

Airy 関数と Scorer 関数

吉田茂生

2020 年 1 月 25 日

目次

第 1 章	準備	5
1.1	数値的に満足な解の組 (numerically satisfactory pair of solutions)	5
1.2	Euler の定数	6
1.3	ガンマ関数の公式	6
1.4	(変形) Bessel 関数の公式	6
1.5	Watson の補助定理	7
1.6	参考文献	8
第 2 章	Airy 関数の定義とさまざまな表式	9
2.1	Airy の微分方程式	9
2.2	Airy の微分方程式の拡張された逆 Laplace 変換による解	9
2.2.1	積分経路としてセクターの中央を通す場合	11
2.2.2	実引数の Airy 積分	13
2.3	Airy 関数と (変形) Bessel 関数の関係	14
2.3.1	$z > 0$ の場合	14
2.3.2	$z < 0$ の場合	16
2.4	Airy の微分方程式の Laplace 変換による解	17
2.5	参考文献	18
第 3 章	Airy 関数の性質	19
3.1	原点での値	19
3.2	Wronskian	20
3.3	積分	21
3.3.1	$\int_0^\infty \text{Ai}(x)dx$	21
3.3.2	$\int_{-\infty}^0 \text{Ai}(x)dx$	23
3.3.3	$\int_{-\infty}^0 \text{Bi}(x)dx$	24
3.4	参考文献	24
第 4 章	Scorer 関数の定義とさまざまな表式	25

4.1	非斉次 Airy の微分方程式	25
4.2	非斉次 Airy の微分方程式の拡張された逆 Laplace 変換による解	25
4.2.1	積分経路としてセクターの中央を通す場合	26
4.2.2	実引数の Scorer 関数 $Gi(x)$	27
4.3	Scorer 関数の簡単に分かる性質	28
4.3.1	原点での値	28
4.4	非斉次 Airy の微分方程式の定数変化法による解	28
4.5	非斉次 Airy の微分方程式の Laplace 変換による解	30
4.6	参考文献	31
第 5 章	Airy 関数のさまざまな計算法	33
5.1	$ z $ が小さいときの Maclaurin 展開	33
5.2	$ z $ が大きいときの鞍点法による評価	34
5.2.1	実引数の Airy 関数	34
5.2.2	複素引数の第 1 種 Airy 関数	38
5.3	$ z $ が大きいときの Watson の補助定理を用いた評価	43
5.3.1	正の実引数の Airy 関数の漸近展開とその解析接続	44
5.3.2	負の実軸を含んでも有効な Airy 関数の漸近展開とその解析接続	47
5.4	参考文献	48
第 6 章	Scorer 関数のさまざまな計算法	49
6.1	$ z $ が小さいときの Maclaurin 展開	49
6.2	$ z $ が大きいときの漸近展開	49
6.2.1	Watson の補助定理を用いた評価	49
6.2.2	直接的な漸近級数展開	51
6.2.3	積分	53
6.3	参考文献	55

第 1 章

準備

ここでは用語や公式の準備をしておく。

1.1 数値的に満足な解の組 (numerically satisfactory pair of solutions)

2 階の斉次微分方程式には独立な 2 つの解がある。その選び方には任意性がある。たとえば、微分方程式

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = w \quad (1.1)$$

の一般解は

$$w = Ae^z + Be^{-z} \quad (1.2)$$

とも書けるし、

$$w = A \cosh z + B \sinh z \quad (1.3)$$

とも書ける。後者の場合、 $\Re z > 0$ の大きい値では、 A と $-B$ がほぼ等しいとき 2 つの項が大きな値でキャンセルしあう。これは数値計算ではあまりあり難くないことがある。このような意味で、前者の選び方のほうを 数値的に満足な解の組 (numerical satisfactory pair of solutions) と呼ぶことにする。

上の例では、無限遠が不確定特異点である。確定特異点の周りの解の場合も同様である。解を Frobenius 展開することを考える。数値的に満足な解の組の一方は、指数の実部が大きいほうか、指数が同じときは対数発散を含まないほうに取る。こちらのほうの解を recessive (劣性) と呼ぶ^{*1}。これと独立な解を dominant (優性) と呼ぶ。recessive な解の dominant な解に対する比の大きさは特異点に近づくと無限大になる。

^{*1} subdominant, distinguished, minimal という形容詞を使うこともある。

1.2 Euler の定数

Euler の定数 γ が以下の積分で与えられることは、証明無しに使う。

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-t} (\ln t) dt \quad (1.4)$$

1.3 ガンマ関数の公式

以下のガンマ関数に関する公式は証明無しに使う。

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\Re z > 0) \quad (1.5)$$

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} (\ln t) dt \quad (\Re z > 0) \quad (1.6)$$

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (1.7)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (1.8)$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (1.9)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \text{ は自然数}) \quad (1.10)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.11)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (n \text{ は自然数}) \quad (1.12)$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma \quad (1.13)$$

$$\psi(1) = -\gamma \quad (1.14)$$

$$\psi(n+1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma \quad (n \text{ は自然数}) \quad (1.15)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (1.16)$$

1.4 (変形) Bessel 関数の公式

以下の (変形) Bessel 関数に関する公式は証明無しに使う。

Bessel 関数 $J_\nu(z)$ は、級数展開した形では

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (1.17)$$

で表される (z は負の実数ではないものとする)。 ν が整数でないとき、 $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0 \quad (1.18)$$

の解の基本系をなす。 $J_\nu(t)$ に関して、次の積分が成り立つ。

$$\int_0^\infty J_\nu(t) dt = 1 \quad (\Re \nu > -1) \quad (1.19)$$

変形 Bessel 関数 $I_\nu(z)$ は、級数展開した形では

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (1.20)$$

で表される (z は負の実数ではないものとする)。 ν が整数でないとき、 $I_\nu(z)$ と $I_{-\nu}(z)$ は Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0 \quad (1.21)$$

の解の基本系をなす。

1.5 Watson の補助定理

Laplace 変換の形をした関数

$$I(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \quad (1.22)$$

を考え、その z が大きいときの振る舞いを漸近展開で表現する定理が以下の Watson の補助定理で、ここでは証明無しに使う。

$f(t)$ が $\alpha_1 < \arg(t) < \alpha_2$ ($\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$) において、以下の 3 つの条件を満たすとする。

- 正則
- 展開

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{a_m} \quad (1.23)$$

が成立する。 $\Re(a_0) > -1$ で、 $\Re(a_m)$ は m とともに単調増加して、 $m \rightarrow \infty$ で発散するものとする。

- $|t| \rightarrow \infty$ で $f(t) = O(e^{\sigma|t|})$ となっているとする。

このとき、 $-\pi/2 - \alpha_2 < \arg(z) < \pi/2 - \alpha_1$ において、漸近展開の意味で

$$I(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m \Gamma(a_m + 1)}{z^{a_m + 1}} \quad (1.24)$$

が成立する。求め方は、一言で言えば、項別に Laplace 変換をするということで、この定理はそうしてよいことを保証している。

1.6 参考文献

- [本] F.W.J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- [本] Norman Bleistein, Richard A. Handelsman (1986) *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover, New York.
- [web page] F.W.J. Olver (2019) *Digital Library of Mathematical Functions, Chapter 9 Airy and Scorer Functions*, <https://dlmf.nist.gov/9>.
- [本] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信 (1960) 数学公式 III 一特殊函数一 (岩波全書), 岩波書店.

第 2 章

Airy 関数の定義とさまざまな表式

2.1 Airy の微分方程式

Airy 関数は、次の微分方程式の解である。

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - zf = 0 \quad (2.1)$$

この方程式が無限遠点を不確定特異点とすることを確認する。そのために $\zeta = 1/z$ と置く。すると、

$$\frac{d}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} \frac{d}{d\zeta} = -\frac{1}{z^2} \frac{d}{d\zeta} = -\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \quad (2.2a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{d\zeta}{dz} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d}{dz} \right) = -\frac{d\zeta}{dz} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \right) = \zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \right) = \zeta^4 \frac{d^2}{d\zeta^2} + 2\zeta^3 \frac{d}{d\zeta} \quad (2.2b)$$

となる。したがって、Airy の微分方程式 (2.1) は

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} + 2\frac{1}{\zeta} \frac{df}{d\zeta} - \frac{1}{\zeta^5} f = 0 \quad (2.3)$$

となる。 ζ の微分方程式としては原点が不確定特異点である。したがって、Airy の微分方程式 (2.1) においては、無限遠点は不確定特異点である。

2.2 Airy の微分方程式の拡張された逆 Laplace 変換による解

Airy 関数は、Airy の微分方程式 (2.1) の解である。普通に使われる解の形を以下で説明する。

Airy の微分方程式の解を

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(s) e^{sz} ds \quad (2.4)$$

の形に置く。積分経路 C はあとで都合の良いように決めることにする。参考までに通常の Laplace 変換の反転公式は

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s) e^{sz} ds \quad (2.5)$$

である。ここでは、積分経路を後から決める。

さて、式 (2.4) を Airy の微分方程式 (2.1) に形式的に代入すると

$$\int_C (s^2 - z)F(s)e^{sz}ds = 0 \quad (2.6)$$

となる。部分積分を一回すると

$$-F(s)e^{sz}|_C + \int_C \left[s^2 F(s) + \frac{dF}{ds} \right] e^{sz} ds = 0 \quad (2.7)$$

が得られる。ここで、第 1 項は C の経路の両端での値の差を表すものとする。もしそれが 0 になるように選ぶことができれば、

$$\frac{dF}{ds} + s^2 F = 0 \quad (2.8)$$

から解が得られる。この微分方程式の解の一つは

$$F = e^{-s^3/3} \quad (2.9)$$

である（一般解はこれの定数倍）。すると、微分方程式の解は

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-s^3/3+sz} ds \quad (2.10)$$

ということになる。

で、この積分経路の選び方だが、両端で

$$F(s)e^{sz} = e^{-s^3/3+sz} \quad (2.11)$$

が 0 になるように選ばなければならない。そのためには両端が

$$-\frac{\pi}{6} < \arg(s) < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} < \arg(s) < \frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6} < \arg(s) < -\frac{\pi}{2} \quad (2.12)$$

のセクター内の $|s| \rightarrow \infty$ であればよい。ここでは、一つのセクターの無限遠から別の一つのセクターの無限遠を結ぶような図 2.1 のような積分経路 C_1, C_2, C_3 を考える。このようにして Airy の微分方程式の解が 3 つ得られる。

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} e^{-s^3/3+sz} ds \quad n = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

f_1 のことを第 1 種 Airy 関数と呼ぶ。

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{-s^3/3+sz} ds \quad (2.14)$$

Cauchy の積分定理から、 $f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) = 0$ である。

f_2 の積分表示

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} e^{-s^3/3+sz} ds \quad (2.15)$$

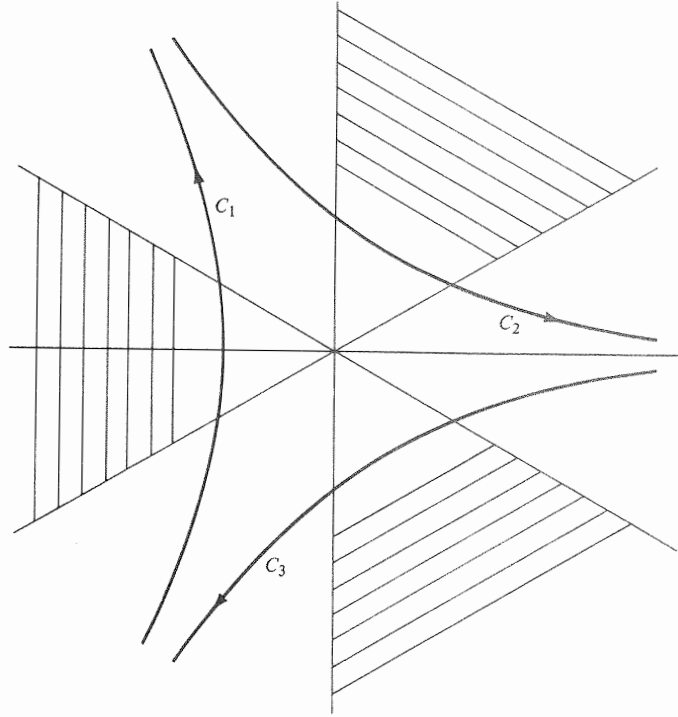


Figure 2.5. Contours for Integral Representations of Airy Functions

図 2.1 Airy 関数の積分表現の積分経路 (Bleistein and Handelsman, 1986)

において、 $\tau = se^{(2\pi/3)i}$ と置けば、 τ は C_1 の上を動く。そこで、

$$f_2(z) = \frac{e^{-(2\pi/3)i}}{2\pi i} \int_{C_1} e^{-\tau^3/3 + \tau z e^{-(2\pi/3)i}} d\tau = e^{-(2\pi/3)i} \text{Ai}(ze^{-(2\pi/3)i}) \quad (2.16)$$

となる。同様にすれば、

$$f_3(z) = e^{(2\pi/3)i} \text{Ai}(ze^{(2\pi/3)i}) \quad (2.17)$$

である。とくに、

$$\text{Bi}(z) \equiv i[f_2(z) - f_3(z)] = i \left[e^{-(2\pi/3)i} \text{Ai}(ze^{-(2\pi/3)i}) - e^{(2\pi/3)i} \text{Ai}(ze^{(2\pi/3)i}) \right] \quad (2.18)$$

