

Bessel 関数

吉田茂生

2025 年 9 月 6 日

目次

第 1 章	前提～本ノートで使う諸公式	5
1.1	ガンマ関数に関する公式	5
1.2	Legendre 陪関数に関する公式	5
1.3	超幾何関数に関する公式	6
1.4	参考文献	6
第 2 章	定義と基本的な性質	7
2.1	Bessel 関数の定義	7
2.2	Bessel 関数の母関数	9
2.3	Bessel の微分方程式	10
2.4	漸化式と昇降演算子	12
2.5	参考文献	13
第 3 章	積分表現	15
3.1	Bessel の微分方程式の拡張された逆 Laplace 変換による解	15
3.1.1	直接的な逆 Laplace 変換～Hankel 関数	15
3.1.2	指数関数の複素積分としての Hankel 関数	18
3.1.3	Hankel 関数の性質	19
3.1.3.1	$H_{-\nu}$ と H_{ν} の関係	19
3.1.3.2	複素共役	20
3.1.4	多項式展開によって求める Hankel 関数と Bessel 関数の関係	21
3.1.5	最初から z^{ν} を括り出した逆 Laplace 変換	22
3.2	ν が整数の時の Bessel 関数のいろいろな積分表現	24
3.3	参考文献	26
第 4 章	Bessel 関数を含む積分	27
4.1	無限区間の積分 ～ Hankel 変換型の積分	27
4.1.1	Lipschitz の積分とその Hankel による拡張	27
4.1.1.1	Lipschitz の積分	27

4.1.1.2	Lipschitz の積分から微分によって求められる関係式	28
4.1.1.3	多項式と指数関数の積の Hankel 変換	29
4.1.1.4	Hankel による一般化	30
4.2	参考文献	31
第 5 章	$ISO(2)$ の表現としての整数次の Bessel 関数	33
5.1	本章で用いる記号や定理	33
5.1.1	記号	33
5.1.2	Lie 群と Lie 環	33
5.2	$ISO(2)$ と $IU(1)$	34
5.3	$ISO(2)$ の既約表現	36
5.4	表現 T_λ の行列要素の計算	38
5.5	加法定理と乗法公式	38
5.6	加法定理と漸化式	40
5.7	参考文献	42
第 6 章	Bessel 関数が出てくる物理的問題	43
6.1	円筒座標（2次元極座標）での Helmholtz 方程式	43
6.2	球座標における Helmholtz 方程式	44
6.3	参考文献	45

第 1 章

前提～本ノートで使う諸公式

本ノートでは、以下の諸公式は証明なしで使う。

1.1 ガンマ関数に関する公式

図 1.1 のような積分路 L において

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{2i \sin \pi z} \int_L e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{e^{i\pi z}}{2\pi i} \int_L e^{-t} t^{-z} dt \quad (1.2)$$

が成立する。第 1 式は z が 0 また負の整数の時発散する。 z が正の整数の時は、 $0/0$ の形で有限になる。

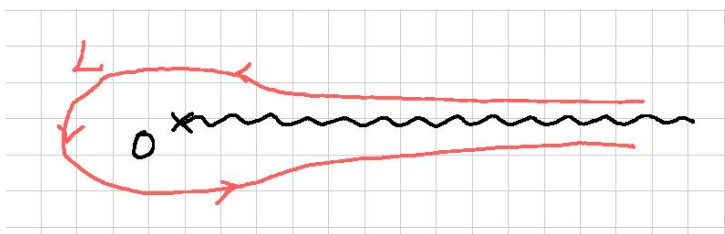


図 1.1 Bessel 関数の積分経路。

1.2 Legendre 陪関数に関する公式

Legendre 陪関数は、Legendre 多項式 $P_n(z)$ から

$$P_n^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m} \quad (1.3)$$

のように定義される。Legendre 陪関数の積分表示に

$$P_n^m(z) = i^m \frac{\Gamma(n+1)}{\pi \Gamma(n-m+1)} \int_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^{n+1}} d\varphi \quad (1.4)$$

