08/10/16

3-3. 偏微分の関係式（教科書１の 3.1、教科書２の付録 A.3）

微分形式を使って偏微分の関係式を導く。

証明したい式 [前提：独立な変数は２つ]

(a)
$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \qquad (2)$$

(b) f を x と y の関数とみなした場合と x と z の関数とみなした場合との関係式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \qquad (4)$$

(c) f を x と y の関数とみなした場合と u と v の関数とみなした場合との関係式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \qquad (6)$$

以下、証明

(a) まず、x を y と z の関数とみなして

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \qquad (7)$$

次に、y を x と z の関数とみなすならば

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz \qquad (8)$$

(8) を (7) に代入して

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] dz \tag{9}$$

$dz = 0$ とすると、(1) 式が、$dx = 0$ から(2) 式が得られる。

(b)　まず、f を x と z の関数とみなして

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_x dz \tag{10}$$

次に、z を x と y の関数とみなすならば

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{11}$$

(11) を (10) に代入して

$$df = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right] dx + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{12}$$

$dy = 0$ とすると、(3) 式が、$dx = 0$ から(4) 式が得られる。

(c)　まず、f を x と y の関数とみなして

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \tag{13}$$

次に、x, y を u と v の関数とみなすならば

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u dv \tag{14}$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u dv \tag{15}$$

が得られる。(14),(15)を(13)に代入して

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u dv\right\} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left\{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u dv\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right\} du + \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right\} dv \end{aligned} \tag{16}$$

$dv = 0$ とすると、(5) 式が、$du = 0$ から(6) 式が得られる。