を第 2 種 Airy 関数と呼ぶ。

以下では、次の記法を用いることもある。

$$\text{Ai}_0(z) = \text{Ai}(z) \quad (2.19a)$$

$$\text{Ai}_1(z) = \text{Ai}(ze^{-(2\pi/3)i}) = e^{(2\pi/3)i} f_2(z) \quad (2.19b)$$

$$\text{Ai}_{-1}(z) = \text{Ai}(ze^{(2\pi/3)i}) = e^{-(2\pi/3)i} f_3(z) \quad (2.19c)$$

$\text{Ai}_1(z)$ は $\text{Ai}(z)$ を左に $(2\pi/3)$ 回した関数、 $\text{Ai}_{-1}(z)$ は $\text{Ai}(z)$ を右に $(2\pi/3)$ 回した関数となる。

2.2.1 積分経路としてセクターの中央を通す場合

積分経路としては、図 2.1 の各セクターの中央を通してしまおうのが、積分の収束性が良い。これが代表的な表現になる。

$\text{Ai}(z)$ の場合は、経路 C_1 を $\Im s < 0$ のとき $s = \tau e^{-i(2\pi/3)}$ ($\infty > \tau > 0$) として $\Im s > 0$ のとき $s = \tau e^{i(2\pi/3)}$ ($0 < \tau < \infty$) とする。

$$\begin{aligned}
\text{Ai}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\infty}^0 e^{-i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{-i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^{\infty} e^{i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} e^{-i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{-i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right] \tag{2.20} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\tau z + \frac{2\pi}{3}i\right) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\tau z - \frac{2\pi}{3}i\right) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} - \frac{1}{2}\tau z\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau z + \frac{2\pi}{3}\right) d\tau
\end{aligned}$$

$\text{Bi}(x)$ の場合は、積分経路 C_2 を $\Re s \leq 0$ のときは $s = \tau e^{(3\pi/2)i}$ で $\infty > \tau > 0$ になるように取り、 $\Re s > 0$ のときは $s = \tau$ で $0 < \tau < \infty$ になるように取る。同様に、積分経路 $-C_3$ を $\Re s \leq 0$ のときは $s = \tau e^{-(3\pi/2)i}$ で $\infty > \tau > 0$ になるように取り、 $\Re s > 0$ のときは $s = \tau$ で $0 < \tau < \infty$ になるように取る。すると、

$$\begin{aligned}
\text{Bi}(z) &= i[f_2(z) - f_3(z)] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\infty}^0 e^{i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_{\infty}^0 e^{-i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{-i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) d\tau \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\tau z + \frac{2\pi}{3}i\right) d\tau \right. \tag{2.21} \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\tau z - \frac{2\pi}{3}i\right) d\tau \right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) - \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} - \frac{1}{2}\tau z\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau z + \frac{2\pi}{3}\right) \right] d\tau
\end{aligned}$$

となる。

2.2.2 実引数の Airy 積分

実引数の Airy 関数の場合は、積分経路 C_n のうちぎりぎり虚軸に沿わせることができる部分は虚軸に沿わせる形も良く用いられる。

式 (2.14) において、 z を実数 x とする。試しに s を虚軸に沿って取って、 $s = i\tau$ と置くと

$$\begin{aligned}\text{Ai}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau^3/3 + \tau x)} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) d\tau\end{aligned}\tag{2.22}$$

となる。これを Airy 積分と呼ぶ。虚軸に沿って積分経路を取ると、先の C_1 の定義をぎりぎり外れる。そこで、改めてこれが収束するかどうかと、Airy の微分方程式を満たすかどうかを考え直す必要がある。

- 収束性について： $\tau \rightarrow \infty$ としても被積分関数は 0 にならないが、激しく振動することで、積分が収束する。もっときちんと言うには、部分積分を用いて、

$$\begin{aligned}\int_0^t \cos\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) d\tau &= \int_0^t \frac{(\tau^2 + x) \cos\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right)}{\tau^2 + x} d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right)' \cos\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right)}{\tau^2 + x} d\tau \\ &= \left[\frac{\sin\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right)}{\tau^2 + x} \right]_0^t + 2 \int_0^t \frac{\tau \sin\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right)}{(\tau^2 + x)^2} d\tau \\ &= \frac{\sin\left(\frac{t^3}{3} + tx\right)}{t^2 + x} + 2 \int_0^t \frac{\tau \sin\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right)}{(\tau^2 + x)^2} d\tau\end{aligned}\tag{2.23}$$

とする。右辺第 1 項は $t \rightarrow \infty$ で消え、右辺第 2 項も収束する積分であることがわかる。ただし、この積分は x が実数でなければ収束しない。

- Airy の微分方程式：微分と積分の順序を入れ替えて

$$\begin{aligned}\text{Ai}''(x) - x\text{Ai}(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\tau^2 + x) \cos\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right)' \cos\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right)\end{aligned}\tag{2.24}$$

と計算すると、収束しない。これは微分と積分の順序を入れ替えたのが悪い。論理としては、積分経路が C_1 だったらこの値は 0 になったのだから、経路を虚軸に近づけた極限で

も 0 になるはず。Ai(x) がちゃんと収束していれば（このことは上で確かめた）、やはり Airy の微分方程式を満たすことになる。

似たようなことを Bi(x) について考える。引数 x は実数とする。積分経路 C_2 を $\Re s \leq 0$ のときは $s = \tau e^{(\pi/2)i} = i\tau$ で $\infty > \tau > 0$ になるように取り、 $\Re s > 0$ のときは $s = \tau$ で $0 < \tau < \infty$ になるように取る。これまた C_2 の定義をぎりぎり外れるが、とりあえずやってみる。同様に、積分経路 $-C_3$ を $\Re s \leq 0$ のときは $s = \tau e^{-(\pi/2)i} = -i\tau$ で $\infty > \tau > 0$ になるように取り、 $\Re s > 0$ のときは $s = \tau$ で $0 < \tau < \infty$ になるように取る。これまた C_3 の定義をぎりぎり外れるが、とりあえずやってみる。すると、

$$\begin{aligned} \text{Bi}(x) &= i[f_2(x) - f_3(x)] \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\infty}^0 \left[e^{i(\tau^3/3 + \tau x)} - e^{-i(\tau^3/3 + \tau x)} \right] d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\tau^3/3 + \tau x} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) + \sin\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。収束性については、先ほどの Ai(x) の場合と同じである。

2.3 Airy 関数と（変形）Bessel 関数の関係

Airy の微分方程式 (2.1)

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - zf = 0 \quad (2.26)$$

と（変形）Bessel の微分方程式とを関係付ける。以下、 z は実数として $z > 0$ と $z < 0$ のときの 2通り考える。

2.3.1 $z > 0$ の場合

まず、 z が実数であることを強調するために $z = x$ ($x > 0$) と書き換える。微分方程式は

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - xf = 0 \quad (2.27)$$

である。次に、 $\xi = \frac{2}{3}x^{3/2}$ と置くと

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = x^{1/2} \frac{d}{d\xi} = \left(\frac{3}{2}\xi\right)^{1/3} \frac{d}{d\xi} = \frac{3^{1/3}}{2^{1/3}} \xi^{1/3} \frac{d}{d\xi} \quad (2.28a)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} \frac{d}{dx} = \left(\frac{3}{2}\xi\right)^{1/3} \frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{3}{2}\xi\right)^{1/3} \frac{d}{d\xi} \right] = \frac{3^{2/3}}{2^{2/3}} \xi^{2/3} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2^{2/3} 3^{1/3}} \xi^{-1/3} \frac{d}{d\xi} \quad (2.28b)$$

ゆえ

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{3\xi} \frac{df}{d\xi} - f = 0 \quad (2.29)$$

となり、 $1/\xi$ に比例する係数が出てくると引き換えに z に比例する係数を消すことができる。次に

$$f = x^{1/2}w = \left(\frac{3}{2}\xi\right)^{1/3} w \quad (2.30)$$

と置くと、

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dw}{d\xi} - \left(1 + \frac{1}{9\xi^2}\right) w = 0 \quad (2.31)$$

という $1/3$ 次の変形 Bessel 方程式となる。この独立な解は変形ベッセル関数 $I_{1/3}(\xi)$ と $I_{-1/3}(\xi)$ である。

ここで、 ξ が負の実数ではない場合の変形 Bessel 関数の冪級数展開

$$I_\nu(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (2.32)$$

を用いると、

$$x^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_{x=0} = \frac{x}{3^{1/3} \Gamma(\frac{4}{3})} + O(x^4) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.33a)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \Big|_{x=0} = \frac{1}{3^{1/3} \Gamma(\frac{4}{3})} = \frac{3^{2/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \quad (2.33b)$$

$$x^{1/2} I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_{x=0} = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} + O(x^3) \Big|_{x=0} = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \quad (2.33c)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{1/2} I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.33d)$$

を得る。

これを 3.1 節で得られる値

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})} \quad (2.34a)$$

$$\text{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} \quad (2.34b)$$

$$\text{Bi}(0) = \frac{1}{3^{1/6} \Gamma(\frac{2}{3})} \quad (2.34c)$$

$$\text{Bi}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \quad (2.34d)$$

と比較することにより、 $x > 0$ のとき

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{3} x^{1/2} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) - I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \quad (2.35a)$$

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{3^{1/2}} x^{1/2} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \quad (2.35b)$$

を得る。

2.3.2 $z < 0$ の場合

まず、 z が負の実数であることを強調するために $z = -x$ ($x > 0$) と書き換える。微分方程式は

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + x f = 0 \quad (2.36)$$

である。次に、 $\xi = \frac{2}{3}x^{3/2}$ と置くと

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = x^{1/2} \frac{d}{d\xi} = \left(\frac{3}{2}\xi\right)^{1/3} \frac{d}{d\xi} = \frac{3^{1/3}}{2^{1/3}} \xi^{1/3} \frac{d}{d\xi} \quad (2.37a)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} \frac{d}{dx} = \left(\frac{3}{2}\xi\right)^{1/3} \frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{3}{2}\xi\right)^{1/3} \frac{d}{d\xi} \right] = \frac{3^{2/3}}{2^{2/3}} \xi^{2/3} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2^{2/3} 3^{1/3}} \xi^{-1/3} \frac{d}{d\xi} \quad (2.37b)$$

ゆえ

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{3\xi} \frac{df}{d\xi} + f = 0 \quad (2.38)$$

となり、 $1/\xi$ に比例する係数が出てくると引き換えに z に比例する係数を消すことができる。次に

$$f = x^{1/2} w = \left(\frac{3}{2}\xi\right)^{1/3} w \quad (2.39)$$

と置くと、

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dw}{d\xi} + \left(1 - \frac{1}{9\xi^2}\right) w = 0 \quad (2.40)$$

という $1/3$ 次の Bessel 方程式となる。この独立な解はベッセル関数 $J_{1/3}(\xi)$ と $J_{-1/3}(\xi)$ である。

ここで、 ξ が負の実数ではない場合の Bessel 関数の冪級数展開

$$J_\nu(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\xi/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (2.41)$$

を用いると、

$$x^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_{x=0} = \frac{x}{3^{1/3} \Gamma(\frac{4}{3})} + O(x^4) \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.42a)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[x^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \Big|_{x=0} = -\frac{1}{3^{1/3} \Gamma(\frac{4}{3})} = -\frac{3^{2/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \quad (2.42b)$$

$$x^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_{x=0} = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} + O(x^3) \Big|_{x=0} = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \quad (2.42c)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[x^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.42d)$$

を得る。

これを 3.1 節で得られる値

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \quad (2.43a)$$

$$\text{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (2.43b)$$

$$\text{Bi}(0) = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \quad (2.43c)$$

$$\text{Bi}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (2.43d)$$

と比較することにより、 $x > 0$ のとき

$$\text{Ai}(-x) = \frac{1}{3}x^{1/2} \left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \right] \quad (2.44a)$$

$$\text{Bi}(-x) = \frac{1}{3^{1/2}}x^{1/2} \left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \right] \quad (2.44b)$$

を得る。

2.4 Airy の微分方程式の Laplace 変換による解

参考までに、あまり見かけない形だが、Airy の微分方程式の解を素直に Laplace 変換によって解くことを考える。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(z)] = \int_0^\infty e^{-sz} f(z) dz \quad (2.45)$$

とする。微分方程式の Laplace 変換は、微分法則と像の微分法則を用いると

$$s^2 F(s) - f(+0)s - f'(+0) + \frac{dF}{ds} = 0 \quad (2.46)$$

となる。項を入れ替えると

$$\frac{dF}{ds} + s^2 F(s) = f(+0)s + f'(+0) \quad (2.47)$$

となり、両辺に $e^{s^3/3}$ を掛けると

$$\frac{d}{ds} \left[e^{s^3/3} F \right] = e^{s^3/3} [f(+0)s + f'(+0)] \quad (2.48)$$

である。これを 0 から s まで積分すると

$$F(s) = e^{-s^3/3} \left(F(0) + \int_0^s e^{s'^3/3} [f(+0)s' + f'(+0)] ds' \right) \quad (2.49)$$

が得られる。ここで、 $t = s^3/3$ と置くと、

$$F(s) = e^{-s^3/3} \left(F(0) + 3^{-1/3} f(+0) \int_0^{s^3/3} e^t t^{-1/3} dt + 3^{-2/3} f'(+0) \int_0^{s^3/3} e^t t^{-2/3} dt \right) \quad (2.50)$$

となり、

$$\phi(a, b) \equiv \int_0^b e^t t^{-a} dt \quad (2.51)$$

と定義すれば

$$F(s) = e^{-s^3/3} \left[F(0) + 3^{-1/3} f(+0) \phi\left(\frac{1}{3}, \frac{s^3}{3}\right) + 3^{-2/3} f'(+0) \phi\left(\frac{2}{3}, \frac{s^3}{3}\right) \right] \quad (2.52)$$

となる。

これを逆 Laplace 変換すれば Airy の微分方程式の解になる。

2.5 参考文献

- [本] Norman Bleistein, Ricahard A. Handelsman (1986) *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover, New York.
- [本] F.W.J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- [論文] S.G. Davison, M.L. Glasser (1982) Laplace transforms of Airy functions, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15**, L463–L465.
- [web page] F.W.J. Olver (2019) *Digital Library of Mathmatical Functions, Chapter 9 Airy and Scorer Functions*, <https://dlmf.nist.gov/9>.

