。

観測と比べられる量として、熱流量と海底深度も求めておく。熱流量は

$$q = k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{k(T_1 - T_0)}{L} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^2\pi^2 \frac{\kappa t}{L^2}\right) \right] \tag{56}$$

となる。 $t \gg L^2/\kappa$ なら

$$q \approx \frac{k(T_1 - T_0)}{L} \tag{57}$$

となる。海底深度は

$$\begin{aligned}
w &= \frac{\rho_m \alpha}{\rho_m - \rho_w} \int_0^L (T_1 - T) dz \\
&= \frac{\rho_m \alpha (T_1 - T_0) L}{\rho_m - \rho_w} \int_0^1 \left[(1 - \zeta) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n^2\pi^2 \frac{\kappa t}{L^2}\right) \sin(n\pi\zeta) \right] d\zeta \\
&= \frac{\rho_m \alpha (T_1 - T_0) L}{\rho_m - \rho_w} \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \exp\left(- (2m+1)^2 \pi^2 \frac{\kappa t}{L^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{58}$$

となる。 $t \gg L^2/\kappa$ なら

$$w \approx \frac{\rho_m \alpha (T_1 - T_0) L}{2(\rho_m - \rho_w)} \tag{59}$$

| | PS77 | GDH1 |
|--|----------------------------------|--------------------------------|
| κ (m ² s ⁻¹) | 8×10^{-7} | 8×10^{-7} |
| k (W m ⁻¹ K ⁻¹) | 3.1 | 3.1 |
| α (K ⁻¹) | $(3.28 \pm 1.19) \times 10^{-5}$ | $(3.1 \pm 0.8) \times 10^{-5}$ |
| ρ_m (kg m ⁻³) | 3,300 | 3,300 |
| ρ_w (kg m ⁻³) | 1,000 | 1,000 |
| L (km) | 125 ± 10 | 95 ± 15 |
| T_1 (°C) | $1,333 \pm 274$ | $1,450 \pm 250$ |

表 1: プレート冷却モデルのパラメタ。PS77 は Parsons and Sclater (1977) によるもので、北太平洋と北大西洋の海底深度データのみから求められている。GDH1 は Stein and Stein (1992) によるもので、北太平洋と北西大西洋の海底深度と 50 Ma より古い部分の熱流量の両方から求められている。

となる。

あとは、これを観測と突き合わせて、パラメタを決めればよい。その結果が表 1 である。観測データとの比較が Harris and Chapman, Fig.10.1 で、長い破線が PS77、短い破線が GDH1 である。図は GDH1 の論文から取ってきているものなので、当然のことながら GDH1 の方がよく合っているように見える。

このプレート冷却モデルによれば、プレートの底から

$$q \approx \frac{k(T_1 - T_0)}{L} = (3.1 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}) \frac{1450 \text{ K}}{95 \text{ km}} = 48 \text{ mW m}^{-2} \quad (60)$$

という量の加熱があるはずだ (パラメタは GDH1)。地球全体の平均的な熱流量がおおよそ 80 mW m⁻² であったことを思い出すと、この量は約半分強である。海嶺付近での熱流量が大きいことが平均を押し上げている。

このような底面加熱が具体的にどのようなになっているのか (たとえば、プルームがやってきているとか小さな熱対流が起こっているとか) に関しては、まだ確立したイメージがあるわけではない。したがって、プレートの底面を一体何が決めているのかは未だに明らかではない。