がある^{*1}。

Legendre 陪関数の例を挙げておくと

$$P_0^0(z) = 1 \quad (1.5)$$

$$P_1^0(z) = z \quad (1.6)$$

$$P_2^0(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \quad (1.7)$$

$$P_1^1(z) = \sqrt{1 - z^2} \quad (1.8)$$

$$P_2^1(z) = 3z\sqrt{1 - z^2} \quad (1.9)$$

$$P_3^1(z) = \frac{3}{2}(5z^2 - 1)\sqrt{1 - z^2} \quad (1.10)$$

1.3 超幾何関数に関する公式

一般化した超幾何関数は

$${}_rF_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} ; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_r)_n}{n! (b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_s)_n} z^n \quad (1.11)$$

で定義される。ここで、 $(x)_n$ は Pochhammer の記号で、

$$(x)_0 = 0 \quad (1.12a)$$

$$(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x + k) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1) \quad (1.12b)$$

である。

とくに、 $r = 2$ 、 $s = 1$ のものを Gauss の超幾何関数といい、

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n \quad (1.13)$$

のように書く。

1.4 参考文献

- [本] 寺沢寛一 (1954) 自然科学者のための数学概論, 岩波書店.
- [本] G.N. Watson (1995) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge University Press.
- [web page] Wikipedia, 一般化された超幾何関数

^{*1} $(1 - z^2)^{1/2}$ の符号の取り方の約束によっては $(-1)^m$ をこれにかけたものが正しいということもある。詳細は詰めていない。

第 2 章

定義と基本的な性質

Bessel 関数の定義と基本的な性質をまとめる。Bessel 関数の定義のしかたはいろいろありうるけれど、級数の形で定義してしまうのが話が速い。

2.1 Bessel 関数の定義

ν 次の Bessel 関数は、以下の級数で定義される。 z は負の実数ではないものとして

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left[1 - \frac{z^2}{2(2\nu + 2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2\nu + 2)(2\nu + 4)} - \cdots \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

とする。

以下、定義に関係する但し書き：

- ν が負の整数の時 ($\nu = -n$, n は正の整数)、 $\Gamma(-n + m + 1)$ が $m = 0, 1, \dots, n-1$ のときに発散するので、 $m = 0, 1, \dots, n-1$ に対応する最初の n 項は 0 になる。そこで、 $m = n + k$ として $k = 0$ から和を取ることにすると、

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n J_n(z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

となることがわかる。

- ν が整数でないときは多価性の問題が出てくるが、 $-\pi < \theta = \arg z < \pi$ としたとき、素直に $z^\nu = re^{i\nu\theta}$ とする。

- とくに $\nu = 1/2, -1/2$ のとき

$$\begin{aligned}
J_{1/2}(z) &= \frac{1}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \\
J_{-1/2}(z) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-1/2} \left[1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z
\end{aligned} \tag{2.3}$$

となる。

変形 Bessel 関数は、以下の級数で定義される。 z は負の実数ではないものとして

$$\begin{aligned}
I_\nu(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left[1 + \frac{z^2}{2(2\nu + 2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2\nu + 2)(2\nu + 4)} + \cdots\right]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

とする。これから

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) \tag{2.5}$$

となることがわかる。ただし、 $-\pi < \arg z < \pi$ と取られているものすれば、右辺の Bessel 関数の引数の iz は $-\pi/2 < \arg(iz) < 3\pi/2$ ということになる。これは Bessel 関数の定義域をはみ出るので、 $\pi/2 < \arg z < \pi$ の時は J_ν の引数 iz に $e^{-2\pi i}$ をかけることで定義域に引き戻しておかないといけない。そこで、きちんと書くと、

- $-\pi < \arg z < \pi/2$ のときは

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(e^{\pi i/2} z) \tag{2.6}$$

- $\pi/2 < \arg z < \pi$ のときは

$$I_\nu(z) = (ie^{-2\pi i})^{-\nu} J_\nu(ize^{-2\pi i}) = e^{3\nu\pi i/2} J_\nu(e^{-3\pi i/2} z) \tag{2.7}$$

- $\arg z = \pi/2$ のときは iz が負の実数になるので、上のような関係を書くことができない。

となる。

とくに $\nu = 1/2, -1/2$ のとき

$$\begin{aligned}
 I_{1/2}(z) &= \frac{1}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots\right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z \\
 I_{-1/2}(z) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。