第 3 章

Airy 関数の性質

3.1 原点での値

$x = 0$ での第 1 種 Airy 関数 Ai とその微分の値を求める。積分表現 (2.20) を用いるならば

$$\begin{aligned}
 \text{Ai}(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) d\tau \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\tau^3/3} d\tau \\
 \text{Ai}'(0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) d\tau \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) d\tau \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \tau e^{-\tau^3/3} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

となる。ここで、 $\tau = (3t)^{1/3}$ と置けば

$$\begin{aligned}
 \text{Ai}(0) &= \frac{1}{2 \cdot 3^{1/6} \pi} \int_0^\infty t^{-2/3} e^{-t} dt \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 3^{1/6} \pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
 \text{Ai}'(0) &= -\frac{3^{1/6}}{2\pi} \int_0^\infty t^{-1/3} \tau e^{-t} d\tau \\
 &= -\frac{3^{1/6}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\
 &= -\frac{1}{3^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

が得られる。

$x = 0$ での第 2 種 Airy 関数 Bi とその微分の値を求める。積分表現 (2.21) を用いるならば

$$\begin{aligned}
 \text{Bi}(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) - \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] d\tau \\
 &= \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\tau^3/3} d\tau \\
 \text{Bi}'(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) d\tau \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) d\tau \\
 &= \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \tau e^{-\tau^3/3} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる。これらの積分は先ほどの $\text{Ai}(0)$ と $\text{Ai}'(0)$ の計算でできた。それらの結果を用いると、

$$\begin{aligned}
 \text{Bi}(0) &= \frac{3^{1/3}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
 \text{Bi}'(0) &= \frac{3^{2/3}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

が得られる。

3.2 Wronskian

Airy 関数 $\text{Ai}(z)$ と $\text{Bi}(z)$ の Wronskian を考える。定義は

$$\mathscr{W}\{\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)\} \equiv \text{Ai}(z)\text{Bi}'(z) - \text{Bi}(z)\text{Ai}'(z) \tag{3.5}$$

である。いま、

$$\text{Ai}''(z) - z\text{Ai}(z) = 0 \tag{3.6a}$$

$$\text{Bi}''(z) - z\text{Bi}(z) = 0 \tag{3.6b}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathscr{W}\{\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)\}}{dz} &= \text{Ai}(z)\text{Bi}''(z) - \text{Bi}(z)\text{Ai}''(z) \\
 &= z[\text{Ai}(z)\text{Bi}(z) - \text{Bi}(z)\text{Ai}(z)] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

となる。したがって、Wronskian は定数である。とくに $z = 0$ とすると

$$\begin{aligned}
 \mathscr{W}\{\text{Ai}(0), \text{Bi}(0)\} &= \text{Ai}(0)\text{Bi}'(0) - \text{Bi}(0)\text{Ai}'(0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}\Gamma(2/3)\Gamma(1/3)} + \frac{1}{\sqrt{3}\Gamma(2/3)\Gamma(1/3)} \\
 &= \frac{2\sin(\pi/3)}{\sqrt{3}\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ゆえ、

$$\mathscr{W}\{\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)\} = \frac{1}{\pi} \tag{3.9}$$

となる。

3.3 積分

ここでは、 $\int_0^\infty \text{Ai}(x)dx$ 、 $\int_{-\infty}^0 \text{Ai}(x)dx$ 、 $\int_{-\infty}^0 \text{Bi}(x)dx$ の計算をする。

3.3.1 $\int_0^\infty \text{Ai}(x)dx$

まず、最初に計算の失敗例を示し、それからどのようにしたら計算できるかを考えてゆく。
Airy 関数 $\text{Ai}(x)$ の表現 (2.20)

$$\begin{aligned}
 \text{Ai}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^\infty e^{i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{i(2\pi/3)}\tau x\right) d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{-i(2\pi/3)}\tau x\right) d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \text{Ai}(x)dx &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{i(2\pi/3)} \exp\left(e^{i(2\pi/3)}\tau x\right) dx \right\} e^{-\tau^3/3} d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-i(2\pi/3)} \exp\left(e^{-i(2\pi/3)}\tau x\right) dx \right\} e^{-\tau^3/3} d\tau \right] \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^\infty \tau^{-1} e^{-\tau^3/3} d\tau - \int_0^\infty \tau^{-1} e^{-\tau^3/3} d\tau \right] \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} [\infty - \infty] \\
 &= ??
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

のように一見簡単に積分できそうで、0 になったかと思いきや、発散積分が出てきて失敗したことが分かる。

積分が τ の原点で発散するのがまずいので $\text{Ai}(x)$ の積分経路経路 C_1 を $s = \tau e^{-i(2\pi/3)}$ ($\infty > \tau > \epsilon$) $\rightarrow s = \epsilon e^{i\theta}$ ($(4\pi/3) > \theta > (2\pi/3)$) $\rightarrow s = \tau e^{i(2\pi/3)}$ ($\epsilon < \tau < \infty$) のように変える

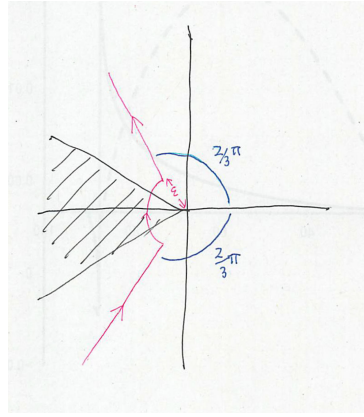


図 3.1 Airy 関数の積分表現の積分経路

(図 3.1)*¹。

$$\begin{aligned}
 \text{Ai}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\infty}^{\epsilon} e^{-i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{-i(2\pi/3)}\tau x\right) d\tau \right. \\
 &\quad + i \int_{4\pi/3}^{2\pi/3} \epsilon e^{i\theta} \exp\left(-\frac{\epsilon^3 e^{3i\theta}}{3} + \epsilon e^{i\theta} x\right) d\theta \\
 &\quad \left. + \int_{\epsilon}^{\infty} e^{i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{i(2\pi/3)}\tau x\right) d\tau \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} e^{i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{-i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{4\pi/3}^{2\pi/3} \epsilon e^{i\theta} \exp\left(-\frac{\epsilon^3 e^{3i\theta}}{3} + \epsilon e^{i\theta} x\right) d\theta
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

*¹ 何となく ϵ が小さいことを想定してはいるが、計算を追っていくと分かるとおり、 ϵ が小さい必要はない。

を用いると、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \text{Ai}(x) dx &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_\epsilon^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{i(2\pi/3)} \exp(e^{i(2\pi/3)} \tau x) dx \right\} e^{-\tau^3/3} d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_\epsilon^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-i(2\pi/3)} \exp(e^{-i(2\pi/3)} \tau x) dx \right\} e^{-\tau^3/3} d\tau \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{4\pi/3}^{2\pi/3} \left\{ \int_0^\infty \epsilon e^{i\theta} \exp(\epsilon e^{i\theta} x) dx \right\} \exp\left(-\frac{\epsilon^3 e^{3i\theta}}{3}\right) d\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \left[\int_\epsilon^\infty \tau^{-1} e^{-\tau^3/3} d\tau - \int_\epsilon^\infty \tau^{-1} e^{-\tau^3/3} d\tau \right] \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{4\pi/3}^{2\pi/3} \exp\left(-\frac{\epsilon^3 e^{3i\theta}}{3}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \left[1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \left(-\frac{\epsilon^3 e^{3i\theta}}{3}\right)^n \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\theta \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。

3.3.2 $\int_{-\infty}^0 \text{Ai}(x) dx$

$\int_0^\infty \text{Ai}(x) dx$ の計算と同じように実行しようとするとう発散が出てくるので、一工夫必要である。

2.2 節で $f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) = 0$ と書いたものは、Ai を用いて書くと

$$\text{Ai}(z) + e^{-(2\pi/3)i} \text{Ai}(ze^{-(2\pi/3)i}) + e^{(2\pi/3)i} \text{Ai}(ze^{(2\pi/3)i}) = 0 \tag{3.14}$$

となる。ここで、 $z = -t = te^{\pi i} = te^{-\pi i}$ と置くと

$$\text{Ai}(-t) + e^{-(2\pi/3)i} \text{Ai}(te^{(\pi/3)i}) + e^{(2\pi/3)i} \text{Ai}(te^{-(\pi/3)i}) = 0 \tag{3.15}$$

となり、これより

$$\begin{aligned}
\text{Ai}(-t) &= - \left[e^{-(2\pi/3)i} \text{Ai}(te^{(\pi/3)i}) + e^{(2\pi/3)i} \text{Ai}(te^{-(\pi/3)i}) \right] \\
&= e^{(\pi/3)i} \text{Ai}(te^{(\pi/3)i}) + e^{-(\pi/3)i} \text{Ai}(te^{-(\pi/3)i}) \\
&= 2\Re \left[e^{(\pi/3)i} \text{Ai}(te^{(\pi/3)i}) \right]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

となる。すると、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \text{Ai}(x) dx &= \int_0^\infty \text{Ai}(-t) dt \\
&= 2\Re \left[\int_0^\infty e^{(\pi/3)i} \text{Ai}(te^{(\pi/3)i}) dt \right] \\
&= 2\Re \left[\int_0^\infty e^{(\pi/3)i} \text{Ai}(t) dt \right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ここで、後に (5.52) で見るように、 $|\arg(t)| \leq \pi/3$ では $\text{Ai}(t)$ は $|t|$ が大きいとき十分に早く小さくなるので、積分経路を変えて

$$\int_{-\infty}^0 \text{Ai}(x)dx = 2\Re \left[\int_0^{\infty} \text{Ai}(t)dt \right] \quad (3.18)$$

としてかまわない。右辺のカッコの中の積分は、(3.13) のように $1/3$ であったから

$$\int_{-\infty}^0 \text{Ai}(x)dx = \frac{2}{3} \quad (3.19)$$

である。

3.3.3 $\int_{-\infty}^0 \text{Bi}(x)dx$

$\int_0^{\infty} \text{Ai}(x)dx$ の計算と同じように実行しようとするときやはり発散が出てくるので、一工夫必要である。

ここでは Bi と Bessel 関数との関係 (2.44b)

$$\text{Bi}(-x) = \sqrt{\frac{x}{3}} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) - J_{1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) \right] \quad (3.20)$$

を用いる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \text{Bi}(x)dx &= \int_0^{\infty} \text{Bi}(-x)dx \\ &= \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{x}{3}} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) - J_{1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) \right] dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで、 $\xi = (2/3)x^{3/2}$ と置けば、

$$\int_{-\infty}^0 \text{Bi}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} [J_{-1/3}(\xi) - J_{1/3}(\xi)] d\xi \quad (3.22)$$

となる。Bessel 関数の積分 $\int_0^{\infty} J_{\nu}(t)dt = 1$ ($\Re \nu > -1$) を用いれば、

$$\int_{-\infty}^0 \text{Bi}(x)dx = 0 \quad (3.23)$$

である。

3.4 参考文献

- [本] F.W.J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.