2.2 Bessel 関数の母関数

次の等式が成り立つ。

$$\exp\left[\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \tag{2.9}$$

この意味で、左辺の関数を Bessel 関数の**母関数**と呼ぶ。右辺の形から、Bessel 関数のことを Bessel 係数と呼ぶこともある。

これを示すには、左辺を 2 つの因子に分けて級数展開していけばよい。

$$\begin{aligned}
 \exp\left[\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] &= \exp\left[\frac{1}{2}zt\right] \exp\left[-\frac{1}{2}z\frac{1}{t}\right] \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^r}{r!} t^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-z/2)^m}{m!} t^{-m}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

あとは、右辺を t^n についてまとめていく。まず、 n が 0 か正の整数の時は、 n, m を決めた時に $r = n + m$ の項を拾って来ればよい。 n, m ともに非負の整数だから r は必ず非負の整数になる。すると、 t^n の係数は

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+m}(-z/2)^m}{(n+m)!m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} = J_n(z) \tag{2.11}$$

となることがわかる。次に、 n が負の整数の時は、 n, r を決めた時に $m = r - n$ の項を拾って来ればよい。 r は非負の整数、 $-n$ は正の整数だから m は必ず正の整数になる。すると、 t^n の係数は

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^r(-z/2)^{r-n}}{r!(r-n)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r-n}}{(r-n)!\Gamma(r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-n} = J_n(z) \tag{2.12}$$

となる。最後の等号は (2.2) 式から導かれる。したがって、式 (2.13) が成立することが分かった。

式 (2.13) は、 $t = e^{i\varphi}$ と置くと見通しの良い形になる。

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi} \quad (2.13)$$

これは、単位円上の関数 $e^{iz \sin \varphi}$ を Fourier 級数展開すると、展開係数が $J_n(z)$ になると読むこともできる。両辺に $e^{-im\varphi}$ を掛けて、 φ で $-\pi$ から π まで積分すると

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \varphi - im\varphi} d\varphi \quad (2.14)$$

を得る。Euler の公式を使って、指数関数を三角関数で書き直すと

$$\begin{aligned} J_m(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(z \sin \varphi - m\varphi) d\varphi + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(z \sin \varphi - m\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi - m\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m\varphi - z \sin \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。これを Bessel の積分という。

2.3 Bessel の微分方程式

Bessel 関数の級数形を項別に微分することから

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+\nu)^2}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \quad (2.16)$$

一方

$$\nu^2 J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \nu^2}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \quad (2.17)$$

である。これらを辺々引き算すると

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} \right) - \nu^2 J_\nu(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n(n+\nu)}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4(n+1)(\nu+n+1)}{(n+1)! \Gamma(\nu+n+2)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu+2} \\ &= -z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \\ &= -z^2 J_\nu(z) \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。したがって、Bessel 関数 $J_\nu(z)$ は、微分方程式

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{du}{dz} \right) + (z^2 - \nu^2)u = 0 \quad (2.19)$$

のひとつの解である。書き換えると

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{du}{dz} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (2.20)$$

あるいは

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (2.21)$$

となる。これらを ν 階の Bessel の微分方程式という。あるいは z を kz と置き換えれば、

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (2.22)$$

となり、この解の一つは $u = J_\nu(kz)$ ということになる。

変形 Bessel 関数が満たす微分方程式も同様に求められる。変形 Bessel 関数の級数形を項別に微分することから

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dI_\nu(z)}{dz} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+\nu)^2}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \quad (2.23)$$

一方

$$\nu^2 I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^2}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \quad (2.24)$$

である。これらを辺々引き算すると

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dI_\nu(z)}{dz} \right) - \nu^2 I_\nu(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n(n+\nu)}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(n+1)(\nu+n+1)}{(n+1)! \Gamma(\nu+n+2)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu+2} \\ &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \\ &= z^2 I_\nu(z) \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。したがって、Bessel 関数 $I_\nu(z)$ は、微分方程式

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{du}{dz} \right) - (z^2 + \nu^2) u = 0 \quad (2.26)$$

のひとつの解である。書き換えると

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{du}{dz} \right) - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (2.27)$$

あるいは

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (2.28)$$

となる。これらを ν 階の変形 Bessel 微分方程式という。あるいは z を kz と置き換えれば、

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (2.29)$$

となり、この解の一つは $u = I_\nu(kz)$ ということになる。

2.4 漸化式と昇降演算子

$J_{\nu+1}$ と $J_{\nu-1}$ の和と差を作ってみる。

$$\begin{aligned}
& J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu+1} \\
&= \frac{2}{z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \right] \\
&= \frac{2}{z} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n! \Gamma(\nu+n)} - \frac{1}{(n-1)! \Gamma(\nu+n+1)} \right\} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \right] \\
&= \frac{2}{z} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{\nu+n} \right\} \frac{1}{(n-1)! \Gamma(\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \right] \quad (2.30) \\
&= \frac{2\nu}{z} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \right] \\
&= \frac{2\nu}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \\
&= \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu+1} \\
&= \frac{2}{z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \right] \\
&= \frac{2}{z} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n! \Gamma(\nu+n)} + \frac{1}{(n-1)! \Gamma(\nu+n+1)} \right\} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \right] \\
&= \frac{2}{z} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{\nu+n} \right\} \frac{1}{(n-1)! \Gamma(\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \right] \quad (2.31) \\
&= \frac{2}{z} \left[\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+\nu)}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+\nu)}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu-1} \\
&= 2 \frac{dJ_{\nu}(z)}{dz}
\end{aligned}$$

これらから昇降演算子 $A_{\nu,\pm}$ を以下のように定義できる。

$$A_{\nu,\pm} J_{\nu} = J_{\nu\pm 1} \quad (2.32)$$

where

$$A_{\nu,\pm} = \mp \frac{d}{dz} + \frac{\nu}{z} \quad (2.33)$$

or

$$A_{\nu,+} J_{\nu}(z) = -z^{\nu} \frac{d}{dz} \left[\frac{J_{\nu}(z)}{z^{\nu}} \right] \quad (2.34a)$$

$$A_{\nu,-} J_{\nu}(z) = \frac{1}{z^{\nu}} \frac{d}{dz} [z^{\nu} J_{\nu}(z)] \quad (2.34b)$$

変形 Bessel 関数に関しても同様のことができる。級数の各係数に $(-1)^n$ がかからないだけだから、容易にわかる通り

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_{\nu}(z) \quad (2.35a)$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2 \frac{dI_{\nu}(z)}{dz} \quad (2.35b)$$

となる。これらから昇降演算子 $B_{\nu,\pm}$ を以下のように定義できる。

$$B_{\nu,\pm} I_{\nu} = J_{\nu\pm 1} \quad (2.36)$$

where

$$B_{\nu,\pm} = \frac{d}{dz} \mp \frac{\nu}{z} \quad (2.37)$$

or

$$B_{\nu,+} I_{\nu}(z) = z^{\nu} \frac{d}{dz} \left[\frac{I_{\nu}(z)}{z^{\nu}} \right] \quad (2.38a)$$

$$B_{\nu,-} I_{\nu}(z) = \frac{1}{z^{\nu}} \frac{d}{dz} [z^{\nu} I_{\nu}(z)] \quad (2.38b)$$

2.5 参考文献

本章では以下の本を参考にした。

- [本] G.N. Watson (1922) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press.
- [本] Frank Bowman (著), 平野鉄太郎 (訳) (1963) ベッセル関数入門 (実用数学全書), 日新出版.
- [本] 犬井鐵郎 (1948) 球関数・圓壻関数・超幾何関数 (応用数学第七巻), 河出書房.
- [本] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信 (1960) 数学公式 III —特殊函数— (岩波全書), 岩波書店.