第 4 章

Scorer 関数の定義とさまざまな表式

4.1 非斉次 Airy の微分方程式

Scorer 関数は、次の微分方程式の特解である。

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - zf = \frac{1}{\pi} \quad (4.1)$$

4.2 非斉次 Airy の微分方程式の拡張された逆 Laplace 変換による解

斉次の Airy 関数と同様、拡張された逆 Laplace 変換で解を求めることを考える。

非斉次 Airy の微分方程式の解をやはり

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c F(s) e^{sz} ds \quad (4.2)$$

の形に置く。積分経路 c はあとで都合の良いように決めることにする。参考までに通常の Laplace 変換の反転公式は

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s) e^{sz} ds \quad (4.3)$$

である。ここでは、積分経路を後から決める。

さて、式 (4.2) を非斉次 Airy の微分方程式 (4.1) に形式的に代入すると

$$\int_c (s^2 - z) F(s) e^{sz} ds = 2i \quad (4.4)$$

となる。部分積分を一回すると

$$- F(s) e^{sz} |_c + \int_c \left[s^2 F(s) + \frac{dF}{ds} \right] e^{sz} ds = 2i \quad (4.5)$$

が得られる。ここで、第 1 項は c の経路の両端での値の差を表すものとする。もしそれが $2i$ になるように選ぶことができ、かつ

$$\frac{dF}{ds} + s^2 F = 0 \quad (4.6)$$

が満たされていれば、解になる。この微分方程式の解は

$$F = ke^{-s^3/3} \quad (4.7)$$

である (k は任意定数)。ここで、積分経路を図 4.1 にあるように、原点から出発する c_1, c_2, c_3 のいずれかに選んで、 $k = 2i$ にすれば、(4.5) は満たされることになる。

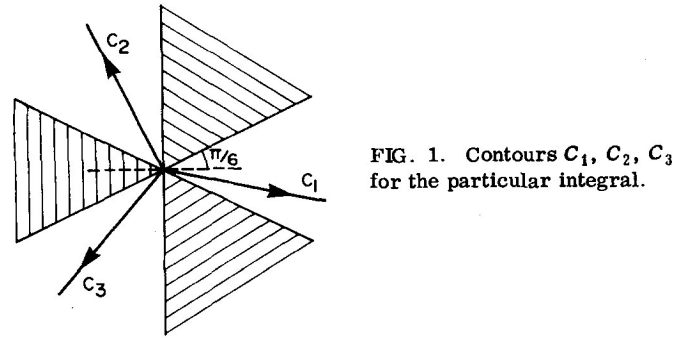


図 4.1 Scorer 関数の積分表現の積分経路 (Lee, 1980)

このようにして、非斉次 Airy 微分方程式 (4.1) の解が 3 つ得られた。

$$w_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{c_n} e^{-s^3/3+sz} ds \quad n = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

標準的な解は、 $\text{Hi}(z)$ と $-\text{Gi}(z)$ で、それぞれ

$$\text{Hi}(z) = w_1(z) \quad (4.9a)$$

$$\text{Gi}(z) = -\frac{1}{2}[w_2(z) + w_3(z)] \quad (4.9b)$$

と定義される。これらを Scorer 関数という。

以前、斉次 Airy 微分方程式を解くときに定義した $f_n(z)$ (式 (2.13)) と上の w_n の関係は、

$$2if_1(z) = w_2(z) - w_3(z) \quad (4.10a)$$

$$2if_2(z) = w_1(z) - w_2(z) \quad (4.10b)$$

$$2if_3(z) = w_3(z) - w_1(z) \quad (4.10c)$$

となっている。とくに

$$\text{Bi}(z) = i[f_2(z) - f_3(z)] = w_1(z) - \frac{1}{2}[w_2(z) + w_3(z)] = \text{Hi}(z) + \text{Gi}(z) \quad (4.11)$$

の関係がある。

4.2.1 積分経路としてセクターの中央を通す場合

積分経路としては、図 4.1 の各セクターの中央を通してしまおうのが、積分の収束性が良い。これが代表的な表現になる。

$\text{Hi}(z)$ の場合は、経路 c_1 を実軸に取ることになる。すると、 $s = \tau$ ($0 < \tau < \infty$) として

$$\text{Hi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) d\tau \quad (4.12)$$

となる。これが非斉次 Airy 微分方程式 (4.1) を満たしているのは、求め方からして当然だが、念のため改めて直接代入してみると、

$$\begin{aligned} \text{Hi}''(z) - z\text{Hi}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\tau^2 - z) \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{\tau^3}{3} + z\tau\right) \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned} \quad (4.13)$$

となって方程式を満たしていることが分かる。

$\text{Gi}(z)$ の場合は、経路 c_2 を $s = \tau e^{i(2\pi/3)}$ ($0 < \tau < \infty$)、経路 c_3 を $s = \tau e^{-i(2\pi/3)}$ ($0 < \tau < \infty$) として

$$\begin{aligned} \text{Gi}(z) &= -\frac{1}{2\pi} \left[e^{i(2\pi/3)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(2\pi/3)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{-i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\tau z + \frac{2\pi}{3}i\right) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\tau z - \frac{2\pi}{3}i\right) d\tau \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} - \frac{1}{2}\tau z\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau z + \frac{2\pi}{3}\right) d\tau \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。

これらの表式から z が実数 x のときは $\text{Hi}(x)$ は指数関数的、 $\text{Gi}(x)$ は振動的であると見当が付く。

4.2.2 実引数の Scorer 関数 $\text{Gi}(x)$

実引数の場合は、 $\text{Ai}(x)$ や $\text{Bi}(x)$ で考えたように、 $\text{Gi}(x)$ の積分をするときの積分路 c_2, c_3 を虚軸に取ることも考えられる。積分の収束性は悪いけれども、きれいな形に書ける。経路 c_2 を $s = i\tau$ ($0 < \tau < \infty$)、経路 c_3 を $s = -i\tau$ ($0 < \tau < \infty$) にとると、

$$\begin{aligned} \text{Gi}(x) &= -\frac{i}{2\pi} \left[\int_0^\infty \exp\left(i\frac{\tau^3}{3} + i\tau x\right) d\tau - \int_0^\infty \exp\left(-i\frac{\tau^3}{3} - i\tau x\right) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin\left(\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) d\tau \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。

4.3 Scorer 関数の簡単に分かる性質

4.3.1 原点での値

$x = 0$ での Scorer 関数 Hi とその微分の値を求める。積分表現 (4.12) を用いるならば

$$\begin{aligned}\text{Hi}(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Ai}(0) = \frac{2}{3^{7/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\ \text{Hi}'(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Ai}(0) = \frac{2}{3^{5/6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\end{aligned}\quad (4.16)$$

を得る。

$x = 0$ での Scorer 関数 Gi とその微分の値を求める。積分表現 (4.14) を用いるならば

$$\begin{aligned}\text{Gi}(0) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{7/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\ \text{Gi}'(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) d\tau + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tau \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{5/6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\end{aligned}\quad (4.17)$$

を得る。

4.4 非斉次 Airy の微分方程式の定数変化法による解

非斉次 Airy の微分方程式を、定数変化法の定石通り解いてみるのもある。まず、斉次方程式の解は $\text{Ai}(z)$ と $\text{Bi}(z)$ である。

次に、微分方程式 (4.1) を次の連立 1 階の方程式とみなす。

$$\frac{df}{dt} - g = 0 \quad (4.18a)$$

$$\frac{dg}{dt} - zf = \frac{1}{\pi} \quad (4.18b)$$

それで、定石通り f, g から u, v への変数変換を行う。

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ g(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ai}(z) & \text{Bi}(z) \\ \text{Ai}'(z) & \text{Bi}'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

これを連立微分方程式に代入すると

$$\begin{pmatrix} \text{Ai}(z) & \text{Bi}(z) \\ \text{Ai}'(z) & \text{Bi}'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du/dz \\ dv/dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\pi \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

を得る。これを解けば

$$\begin{pmatrix} du/dz \\ dv/dz \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{W}\{\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)\}} \begin{pmatrix} \text{Bi}'(z) & -\text{Bi}(z) \\ -\text{Ai}'(z) & \text{Ai}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\pi \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

となる。(3.9) を代入すると、

$$\begin{pmatrix} du/dz \\ dv/dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{Bi}(z) \\ \text{Ai}(z) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

となる。積分すれば、

$$u(z) = - \int \text{Bi}(z) dz \quad (4.23a)$$

$$v(z) = \int \text{Ai}(z) dz \quad (4.23b)$$

である。したがって、微分方程式 (4.1) の解は

$$f(z) = -\text{Ai}(z) \int \text{Bi}(z) dz + \text{Bi}(z) \int \text{Ai}(z) dz \quad (4.24)$$

となる。

z が実数 x のとき、微分方程式の標準的な解は $-\text{Gi}(x)$ と $\text{Hi}(x)$ であった。これらが、それぞれ

$$\text{Gi}(x) = \text{Ai}(x) \int_0^x \text{Bi}(t) dt + \text{Bi}(x) \int_x^\infty \text{Ai}(t) dt \quad (4.25a)$$

$$\text{Hi}(x) = -\text{Ai}(x) \int_{-\infty}^x \text{Bi}(t) dt + \text{Bi}(x) \int_{-\infty}^x \text{Ai}(t) dt \quad (4.25b)$$

と書けることを示そう。これらは 2 階の微分方程式を満たしているのだから、 $\text{Gi}(0)$ 、 $\text{Gi}'(0)$ 、 $\text{Hi}(0)$ 、 $\text{Hi}'(0)$ が 4.3.1 節で求められた値になっていれば良い。上の表式と 3.1、3.3 節の結果からこれらの量を計算すると、

$$\text{Gi}(0) = \text{Bi}(0) \int_0^\infty \text{Ai}(t) dt = \frac{1}{3^{7/6} \Gamma(\frac{2}{3})} \quad (4.26a)$$

$$\text{Gi}'(0) = \text{Ai}(0)\text{Bi}(0) + \text{Bi}'(0) \int_0^\infty \text{Ai}(t) dt - \text{Bi}(0)\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{5/6} \Gamma(\frac{1}{3})} \quad (4.26b)$$

$$\text{Hi}(0) = -\text{Ai}(0) \int_{-\infty}^0 \text{Bi}(t) dt + \text{Bi}(0) \int_{-\infty}^0 \text{Ai}(t) dt = \frac{2}{3^{7/6} \Gamma(\frac{2}{3})} \quad (4.26c)$$

$$\text{Hi}'(0) = -\text{Ai}'(0) \int_{-\infty}^0 \text{Bi}(t) dt - \text{Ai}(0)\text{Bi}(0) + \text{Bi}'(0) \int_{-\infty}^0 \text{Ai}(t) dt + \text{Bi}(0)\text{Ai}(0) \quad (4.26d)$$

$$= \frac{2}{3^{5/6} \Gamma(\frac{1}{3})} \quad (4.26e)$$

となり 4.3.1 節で求められた値に一致することがわかる。したがって、(4.25) の表式が正しいことが分かった。

4.5 非斉次 Airy の微分方程式の Laplace 変換による解

参考までに、あまり見かけない形だが、非斉次 Airy の微分方程式の解を素直に Laplace 変換によって解くことを考える。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(z)] = \int_0^\infty e^{-sz} f(z) dz \quad (4.27)$$

とする。微分方程式の Laplace 変換は、微分法則と像の微分法則を用いると

$$s^2 F(s) - f(+0)s - f'(+0) + \frac{dF}{ds} = \frac{1}{\pi s} \quad (4.28)$$

となる。項を入れ替えると

$$\frac{dF}{ds} + s^2 F(s) = f(+0)s + f'(+0) + \frac{1}{\pi s} \quad (4.29)$$

となり、両辺に $e^{s^3/3}$ を掛けると

$$\frac{d}{ds} \left[e^{s^3/3} F \right] = e^{s^3/3} \left[f(+0)s + f'(+0) + \frac{1}{\pi s} \right] \quad (4.30)$$

である。これを $\epsilon (> 0)$ から s まで積分すると（後で出てくる積分 ϕ が $\epsilon = 0$ にすると発散するので、積分の下限は適当な正の数にした。）

$$F(s) = e^{-s^3/3} \left(F(\epsilon) + \int_\epsilon^s e^{s'^3/3} \left[f(+0)s' + f'(+0) + \frac{1}{\pi s'} \right] ds' \right) \quad (4.31)$$

が得られる。ここで、 $t = s'^3/3$ と置くと、

$$\begin{aligned} F(s) = e^{-s^3/3} & \left(F(\epsilon) + 3^{-1/3} f(+0) \int_{\epsilon^3/3}^{s^3/3} e^t t^{-1/3} dt \right. \\ & \left. + 3^{-2/3} f'(+0) \int_{\epsilon^3/3}^{s^3/3} e^t t^{-2/3} dt + \frac{1}{3\pi} \int_{\epsilon^3/3}^{s^3/3} e^t t^{-1} dt \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

となり、

$$\phi(a, b, c) \equiv \int_c^b e^t t^{-a} dt \quad (4.33)$$

と定義すれば

$$\begin{aligned} F(s) = e^{-s^3/3} & \left[F(\epsilon) + 3^{-1/3} f(+0) \phi \left(\frac{1}{3}, \frac{s^3}{3}, \frac{\epsilon^3}{3} \right) \right. \\ & \left. + 3^{-2/3} f'(+0) \phi \left(\frac{2}{3}, \frac{s^3}{3}, \frac{\epsilon^3}{3} \right) + \frac{1}{3\pi} \phi \left(1, \frac{s^3}{3}, \frac{\epsilon^3}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる。

これを逆 Laplace 変換すれば非斉次 Airy の微分方程式の解になる。

4.6 参考文献

- [本] Norman Bleistein, Richard A. Handelsman (1986) *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover, New York.
- [本] F.W.J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- [論文] S.G. Davison, M.L. Glasser (1982) Laplace transforms of Airy functions, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15**, L463–L465.
- [論文] Soo-Y. Lee (1980) The inhomogeneous Airy functions, $\text{Gi}(z)$ and $\text{Hi}(z)$, *J. Chem. Phys.*, **72**, 332–336.
- [web page] F.W.J. Olver (2019) *Digital Library of Mathematical Functions*, Chapter 9 Airy and Scorer Functions, <https://dlmf.nist.gov/9>.