第 3 章

積分表現

Bessel 関数を積分で表現するやり方がいろいろある。

3.1 Bessel の微分方程式の拡張された逆 Laplace 変換による解

3.1.1 直接的な逆 Laplace 変換～Hankel 関数

Bessel 関数は、Bessel の微分方程式

$$z^2 \frac{d^2 u_\nu}{dz^2} + z \frac{du_\nu}{dz} + (z^2 - \nu^2) u_\nu = 0 \quad (3.1)$$

のひとつの解である。これを拡張された逆 Laplace 変換で解く。解を

$$u_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C U_\nu(s) e^{sz} ds \quad (3.2)$$

の形に置く。積分路 C はあとで都合の良いように決めることにする。これを拡張された逆 Laplace 変換と呼ぶ。参考までに、ふつうの Laplace 変換の反転公式は

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s) e^{sz} ds \quad (3.3)$$

である。

これから (3.2) を (3.1) に代入するわけだが、準備として各項がどうなるかをそれぞれ計算し

てゆこう。微分と部分積分をしてゆくと

$$\begin{aligned}
z^2 u_\nu &= \frac{1}{2\pi i} \int_C z^2 U_\nu(s) e^{sz} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} z U_\nu e^{sz} \Big|_C - \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{dU_\nu}{ds} e^{sz} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[z U_\nu - \frac{dU_\nu}{ds} \right] e^{sz} \Big|_C + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d^2 U_\nu}{ds^2} e^{sz} ds \\
z \frac{du_\nu}{dz} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C z s U_\nu(s) e^{sz} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} z s U_\nu e^{sz} \Big|_C - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d(sU_\nu)}{ds} e^{sz} ds \\
z^2 \frac{d^2 u_\nu}{dz^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C z^2 s^2 U_\nu(s) e^{sz} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} z s^2 U_\nu e^{sz} \Big|_C - \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{d(s^2 U_\nu)}{ds} e^{sz} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[z s^2 U_\nu - \frac{d(s^2 U_\nu)}{ds} \right] e^{sz} \Big|_C + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d^2(s^2 U_\nu)}{ds^2} e^{sz} ds
\end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。これらを用いれば、Bessel の微分方程式 (3.1) は

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{d(s^2 U_\nu)}{ds} + \frac{dU_\nu}{ds} - (zs^2 + zs + z) U_\nu \right] e^{sz} \Big|_C \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{d^2(s^2 U_\nu)}{ds^2} + \frac{d^2 U_\nu}{ds^2} - \frac{d(sU_\nu)}{ds} - \nu^2 U_\nu \right] e^{sz} ds = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

となる。 U_ν としては、第二項の被積分関数が 0 になるように選ぶ。それで U_ν を定めてから第一項が 0 になるような積分路 C を定めるという方針を取る。というわけで、 U_ν が満たす微分方程式は

$$\frac{d^2[(s^2 + 1)U_\nu]}{ds^2} - \frac{d(sU_\nu)}{ds} - \nu^2 U_\nu = 0 \tag{3.6}$$

となる。これは簡単には解けなさそうな形をしているが、実はそうでもない。誰が気づいたのか、上の式は

$$\frac{d}{ds} \left[\sqrt{s^2 + 1} \frac{d}{ds} \left(\sqrt{s^2 + 1} U_\nu \right) \right] = \nu^2 U_\nu \tag{3.7}$$

と書き直すことができる。これは

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{s^2 + 1} V_\nu \right) = \nu U_\nu \tag{3.8a}$$

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{s^2 + 1} U_\nu \right) = \nu V_\nu \tag{3.8b}$$

の連立方程式とみなすことができ、

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{s^2 + 1} [U_\nu + V_\nu] \right) = \nu [U_\nu + V_\nu] \tag{3.9a}$$

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{s^2 + 1} [U_\nu - V_\nu] \right) = -\nu [U_\nu - V_\nu] \tag{3.9b}$$

と分解できる。これらは変数分離型であって、

$$\int \frac{d[U_\nu + V_\nu]}{[U_\nu + V_\nu]} = \int \left[\frac{\nu}{\sqrt{s^2 + 1}} - \frac{s}{s^2 + 1} \right] ds \quad (3.10a)$$

$$\int \frac{d[U_\nu - V_\nu]}{[U_\nu - V_\nu]} = - \int \left[\frac{\nu}{\sqrt{s^2 + 1}} + \frac{s}{s^2 + 1} \right] ds \quad (3.10b)$$

$$\ln |U_\nu + V_\nu| = \nu \ln |s + \sqrt{s^2 + 1}| - \frac{1}{2} \ln |s^2 + 1| + D' \quad (3.10c)$$

$$\ln |U_\nu - V_\nu| = -\nu \ln |s + \sqrt{s^2 + 1}| - \frac{1}{2} \ln |s^2 + 1| + D'' \quad (3.10d)$$

$$U_\nu + V_\nu = 2A \frac{(s + \sqrt{s^2 + 1})^\nu}{\sqrt{s^2 + 1}} = 2A \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^{-\nu}}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad (3.10e)$$

$$U_\nu - V_\nu = 2B \frac{(s + \sqrt{s^2 + 1})^{-\nu}}{\sqrt{s^2 + 1}} = 2B \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^\nu}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad (3.10f)$$

$$U_\nu = A \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^{-\nu}}{\sqrt{s^2 + 1}} + B \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^\nu}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad (3.10g)$$

となる。ここで、 A, B, D', D'' は積分定数である。今の場合、一般解を求める必要はないので、 $A = 0, B = 2$ に選んで

$$U_\nu = 2 \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^\nu}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad (3.11)$$

を選ぶことにする。これは多価関数で、 $s = \pm i$ および $s = \infty$ が分岐点である。そこで、図 3.1 のように cut を入れる。 $\sqrt{\cdot}$ の分岐の取り方は $\sqrt{s^2 + 1}$ は、 s が正の実数の時に正になるように取る。そのとき $(\sqrt{s^2 + 1} - s)^\nu$ も正になるようにする。

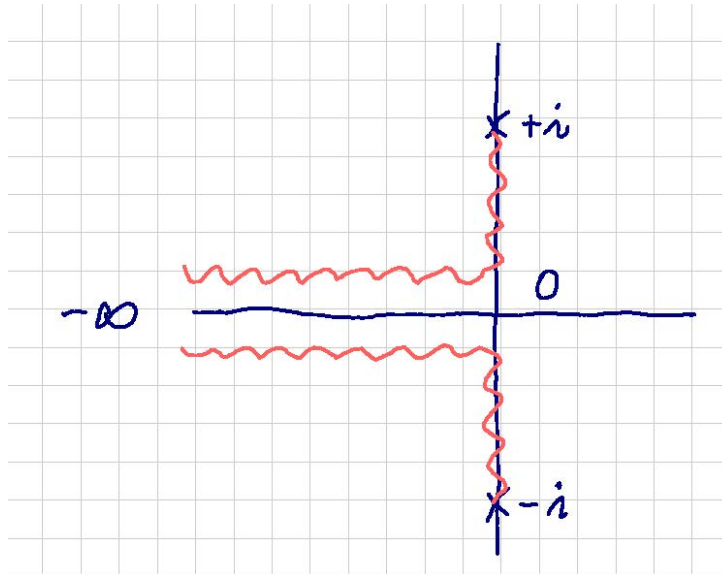


図 3.1 Bessel 関数の逆 Laplace 変換形の cut の位置。

このとき、積分経路を (3.12) の第一項が消えるように、すなわち

$$-\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{d(s^2 U_\nu)}{ds} + \frac{dU_\nu}{ds} - (zs^2 + zs + z) U_\nu \right] e^{sz} \Big|_C = 0 \quad (3.12)$$

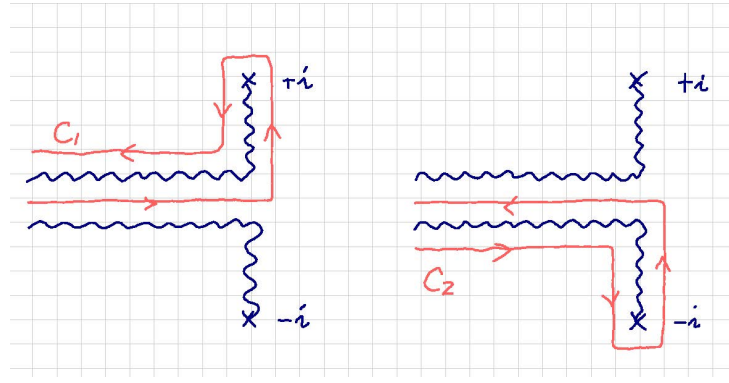


図 3.2 Bessel 関数の積分経路。

となるように取る。 $|\arg z| < \pi/2$ であれば、 $s \rightarrow -\infty$ のとき $e^{sz} \rightarrow 0$ になるので、図 3.2 のように経路を取ると、上の両端の値は 0 になる。