第 5 章

Airy 関数のさまざまな計算法

5.1 $|z|$ が小さいときの Maclaurin 展開

式 (2.20) の表現を用いて Airy 関数 $\text{Ai}(z)$ の Maclaurin 展開をする。

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^\infty e^{i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right. \\ \left. - \int_0^\infty e^{-i(2\pi/3)} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + e^{-i(2\pi/3)}\tau z\right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

より、

$$\text{Ai}^{(n)}(0) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{2(n+1)}{3}\pi\right) \int_0^\infty \tau^n e^{-\tau^3/3} d\tau \quad (5.2)$$

ここで、 $t = \tau^3/3$ と置けば、 $\tau = (3t)^{1/3}$ ゆえ

$$\begin{aligned} \text{Ai}^{(n)}(0) &= \frac{3^{(n-2)/3}}{\pi} \sin\left(\frac{2(n+1)}{3}\pi\right) \int_0^\infty t^{(n-2)/3} e^{-t} dt \\ &= \frac{3^{(n-2)/3}}{\pi} \sin\left(\frac{2(n+1)}{3}\pi\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる。これより

$$\text{Ai}^{(3n)}(0) = \frac{3^n}{3^{2/3}\pi} \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) = (3n-2)(3n-5)\cdots 4 \cdot 1 \text{Ai}(0) \quad (5.4a)$$

$$\text{Ai}^{(3n+1)}(0) = \frac{3^n}{3^{1/3}\pi} \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right) = (3n-1)(3n-4)\cdots 5 \cdot 2 \text{Ai}'(0) \quad (5.4b)$$

$$\text{Ai}^{(3n+2)}(0) = 0 \quad (5.4c)$$

を得る。ここで、

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}\pi} \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \quad (5.5a)$$

$$\text{Ai}'(0) = \frac{1}{3^{1/3}\pi} \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (5.5b)$$

である。そこで Maclaurin 展開は

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) = & \text{Ai}(0) \left(1 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}z^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}z^9 + \cdots \right) \\ & + \text{Ai}'(0) \left(z + \frac{2}{4!}z^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!}z^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!}z^{10} + \cdots \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

となる。

5.2 $|z|$ が大きいときの鞍点法による評価

5.2.1 実引数の Airy 関数

Airy 関数の積分表示は

$$f_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} e^{-\zeta^3/3 + s\zeta} d\zeta \quad n = 1, 2, 3 \quad (5.7)$$

であった。ここで、積分経路 C_n は図 2.1 に示されている。まずは、 s は実数としておいて、 $s \rightarrow \infty$ の極限を考える。

いま、 $\zeta = \sqrt{s}z$ として積分変数を ζ から z に取り替える。すると、

$$f_n(s) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi i} \int_{C_n} e^{s^{3/2}(z - z^3/3)} dz \quad (5.8)$$

となる。Cauchy の定理により、積分経路は元のままでよい。ここで、 $\lambda = s^{3/2}$ と置いて、次の関数を導入する。

$$I_n(\lambda) = f_n(s) = \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi i} \int_{C_n} e^{\lambda w(z)} dz \quad (5.9)$$

ここで、

$$w(z) = z - \frac{z^3}{3} \quad (5.10)$$

である。これを鞍点法で評価する。

まず、鞍点を見つける。

$$w'(z) = 1 - z^2 \quad (5.11)$$

$$w''(z) = -2z \quad (5.12)$$

ゆえ、鞍点は $z = \pm 1$ である。そこでは、

$$w(\pm 1) = \pm \frac{2}{3} \quad (5.13)$$

$$w''(\pm 1) = \mp 2 \quad (5.14)$$

となっている。

$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 、 $z = x + iy$ (u, v, x, y は実数) とすると、

$$u(x, y) = x - \frac{x^3 - 3xy^2}{3} = -x \left(\frac{x^2}{3} - y^2 - 1 \right) \quad (5.15)$$

$$v(x, y) = y - \frac{3x^2y - y^3}{3} = -y \left(x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 \right) \quad (5.16)$$

となる。鞍点では

$$v(\pm 1, 0) = 0 \quad (5.17)$$

ゆえ、鞍点を通る最急降下・上昇線は

$$v(x, y) = -y \left(x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 \right) = 0 \quad (5.18)$$

で表される。すなわち、 $y = 0$ の直線と $x^2 - y^2/3 = 1$ の双曲線からなる (図 5.1)。このことを踏まえて、鞍点から見た u の谷や山の部分を描いたものが図 5.2 で、鳥瞰図として u の形を描いたものが図 5.3 である。

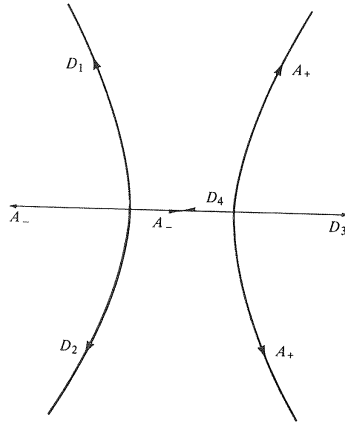


Figure 7.1.4.

図 5.1 Airy 積分の指数部の実部の鞍点を通る最急降下 (D)・上昇 (A) 線 (Bleistein and Handelsman, 1986)

これらの図から I_n を計算するための経路 C_n は、以下のように置き換えればよいことが分かる。 C_1 は $D_1 - D_2$ に、 C_2 は、 $D_3 - D_1 - D_4$ に C_3 は $D_2 + D_4 - D_3$ に置き換える。そこで、

$$I^j(\lambda) \equiv \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi i} \int_{D_j} e^{\lambda w(z)} dz \quad (5.19)$$

と定義すれば、

$$I_1(\lambda) = I^1(\lambda) - I^2(\lambda) \quad (5.20a)$$

$$I_2(\lambda) = I^3(\lambda) - I^1(\lambda) - I^4(\lambda) \quad (5.20b)$$

$$I_3(\lambda) = I^2(\lambda) + I^4(\lambda) - I^3(\lambda) \quad (5.20c)$$

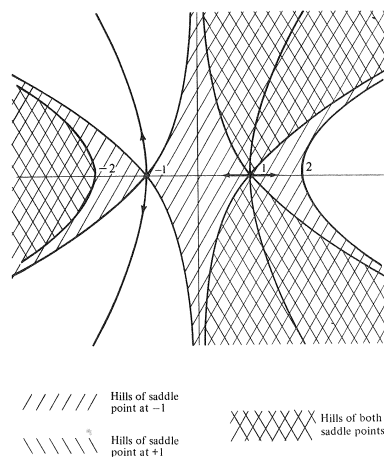
Figure 7.1.5. Hills and Valleys of $z - z^3/3$.

図 5.2 Airy 積分の指数部の実部の鞍点から見た山や谷の部分 (Bleistein and Handelsman, 1986)

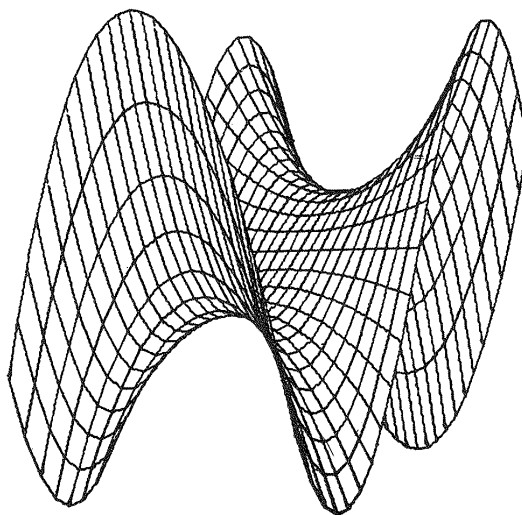


Figure 7.1.6. The Surface

$$u = \operatorname{Re}\left(z - \frac{z^3}{3}\right) = x\left(y^2 - \frac{x^2}{3} + 1\right),$$

Viewed from a Point in the Third Quadrant of the (x, y) Plane. (Computer plot by PUREJOY, provided by ERDA Mathematics and Computing Laboratory at Courant Institute of Mathematical Sciences at New York University and modified for implementation at the University of Denver by Louis Krupp.)

図 5.3 Airy 積分の指数部の実部の鞍点から見た山や谷の部分 (Bleistein and Handelsman, 1986)

となる。

以下、 I^j を評価してゆく。

1. $j = 1$ の場合 : $z = -1 + it$ と置く。すると、

$$\begin{aligned} I^1(\lambda) &= \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi} \int_0^\infty e^{\lambda(-\frac{2}{3}-t^2+\frac{i}{3}t^3)} dt \\ &\approx \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi} e^{-(2/3)\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t^2} dt \\ &= \frac{\lambda^{-1/6}}{4\sqrt{\pi}} e^{-(2/3)\lambda} \end{aligned} \quad (5.21)$$

2. $j = 2$ の場合 : やはり $z = -1 + it$ と置く。すると、

$$\begin{aligned} I^2(\lambda) &= \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi} \int_0^{-\infty} e^{\lambda(-\frac{2}{3}-t^2+\frac{i}{3}t^3)} dt \\ &\approx \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi} e^{-(2/3)\lambda} \int_0^{-\infty} e^{-\lambda t^2} dt \\ &= -\frac{\lambda^{-1/6}}{4\sqrt{\pi}} e^{-(2/3)\lambda} \end{aligned} \quad (5.22)$$

3. $j = 3$ の場合 : $z = 1 + t$ と置く。すると、

$$\begin{aligned} I^3(\lambda) &= \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi i} \int_0^\infty e^{\lambda(\frac{2}{3}-t^2-\frac{1}{3}t^3)} dt \\ &\approx \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi i} e^{(2/3)\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t^2} dt \\ &= \frac{\lambda^{-1/6}}{4\sqrt{\pi}i} e^{(2/3)\lambda} \end{aligned} \quad (5.23)$$

4. $j = 4$ の場合 : やはり $z = 1 + t$ と置く。すると、

$$\begin{aligned} I^4(\lambda) &= \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi i} \int_0^{-\infty} e^{\lambda(\frac{2}{3}-t^2-\frac{1}{3}t^3)} dt \\ &\approx \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi i} e^{(2/3)\lambda} \int_0^{-\infty} e^{-\lambda t^2} dt \\ &= -\frac{\lambda^{-1/6}}{4\sqrt{\pi}i} e^{(2/3)\lambda} \end{aligned} \quad (5.24)$$

この結果

$$I_1(\lambda) = I^1(\lambda) - I^2(\lambda) \approx \frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} e^{-(2/3)\lambda} \quad (5.25a)$$

$$I_2(\lambda) = I^3(\lambda) - I^1(\lambda) - I^4(\lambda) \approx I^3(\lambda) - I^4(\lambda) \approx \frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}i} e^{(2/3)\lambda} \quad (5.25b)$$

$$I_3(\lambda) = I^2(\lambda) + I^4(\lambda) - I^3(\lambda) \approx I^4(\lambda) - I^3(\lambda) \approx -\frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}i} e^{(2/3)\lambda} \quad (5.25c)$$

となり、

$$\text{Ai}(s) = f_1(s) = I_1(\lambda) \approx \frac{s^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-(2/3)s^{3/2}} \quad (5.26a)$$

$$\text{Bi}(s) = i[f_2(s) - f_3(s)] = i[I_2(\lambda) - I_3(\lambda)] \approx \frac{s^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} e^{(2/3)s^{3/2}} \quad (5.26b)$$

が得られる。

5.2.2 複素指数の第 1 種 Airy 関数

次に、引数が複素数の Airy 関数について同様の漸近評価を行う。ただし、第 1 種関数 Ai に限る。複素指数で考えていれば、式 (2.18) のように第 2 種関数 Bi も Ai で表せるので、Ai だけ考えておけば十分である。

Airy 関数の積分表示は

$$f_1(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{-\zeta^3/3 + s\zeta} d\zeta \quad n = 1, 2, 3 \quad (5.27)$$

であった。ここで、積分経路 C_1 は図 2.1 に示されている。これは、複素指数の場合も同じである。

s を複素数として、その極表示は

$$s = |s|e^{i\theta} \quad (5.28)$$

である。 $|s| \rightarrow \infty$ の極限を考える。いま、 $\zeta = \sqrt{|s|}z$ として積分変数を ζ から z に取り替える。すると、

$$f_1(s) = \frac{\sqrt{|s|}}{2\pi i} \int_{C_1} e^{|s|^{3/2}(ze^{i\theta} - z^3/3)} dz \quad (5.29)$$

となる。Cauchy の定理により、積分経路は元のままでよい。ここで、 $\lambda = |s|^{3/2}$ と置いて、次の関数を導入する。

$$I_1(\lambda; \theta) = f_1(s) = \frac{\lambda^{1/3}}{2\pi i} \int_{C_1} e^{\lambda w(z; \theta)} dz \quad (5.30)$$

ここで、

$$w(z; \theta) = ze^{i\theta} - \frac{z^3}{3} \quad (5.31)$$

である。これを鞍点法で評価する。

まず、鞍点を見つける。

$$w'(z; \theta) = e^{i\theta} - z^2 \quad (5.32)$$

$$w''(z; \theta) = -2z \quad (5.33)$$

ゆえ、鞍点は

$$z = z_{\pm} = \pm e^{i\theta/2} \quad (5.34)$$

である。そこでは、

$$w(z_{\pm}; \theta) = \pm \frac{2}{3} e^{(3/2)i\theta} \quad (5.35)$$

$$w''(z_{\pm}) = \mp 2e^{i\theta/2} \quad (5.36)$$

となっている。

$w(z; \theta) = u(x, y; \theta) + iv(x, y; \theta)$ 、 $z = x + iy$ (u, v, x, y は実数) とすると、

$$u(x, y) = x \cos \theta - y \sin \theta - \frac{x^3 - 3xy^2}{3} \quad (5.37)$$

$$v(x, y) = y \cos \theta + x \sin \theta - \frac{3x^2y - y^3}{3} \quad (5.38)$$

となる。鞍点では

$$v\left(\pm \cos \frac{\theta}{2}, \pm \sin \frac{\theta}{2}\right) = \pm \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (5.39)$$