というわけで、

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} e^{sz} \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^\nu}{\sqrt{s^2 + 1}} ds \quad (3.13a)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_2} e^{sz} \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^\nu}{\sqrt{s^2 + 1}} ds \quad (3.13b)$$

(ただし、 $\arg z < \pi/2$) という 2 つの関数ができる。これらは Bessel の微分方程式を満たす関数で、それぞれ Hankel の第 1 および第 2 関数という。

3.1.2 指数関数の複素積分としての Hankel 関数

式 (3.13) は、このままだと $\sqrt{}$ 記号があってちょっと扱いにくい。そこで、それを強引に指数関数に変える

$$\sqrt{s^2 + 1} - s = e^{i\tau} \quad (3.14a)$$

$$\sqrt{s^2 + 1} + s = e^{-i\tau} \quad (3.14b)$$

or

$$i\tau = \log(\sqrt{s^2 + 1} - s) \quad (3.15a)$$

$$-i\tau = \log(\sqrt{s^2 + 1} + s) \quad (3.15b)$$

という変換をすることが慣例になっている。最初の 2 つの式の和と差を作ることから

$$\cos \tau = \sqrt{s^2 + 1} \quad (3.16a)$$

$$\sin \tau = is \quad (3.16b)$$

が導かれ、これから

$$ds = -i \cos \tau d\tau = -i \sqrt{s^2 + 1} d\tau \quad (3.17)$$

となる。すると、

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{-iz \sin \tau + i\nu \tau} d\tau \quad (3.18a)$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_2} e^{-iz \sin \tau + i\nu \tau} d\tau \quad (3.18b)$$

(ただし、 $\arg z < \pi/2$) となる。 L_1 、 L_2 は、 C_1 、 C_2 を写像した経路である。こうすると、頭に i がつかないし、積分の中が指数関数だけになるという点で形がきれいである。

では、 L_1 がどうなるかを考える。 C_1 において、 s が $-\infty$ から 0 に変わるとき、 $\sqrt{s^2+1}-s$ は ∞ から 1 になるから、 τ は $-i\infty$ から虚軸に沿って 0 に変わる。次に s が 0 から $+i$ に変わるとき、 $\cos \tau$ が 1 から 0 に $\sin \tau$ が 0 から -1 になるので、 τ は 0 から $-\pi/2$ まで変わる。 s 平面で $+i$ の周りを回っている間に $\sqrt{s^2+1}$ が正から負になるので、その後 s が $+i$ から 0 に変わるとき、 $\cos \tau$ が 0 から -1 に $\sin \tau$ が -1 から 0 になる。そこで、そこで、 τ は $-\pi/2$ から $-\pi$ まで変わる。最後に、 s が 0 から $-\infty$ に変わるとき、 $\sqrt{s^2+1}+s$ は -1 から $-\infty$ になるから、 τ は $-\pi$ から虚軸に並行に $-\pi+i\infty$ に変わる。これを図にしたものが、図 3.3 である。同様に考えると、 L_2 も図 3.3 のようになる。

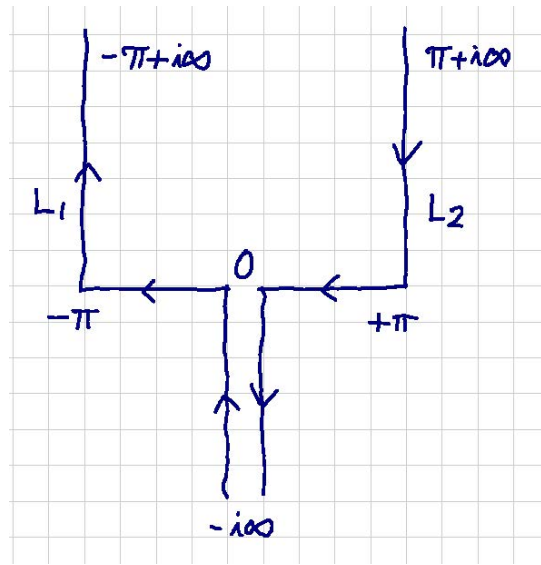


図 3.3 Hankel 関数の積分経路。

3.1.3 Hankel 関数の性質

上の積分形からわかる Hankel 関数の性質をいくつか見てゆく。

3.1.3.1 $H_{-\nu}$ と H_{ν} の関係

$H_{-\nu}^{(1)}$ を考える。

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{-iz \sin \tau - i\nu \tau} d\tau \quad (3.19)$$