ゆえ、鞍点を通る最急降下・上昇線は

$$v(x, y) = y \cos \theta + x \sin \theta - \frac{3x^2y - y^3}{3} = \pm \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (5.40)$$

で表される。これは簡単には解けないので、定性的に考えてゆく。実際、あまり細かい曲線の形は計算に必要ない。

まず、鞍点から最急降下の方向は w の Taylor 展開の第 2 項

$$\frac{1}{2} w''(z_{\pm})(z - z_{\pm})^2 = \mp e^{i\theta/2}(z - z_{\pm})^2 \quad (5.41)$$

が $|z - z_{\pm}|$ とともに小さくなる方向だから

$$\arg(z - z_{+}) = -\frac{\theta}{4}, -\frac{\theta}{4} + \pi \quad (5.42)$$

$$\arg(z - z_{-}) = -\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{2}, -\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2} \quad (5.43)$$

ということになる。次に u の山谷の様子は、 ∇u

$$\nabla u = (u_x, u_y) = (y^2 - x^2 + \cos \theta, 2xy - \sin \theta) \quad (5.44)$$

の符号から分かる。

まず、 $0 < \theta < \pi/2$ とする。 u_x は双曲線

$$x^2 - y^2 = \cos \theta \quad (5.45)$$

の 2 つの曲線の外側では負、間では正である。 u_y は双曲線

$$2xy = \sin \theta \quad (5.46)$$

の 2 つの曲線の外側では正、間では負である。鞍点はそれらの双曲線の交点にある。この状況を図示したのが図 5.4 である。積分経路 C_1 は鞍点を通る $D_1 - D_2$ に変形できる。

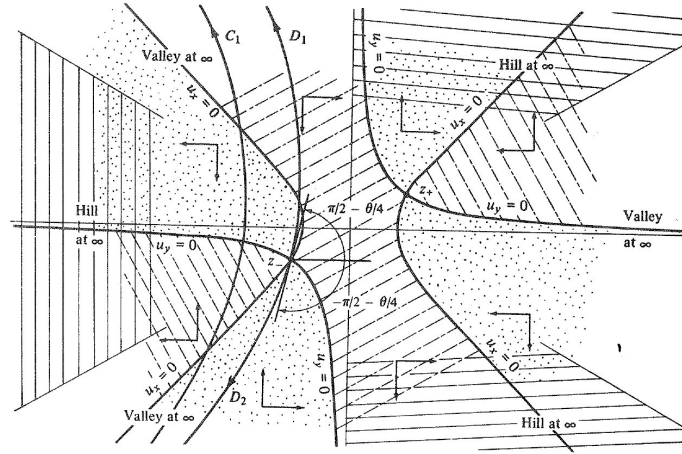
Figure 7.3.1. $0 < \theta < \pi/2$.

図 5.4 Airy 積分の指数部の実部の鞍点と山や谷の様子。引数の偏角が $0 < \theta < \pi/2$ の場合。(Bleistein and Handelsman, 1986)

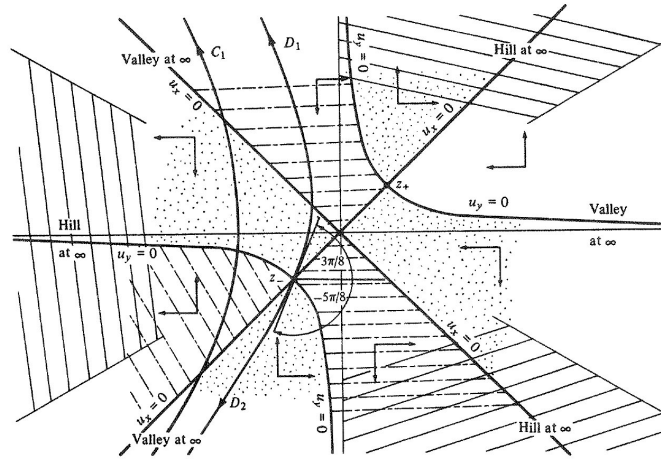
Figure 7.3.2. $\theta = \pi/2$.

図 5.5 Airy 積分の指数部の実部の鞍点と山や谷の様子。引数の偏角が $\theta = \pi/2$ の場合。(Bleistein and Handelsman, 1986)

$\theta = \pi/2$ のときは双曲線 (5.45) が斜め 45 度の直線に変わる。あとは、 $0 < \theta < \pi/2$ のときと同様。この状況を図示したのが図 5.5 である。

$\pi/2 < \theta < \pi$ のときは双曲線 (5.45) の焦点が鉛直軸上に来る。 u_x は双曲線の 2 つの曲線の外側では正、間では負である。あとは、 $0 < \theta < \pi/2$ のときと同様。この状況を図示したのが図 5.6 である。

$\theta = \pi$ のときは双曲線 (5.46) が x 軸と y 軸になる。このときはこれまでとは違って、積分経路 C_1 を鞍点 z_- のみを通るようには変形できず、鞍点 z_- と z_+ の両方を通さないといけない。経路は $-D_2 + D_1 - D_4 + D_3$ のように変形される。この状況を図示したのが図 5.7 である。

そういうわけで、Airy 関数 $\text{Ai}(s)$ の漸近形は $|\theta| = |\arg(s)| < \pi$ のときと $\theta = \arg(s) = \pi$ の

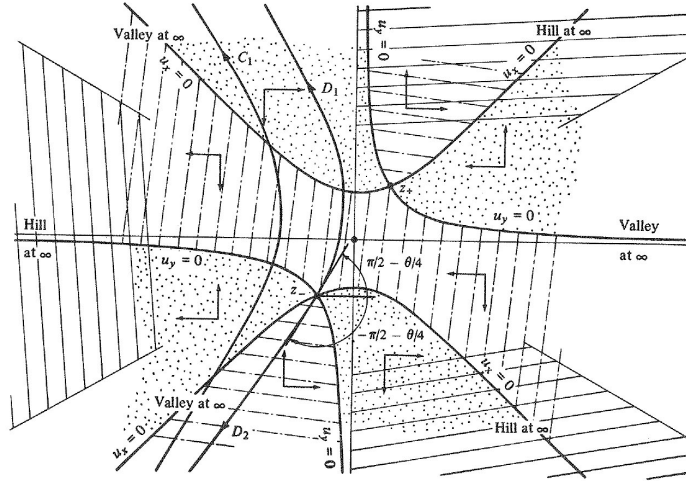
Figure 7.3.3. $\pi/2 < \theta < \pi$.

図 5.6 Airy 積分の指数部の実部の鞍点と山や谷の様子。引数の偏角が $\pi/2 < \theta < \pi$ の場合。(Bleistein and Handelsman, 1986)

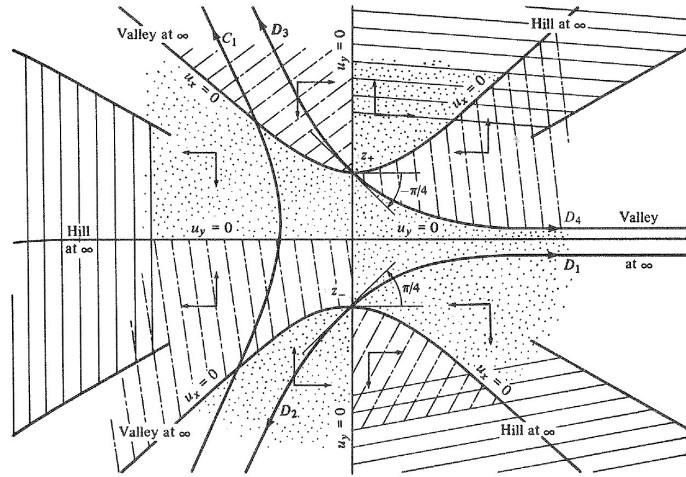
Figure 7.3.4. $\theta = \pi$.

図 5.7 Airy 積分の指数部の実部の鞍点と山や谷の様子。引数の偏角が $\theta = \pi$ の場合。(Bleistein and Handelsman, 1986)

ときで異なる。それぞれ評価してゆく。 $|\theta| < \pi$ のときは、

$$z = z_- + te^{i(\pi/2 - \theta/4)} = -e^{i\theta/2} + te^{i(\pi/2 - \theta/4)} \quad (5.47)$$

と置いて

$$\begin{aligned} I_1(\lambda; \theta) &\approx \frac{\lambda^{1/3} e^{i(\pi/2 - \theta/4)}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \lambda \left[-\frac{2}{3} e^{(3/2)i\theta} - t^2 \right] \right\} dz \\ &= \frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{2}{3} \lambda e^{(3/2)i\theta} - \frac{i}{4} \theta \right\} \end{aligned} \quad (5.48)$$

となる。 $\theta = \pi$ のときは、2つの鞍点からの寄与があり、それぞれ

$$z = z_- + te^{i\pi/4} = -i + te^{i\pi/4} \quad (5.49a)$$

$$z = z_+ + te^{i(3/4)\pi} = i + te^{i(3/4)\pi} \quad (5.49b)$$

と置いて評価する。

$$\begin{aligned} I_1(\lambda; \theta) &\approx \frac{\lambda^{1/3} e^{i\pi/4}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \lambda \left[\frac{2}{3}i - t^2 \right] \right\} dz \\ &\quad + \frac{\lambda^{1/3} e^{i(3/4)\pi}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \lambda \left[-\frac{2}{3}i - t^2 \right] \right\} dz \\ &= \frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left(\frac{2}{3}i\lambda - \frac{i}{4}\pi \right) + \frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{2}{3}i\lambda + \frac{i}{4}\pi \right) \\ &= \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[i \left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \exp \left[-i \left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} \sin \left(\frac{2}{3}\lambda + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

となる。

$$\lambda = |s|^{3/2} \quad (5.51a)$$

$$\lambda e^{(3/2)i\theta} = s^{3/2} \quad (5.51b)$$

$$\lambda^{-1/6} e^{-i\theta/4} = s^{-1/4} \quad (5.51c)$$

を用いれば、Airy 関数の $|s| \rightarrow \infty$ における漸近形は

$$\text{Ai}(s) \rightarrow \frac{s^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{2}{3}s^{3/2} \right\} \quad (|\arg(s)| < \pi) \quad (5.52a)$$

$$\text{Ai}(s) \rightarrow \frac{|s|^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin \left(\frac{2}{3}|s|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\arg(s) = \pi) \quad (5.52b)$$

となる。これを用いて Airy 関数の振る舞いをまとめたものが図 5.8 である。これに基づいて、複素指数の Airy 関数を考えるときは定義域を図 5.9 のようなセクターに分けて考える。

- $\text{Ai}(z)$ は $\mathbf{S}_0$ で recessive、 $\mathbf{S}_1$ と $\mathbf{S}_{-1}$ とで dominant である。 $\mathbf{S}_1$ と $\mathbf{S}_{-1}$ の境目が Stokes line で、遠方で漸近形が異なる。
- $\text{Ai}_1(z)$ は $\text{Ai}(z)$ を左に $2\pi/3$ 回したものだから、 $\mathbf{S}_1$ で recessive、 $\mathbf{S}_0$ と $\mathbf{S}_{-1}$ とで dominant である。
- $\text{Ai}_{-1}(z)$ は $\text{Ai}(z)$ を右に $2\pi/3$ 回したものだから、 $\mathbf{S}_{-1}$ で recessive、 $\mathbf{S}_0$ と $\mathbf{S}_1$ とで dominant である。

さらに $\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_{-1}$ のように書けば、上のことはまとめて、以下のように書ける。 $\text{Ai}_j(z)$ は $\mathbf{S}_j$ で recessive、 $\mathbf{S}_{j-1}$ と $\mathbf{S}_{j+1}$ とで dominant である。 $\mathbf{S}_{j-1}$ と $\mathbf{S}_{j+1}$ の境目が Stokes line で、遠

方で漸近形が異なる。そして、 $Ai_j(z)$ と $Ai_{j+1}(z)$ は $S_j \cup S_{j+1}$ で数値的に満足な解の対をなす。

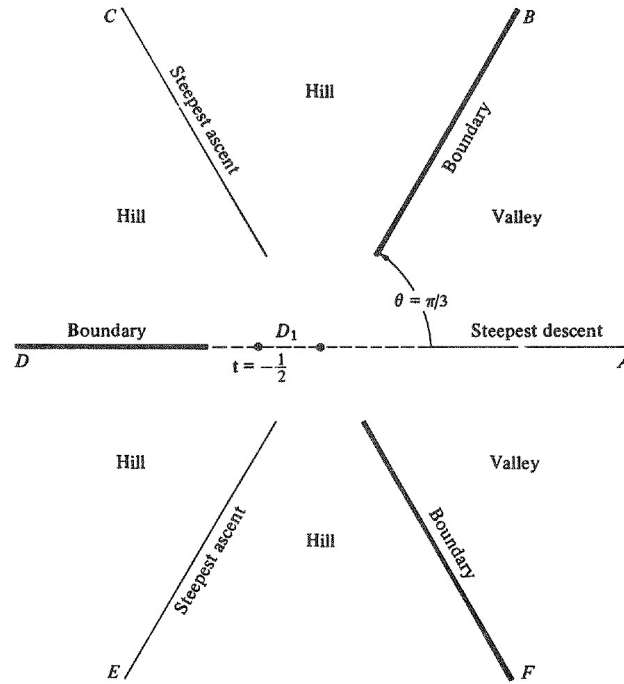
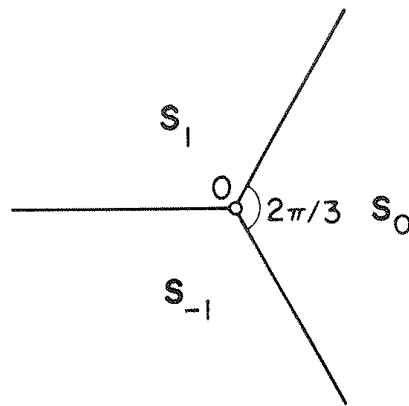


Figure 7.7.7.

図 5.8 複素指数の Airy 関数 $Ai(s)$ の s による振る舞いの変化のまとめ。(Bleistein and Handelsman, 1986)

Fig. 8.1 Sectors S_j .図 5.9 複素指数の Airy 関数 $Ai(z)$ を考えるためのセクター。(Olver, 1974)

5.3 $|z|$ が大きいときの Watson の補助定理を用いた評価

鞍点法をヒントにして、漸近展開を行う。積分の評価に鞍点法ではなく Watson の補助定理を用いる。

5.3.1 正の実引数の Airy 関数の漸近展開とその解析接続

出発点は、鞍点法と同じ Airy 関数の積分表示

$$f_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} e^{-\zeta^3/3+s\zeta} d\zeta \quad n = 1, 2, 3 \quad (5.53)$$

である。ここで、積分経路 C_n は図 2.1 に示されている。まずは、 s は正の実数としておいて、 $s \rightarrow \infty$ の極限を考える。

鞍点法のときと同様の積分経路 D_j (図 5.1) を考え、

$$I^j(s) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{D_j} e^{-\zeta^3/3+s\zeta} d\zeta \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.54)$$

とする。Watson の補助定理を使うために、変数の置き換え方が鞍点法と少し違う^{*1}。

1. $j = 1$ の場合 : $\zeta = -s^{1/2} + it^{1/2}$ と置く。 $d\zeta = (i/2)t^{-1/2}dt$ となるので、

$$I^1(s) = \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi} \int_0^\infty \exp\left(-s^{1/2}t\right) \exp\left(\frac{i}{3}t^{3/2}\right) t^{-1/2}dt \quad (5.55)$$

次に、 $v = s^{1/2}t$ と置く。そして、以下の計算では、途中から $\xi = \frac{2}{3}s^{3/2}$ の記号を用いる。

$$\begin{aligned} I^1(s) &= \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi s^{1/4}} \int_0^\infty \exp(-v) \exp\left(\frac{i}{3}v^{3/2}s^{-3/4}\right) v^{-1/2}dv \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty \exp(-v) \left(\frac{i}{3}v^{3/2}s^{-3/4}\right)^n v^{-1/2}dv \\ &= \frac{e^{-\xi}}{4\pi s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n 2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \int_0^\infty \exp(-v) v^{(3n-1)/2} dv \\ &= \frac{e^{-\xi}}{4\pi s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n 2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.56)$$

2. $j = 2$ の場合 : $\zeta = -s^{1/2} - it^{1/2}$ と置く。 $d\zeta = -(i/2)t^{-1/2}dt$ となるので、

$$I^2(s) = -\frac{\exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi} \int_0^\infty \exp\left(-s^{1/2}t\right) \exp\left(-\frac{i}{3}t^{3/2}\right) t^{-1/2}dt \quad (5.57)$$

^{*1} 鞍点法のときは、 e の肩に 2 次式が乗るようにしていたが、Watson の補助定理のときは、Laplace 変換型なので、 e の肩に 1 次式が乗るようにする。

次に、 $v = s^{1/2}t$ と置く。そして、以下の計算では、途中から $\xi = \frac{2}{3}s^{3/2}$ の記号を用いる。

$$\begin{aligned}
I^2(s) &= -\frac{\exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi s^{1/4}} \int_0^\infty \exp(-v) \exp\left(-\frac{i}{3}v^{3/2}s^{-3/4}\right) v^{-1/2} dv \\
&= -\frac{\exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty \exp(-v) \left(-\frac{i}{3}v^{3/2}s^{-3/4}\right)^n v^{-1/2} dv \\
&= -\frac{e^{-\xi}}{4\pi s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n 2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \int_0^\infty \exp(-v) v^{(3n-1)/2} dv \\
&= -\frac{e^{-\xi}}{4\pi s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n 2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.58}$$

3. $j = 3$ の場合 : $\zeta = s^{1/2} + t^{1/2}$ と置く。 $d\zeta = (1/2)t^{-1/2}dt$ となるので、

$$I^3(s) = \frac{\exp\left(\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi i} \int_0^\infty \exp(-s^{1/2}t) \exp\left(-\frac{1}{3}t^{3/2}\right) t^{-1/2} dt \tag{5.59}$$

次に、 $v = s^{1/2}t$ と置く。そして、以下の計算では、途中から $\xi = \frac{2}{3}s^{3/2}$ の記号を用いる。

$$\begin{aligned}
I^3(s) &= \frac{\exp\left(\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi i s^{1/4}} \int_0^\infty \exp(-v) \exp\left(-\frac{1}{3}v^{3/2}s^{-3/4}\right) v^{-1/2} dv \\
&= \frac{\exp\left(\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi i s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty \exp(-v) \left(-\frac{1}{3}v^{3/2}s^{-3/4}\right)^n v^{-1/2} dv \\
&= \frac{e^\xi}{4\pi i s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n 2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \int_0^\infty \exp(-v) v^{(3n-1)/2} dv \\
&= \frac{e^\xi}{4\pi i s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n 2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

4. $j = 4$ の場合 : $\zeta = s^{1/2} - t^{1/2}$ と置く。 $d\zeta = -(1/2)t^{-1/2}dt$ となるので、

$$I^4(s) = -\frac{\exp\left(\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi i} \int_0^{4s} \exp(-s^{1/2}t) \exp\left(\frac{1}{3}t^{3/2}\right) t^{-1/2} dt \tag{5.61}$$

次に、 $v = s^{1/2}t$ と置く。そして、以下の計算では、途中から $\xi = \frac{2}{3}s^{3/2}$ の記号を用いる。

$$\begin{aligned}
I^4(s) &= -\frac{\exp\left(\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi i s^{1/4}} \int_0^{4s^{3/2}} \exp(-v) \exp\left(\frac{1}{3}v^{3/2}s^{-3/4}\right) v^{-1/2} dv \\
&= -\frac{\exp\left(\frac{2}{3}s^{3/2}\right)}{4\pi i s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^{4s^{3/2}} \exp(-v) \left(\frac{1}{3}v^{3/2}s^{-3/4}\right)^n v^{-1/2} dv \\
&= -\frac{e^\xi}{4\pi i s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \int_0^{4s^{3/2}} \exp(-v) v^{(3n-1)/2} dv \\
&\approx -\frac{e^\xi}{4\pi i s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \int_0^\infty \exp(-v) v^{(3n-1)/2} dv \\
&= -\frac{e^\xi}{4\pi i s^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.62}$$

ただし、途中の積分で上限を $4s^{3/2}$ から ∞ に置き換えるのには注意が要る。項別積分をする前の $e^{t^{3/2}/3}$ は $t \rightarrow \infty$ で発散するので、この段階では積分の上限を ∞ に置き換えることができない。項別積分をしてはじめて置き換えが可能になる。漸近展開の意味で無限級数の各項は計算できるが、無限級数の本当の和は発散している。

そこで、 $n = 2m$ として、

$$\begin{aligned}
 \text{Ai}(s) &= I^1(s) - I^2(s) \\
 &= \frac{e^{-\xi}}{4\pi s^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[i^n + (-i)^n] 2^{n/2}}{3^{3n/2} n! \xi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right) \\
 &= \frac{e^{-\xi}}{2\pi s^{1/4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^m}{3^{3m} (2m)! \xi^m} \Gamma\left(3m + \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi} s^{1/4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m u_m}{\xi^m}
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 1 \\
 u_m &= \frac{2^m}{3^{3m} (2m)!} \frac{\Gamma(3m + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\
 &= \frac{2^m}{3^{3m} (2m)!} \frac{(6m-1)!!}{2^{3m}} \\
 &= \frac{2^m (6m-1)!!}{(216)^m (2m)!} \\
 &= \frac{2^m (6m-1)(6m-3)(6m-5)\cdots 1}{(216)^m (2m)(2m-1)(2m-2)\cdots 1} \\
 &= \frac{2^m (6m-1)(6m-3)(6m-5)\cdots (2m+5)(2m+3)(2m+1)}{(216)^m (2m)(2m-2)\cdots 2} \\
 &= \frac{(6m-1)(6m-3)(6m-5)\cdots (2m+5)(2m+3)(2m+1)}{(216)^m m!} \quad (m \geq 1)
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

と置いた。この評価は鞍点法よりも精度が上がっている。しかし、被積分関数 $e^{it^{3/2}/3}$ が実軸を少しでも外れると発散するので、Watson の補助定理によれば、解析接続できる範囲は $|\arg(s)| < \pi/2$ に限られる。したがって、ここまでの範囲をまとめると、

$$\text{Ai}(z) = \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m u_m}{\xi^m} \quad (|\arg(s)| < \pi/2) \tag{5.65}$$

となる。ただし、 $\xi = \frac{2}{3} z^{3/2}$ である。

もうひとつ、Bi の方は

$$\begin{aligned}
 \text{Bi}(s) &= i [-I^1(s) - I^2(s) + 2I^3(s) - 2I^4(s)] \\
 &\approx 2i [I^3(s) - I^4(s)] \\
 &= \frac{e^\xi}{2\pi s^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(-1)^n + 1]2^{n/2}}{3^{3n/2}n!\xi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right) \\
 &= \frac{e^\xi}{\pi s^{1/4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{3^{3m}(2m)!\xi^m} \Gamma\left(3m + \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{e^\xi}{\sqrt{\pi}s^{1/4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_m}{\xi^m}
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

となる。こちらは、 $I^4(s)$ の積分で、積分の上限が最初から ∞ ではないので（被積分関数の $e^{t^{3/2}/3}$ が $t \rightarrow \infty$ で発散するので、積分の上限を ∞ にすると発散してしまう）、Watson の補助定理は直接は使えず、ここまでのところどこまで解析接続がどの範囲でできるのかはわからない。

5.3.2 負の実軸を含んでも有効な Airy 関数の漸近展開とその解析接続

5.3.1 節の展開は負の実軸上ではうまくいかない。次に、負の実軸を含む範囲でうまくいく漸近展開を求める。

出発点は、2.2 節で求められた

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) = 0 \tag{5.67}$$

すなわち

$$\text{Ai}(z) + e^{-(2\pi/3)i} \text{Ai}\left(ze^{-(2\pi/3)i}\right) + e^{(2\pi/3)i} \text{Ai}\left(ze^{(2\pi/3)i}\right) = 0 \tag{5.68}$$

において、 z を $-z$ と置き換えた

$$\text{Ai}(-z) = e^{(\pi/3)i} \text{Ai}\left(ze^{(\pi/3)i}\right) + e^{(-\pi/3)i} \text{Ai}\left(ze^{(-\pi/3)i}\right) \tag{5.69}$$

である。右辺の各項に対しては、(5.65) が使える。

$$\begin{aligned}
 \text{Ai}(-z) &= \frac{e^{(\pi/4)i}e^{-i\xi}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s u_s}{\xi^s} + \frac{e^{(-\pi/4)i}e^{i\xi}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i)^s u_s}{\xi^s} \\
 &= \frac{e^{(\pi/4)i}e^{-i\xi}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \left\{ \sum_{s=0}^{l-1} \frac{i^s u_s}{\xi^s} + \epsilon_l^{(1)}(\xi) \right\} \\
 &\quad + \frac{e^{(-\pi/4)i}e^{i\xi}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \left\{ \sum_{s=0}^{l-1} \frac{(-i)^s u_s}{\xi^s} + \epsilon_l^{(2)}(\xi) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

ここまでのところで解析接続可能な範囲は $|\arg z + \pi/3| < \pi/2$ と $|\arg z - \pi/3| < \pi/2$ の共通部分だから $|\arg z| < \pi/6$ ということになる。

5.4 参考文献

- [本] Norman Bleistein, Ricahard A. Handelsman (1986) *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover, New York.
- [本] F.W.J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.

第 6 章

Scorer 関数のさまざまな計算法

6.1 $|z|$ が小さいときの Maclaurin 展開

Scorer 関数の表現 (4.12)

$$\text{Hi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) d\tau \quad (6.1)$$

を $|z|$ が小さいときに級数展開する。 $e^{\tau z}$ を級数展開すれば

$$\text{Hi}(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^\infty \tau^n \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \quad (6.2)$$

となる。 $\tau^3/3 = t$ と置けば、

$$\begin{aligned} \text{Hi}(z) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^\infty (3t)^{(n-2)/3} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} 3^{(n-2)/3} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。

6.2 $|z|$ が大きいときの漸近展開

6.2.1 Watson の補助定理を用いた評価

実引数の Scorer 関数を考える。表現 (4.12)

$$\text{Hi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau x\right) d\tau \quad (6.4)$$

を $x < 0$ のとき Watson の補助定理を用いて漸近展開する。Watson の補助定理とは、Laplace 変換の形で表された関数を、級数展開を用いて項別に積分することで漸近展開を求める方法を正

当化するものである。

$$\begin{aligned}
 \text{Hi}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{x\tau} e^{-\tau^3/3} d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{x\tau} \left[\sum_{s=0}^\infty \frac{1}{s!} \left(-\frac{\tau^3}{3} \right)^s \right] d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\sum_{s=0}^\infty \frac{(-1)^s}{3^s s!} \int_0^\infty \tau^{3s} e^{x\tau} d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

ここで、 $x\tau = -t$ と置けば、

$$\begin{aligned}
 \text{Hi}(x) &= -\frac{1}{\pi} \left[\sum_{s=0}^\infty \frac{(-1)^s}{3^s s! x} \left(\frac{-1}{x} \right)^{3s} \int_0^\infty t^{3s} e^{-t} dt \right] \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left[\sum_{s=0}^\infty \frac{1}{3^s s! x^{3s+1}} \Gamma(3s+1) \right] \\
 &= -\frac{1}{\pi x} \sum_{s=0}^\infty \frac{(3s)!}{s! (3x^3)^s}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

が得られる。あるいは、 s を一つずらして

$$\begin{aligned}
 \text{Hi}(x) &= -\frac{1}{\pi x} \left[1 + \frac{1}{x^3} \sum_{s=0}^\infty \frac{(3s+3)!}{3(s+1)! (3x^3)^s} \right] \\
 &= -\frac{1}{\pi x} \left[1 + \frac{1}{x^3} \sum_{s=0}^\infty \frac{(3s+2)!}{s! (3x^3)^s} \right]
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

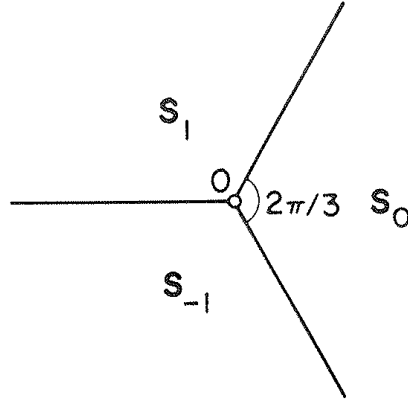
と書くこともできる。

展開 (6.6) は $x < 0$ として求められたものだが、複素数の範囲に解析接続できる。 $\exp(-\tau^3/3)$ は、 $|\arg(\tau)| < \pi/6$ においては、正則でかつ $|\tau| \rightarrow \infty$ のときに指数関数的に小さくなる。この場合、Watson の補助定理によると、展開 (6.6) は $|\arg(-x)| < (2\pi/3)$ の範囲で使える。複素数らしく x を z と書き換えれば

$$\text{Hi}(z) = -\frac{1}{\pi z} \sum_{s=0}^\infty \frac{(3s)!}{s! (3z^3)^s} \tag{6.8}$$

は $|\arg(-z)| < (2\pi/3)$ で有効な漸近展開である。すなわち、複素 Airy 関数を考えるためのセクター分け (図 6.1) で言えば、(6.8) は $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_{-1}$ で使える。

では、他のセクターではどうかといえば、 $\mathbf{S}_0 \cup \mathbf{S}_1$ では、 $\text{Hi}(z)$ を右に $2\pi/3$ 回転した $e^{(2\pi/3)i} \text{Hi}(ze^{(2\pi/3)i})$ が非斉次 Airy 微分方程式の解になっており、その漸近級数展開はやはり (6.8) で与えられる。 $\mathbf{S}_0 \cup \mathbf{S}_{-1}$ では、 $\text{Hi}(z)$ を左に $2\pi/3$ 回転した $e^{-(2\pi/3)i} \text{Hi}(ze^{-(2\pi/3)i})$ が非斉次 Airy 微分方程式の解になっており、その漸近級数展開はやはり (6.8) で与えられる。というわけで、どのセクターにおいても (6.8) は非斉次 Airy 微分方程式の解の漸近級数展開になっている。ただし、セクター $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_{-1}$ ではこれは $\text{Hi}(x)$ と一致するが、セクター $\mathbf{S}_0$ ではそうならない。

Fig. 8.1 Sectors S_j .図 6.1 複素指数の Airy 関数 $\text{Ai}(z)$ を考えるためのセクター。(Olver, 1974)

6.2.2 直接的な漸近級数展開

今、非斉次 Airy 微分方程式の特解が $|z| \rightarrow \infty$ において

$$f(z) = z^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s} \quad (6.9)$$

という漸近級数展開ができると仮定して、直接方程式 (4.1) に代入することで漸近級数解を求める。

$$f'(z) = z^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha - s) \frac{a_s}{z^s} \quad (6.10a)$$

$$f''(z) = z^{\alpha-2} \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha - s)(\alpha - s - 1) \frac{a_s}{z^s} \quad (6.10b)$$

ゆえ、

$$\begin{aligned} f'' - zf &= z^{\alpha-2} \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha - s)(\alpha - s - 1) \frac{a_s}{z^s} - z^{\alpha+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s} \\ &= z^{\alpha+1} \sum_{s=0}^{\infty} \left[(\alpha - s)(\alpha - s - 1) \frac{a_s}{z^{s+3}} - \frac{a_s}{z^s} \right] \\ &= z^{\alpha+1} \left[-a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} + \frac{1}{z^3} \sum_{s=0}^{\infty} \{ (\alpha - s)(\alpha - s - 1)a_s - a_{s+3} \} \frac{1}{z^s} \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

これが $1/\pi$ に等しいのだから

$$\alpha = -1 \quad (6.12a)$$

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \quad (6.12b)$$

$$a_1 = 0 \quad (6.12c)$$

$$a_2 = 0 \quad (6.12d)$$

$$a_{s+3} = (\alpha - s)(\alpha - s - 1)a_s \quad (6.12e)$$

が成立する。これから $n = 0, 1, 2, \dots$ として、

$$a_{3n+1} = 0 \quad (6.13a)$$

$$a_{3n+2} = 0 \quad (6.13b)$$

であり、

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \quad (6.14a)$$

$$a_3 = (0+1)(0+2)a_0 = 2a_0 \quad (6.14b)$$

$$a_6 = (3+1)(3+2)a_3 = 20a_3 = 40a_0 \quad (6.14c)$$

$$\vdots \quad (6.14d)$$

$$a_{3n} = (3n-2)(3n-1)a_{3n-1} = \dots = \frac{(3n-1)!}{3^{n-1}(n-1)!}a_0 \quad (6.14e)$$

を得る。したがって、漸近級数展開できる特解は

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{\pi z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{3^{n-1}(n-1)!z^{3n}} \right] \\ &= -\frac{1}{\pi z} \left[1 + \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{n!(3z^3)^n} \right] \end{aligned} \quad (6.15)$$

あるいは

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{\pi z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{3^{n-1}(n-1)!z^{3n}} \right] \\ &= -\frac{1}{\pi z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{3^n n! z^{3n}} \right] \\ &= -\frac{1}{\pi z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{3^n n! z^{3n}} \\ &= -\frac{1}{\pi z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n! (3z^3)^n} \end{aligned} \quad (6.16)$$

となり、(6.7) あるいは (6.8) と一致する。

6.2.3 積分

$\int_0^z \text{Hi}(-t)dt$ を計算する。

式 (6.7) を項別に積分すると

$$\begin{aligned}
 \int_0^z \text{Hi}(-t)dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{dt}{t} + \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{(3s+2)!}{s!3^s} \int_0^z \frac{1}{t^{3s+4}} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln z + \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(3s+2)!}{s!3^s(3s+3)} \frac{1}{z^{3s+3}} + C \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln z + \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(3s+2)!}{(s+1)!3^{s+1}} \frac{1}{z^{3s+3}} + C \\
 &= \frac{1}{\pi} \ln z + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(3k-1)!}{k!(3z^3)^k} + C
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

となる。ここで C は何かの積分定数である。もともと式 (6.7) は $|z|$ が大きいときの漸近展開なので、 $|z|$ が小さい部分の影響を表現するのはその式とは別に行わなければならない。

C を評価するには、Scorer 関数の表式

$$\text{Hi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3} + \tau z\right) d\tau \tag{6.18}$$

を用いて z が実数 $x (> 0)$ の場合の積分を評価する。

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \text{Hi}(-t)dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \left[\int_0^x e^{-t\tau} dt \right] d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x\tau}}{\tau} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[(\ln \tau) \{1 - e^{-x\tau}\} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) \right]_0^{\infty} \\
 &\quad - \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} (\ln \tau) e^{-x\tau} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau^2 (\ln \tau) \{1 - e^{-x\tau}\} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
 &= -\frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} (\ln \tau) e^{-x\tau} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\ln \tau) \tau^2 e^{-x\tau} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau^2 (\ln \tau) \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

右辺の各項を評価してゆく。第 1 項においては $x\tau = s$ と置いてから $e^{-\tau^3/3}$ の部分を級数展開

してゆく。

$$\begin{aligned}
& -\frac{x}{\pi} \int_0^\infty (\ln \tau) e^{-x\tau} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\ln s) e^{-s} \exp\left(-\frac{s^3}{3x^3}\right) ds + \frac{1}{\pi} (\ln x) \int_0^\infty e^{-s} \exp\left(-\frac{s^3}{3x^3}\right) ds \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (\ln s) e^{-s} \frac{1}{n!} \left(-\frac{s^3}{3x^3}\right)^n ds + \frac{1}{\pi} (\ln x) \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-s} \frac{1}{n!} \left(-\frac{s^3}{3x^3}\right)^n ds \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma'(3n+1)}{n! (3x^3)^n} + \frac{1}{\pi} (\ln x) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(3n+1)}{n! (3x^3)^n} \\
&= \frac{\gamma}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \psi(3n+1) \Gamma(3n+1)}{n! (3x^3)^n} + \frac{1}{\pi} (\ln x) + \frac{1}{\pi} (\ln x) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(3n+1)}{n! (3x^3)^n} \\
&= \frac{\gamma}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (3n)!}{n! (3x^3)^n} \left[\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - \gamma \right] + \frac{1}{\pi} (\ln x) + \frac{1}{\pi} (\ln x) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (3n)!}{n! (3x^3)^n}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

ここで、 γ は Euler の定数である。第 2 項の評価法はこれとほとんど同じ。

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\ln \tau) \tau^2 e^{-x\tau} \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\ln s) e^{-s} \frac{s^2}{x^3} \exp\left(-\frac{s^3}{3x^3}\right) ds + \frac{1}{\pi} (\ln x) \int_0^\infty e^{-s} \frac{s^2}{x^3} \exp\left(-\frac{s^3}{3x^3}\right) ds \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (\ln s) e^{-s} \frac{1}{n!} \left(-\frac{s^3}{3x^3}\right)^n \frac{s^2}{x^3} ds \\
&\quad + \frac{1}{\pi} (\ln x) \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-s} \frac{1}{n!} \left(-\frac{s^3}{3x^3}\right)^n \frac{s^2}{x^3} ds \\
&= -\frac{3}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma'(3n+3)}{n! (3x^3)^{n+1}} + \frac{3}{\pi} (\ln x) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(3n+3)}{n! (3x^3)^{n+1}} \\
&= -\frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} \Gamma'(3n)}{(n-1)! (3x^3)^n} + \frac{3}{\pi} (\ln x) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(3n)}{(n-1)! (3x^3)^n} \\
&= -\frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} \psi(3n) \Gamma(3n)}{(n-1)! (3x^3)^n} + \frac{3}{\pi} (\ln x) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(3n)}{(n-1)! (3x^3)^n} \\
&= -\frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} (3n-1)!}{(n-1)! (3x^3)^n} \left[\sum_{k=1}^{3n-1} \frac{1}{k} - \gamma \right] + \frac{3}{\pi} (\ln x) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} (3n-1)!}{(n-1)! (3x^3)^n} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (3n)!}{n! (3x^3)^n} \left[\sum_{k=1}^{3n-1} \frac{1}{k} - \gamma \right] - \frac{1}{\pi} (\ln x) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (3n)!}{n! (3x^3)^n}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

第 3 項においては $s = \tau^3/3$ と置く。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau^2 (\ln \tau) \exp\left(-\frac{\tau^3}{3}\right) d\tau = \frac{1}{3\pi} \int_0^\infty (\ln s + \ln 3) e^{-s} ds = \frac{-\gamma + \ln 3}{3\pi} \tag{6.22}$$

ここで、 γ は Euler の定数である。以上、すべて足し合わせて

$$\int_0^x \text{Hi}(-t)dt = \frac{1}{\pi}(\ln x) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3n-1)!}{n!(3x^3)^n} + \frac{2\gamma + \ln 3}{3\pi} \quad (6.23)$$

が得られる。これを (6.17) と比較すると

$$C = \frac{2\gamma + \ln 3}{3\pi} \quad (6.24)$$

であることがわかる。

まとめると、

$$\int_0^z \text{Hi}(-t)dt = \frac{1}{\pi} \ln z + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(3k-1)!}{k!(3z^3)^k} + \frac{2\gamma + \ln 3}{3\pi} \quad (6.25)$$

であり、これは、 $|\arg(z)| < (2\pi/3)$ で使える。

6.3 参考文献

- [本] F.W.J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- [web page] F.W.J. Olver (2019) *Digital Library of Mathematical Functions, Chapter 9 Airy and Scorer Functions*, <https://dlmf.nist.gov/9>.