ここで、 $\tau = -t - \pi$ と置けば、積分路は $-L_1$ (L_1 を逆向きに進む経路) になって、

$$\begin{aligned} H_{-\nu}^{(1)}(z) &= \frac{e^{i\nu\pi}}{\pi} \int_{-L_1} e^{-iz \sin t + i\nu t} dt \\ &= -\frac{e^{i\nu\pi}}{\pi} \int_{L_1} e^{-iz \sin t + i\nu t} dt \\ &= e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z) \end{aligned} \quad (3.20)$$

となる。 $H_{-\nu}^{(2)}$ についても同様に、

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z) \quad (3.21a)$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z) \quad (3.21b)$$

となることがわかる。

3.1.3.2 複素共役

ν が実数で z が正の実数 ($z = x > 0$) とする。そこで、Hankel 関数の複素共役を作ってみる。

$$\bar{H}_{\nu}^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\bar{L}_1} e^{ix \sin \tau - i\nu \tau} d\tau \quad (3.22a)$$

$$\bar{H}_{\nu}^{(2)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\bar{L}_2} e^{ix \sin \tau - i\nu \tau} d\tau \quad (3.22b)$$

ここで、経路 $\bar{L}_1$ 、 $\bar{L}_2$ は、図 3.4 に示した通りである。

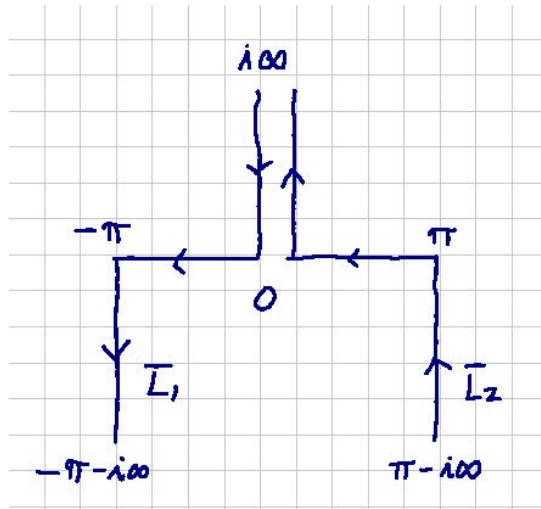


図 3.4 Hankel 関数の積分経路。

さらに、 $\tau = -\zeta$ と置けば、経路 $\bar{L}_1$ 、 $\bar{L}_2$ は、経路 $-L_2$ 、 $-L_1$ (それぞれ L_2 、 L_1 を逆向きに進む経路) に移って

$$\bar{H}_{\nu}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-L_2} e^{-ix \sin \zeta + i\nu \zeta} d\zeta = -\frac{1}{\pi} \int_{L_2} e^{-ix \sin \zeta + i\nu \zeta} d\zeta = H_{\nu}^{(2)}(x) \quad (3.23a)$$

$$\bar{H}_{\nu}^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-L_1} e^{-ix \sin \zeta + i\nu \zeta} d\zeta = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{-ix \sin \zeta + i\nu \zeta} d\zeta = H_{\nu}^{(1)}(x) \quad (3.23b)$$

が成り立つ。すなわち、 x と ν が実数なら、 $H_\nu^{(1)}(x)$ と $H_\nu^{(2)}(x)$ は互いに複素共役である。

3.1.4 多項式展開によって求める Hankel 関数と Bessel 関数の関係

これから示したいことは

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) \quad (3.24a)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) \quad (3.24b)$$

となることである。

そこで、まず

$$U(z) = \frac{1}{2} [H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)] = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1+L_2} e^{-iz \sin \tau + i\nu \tau} d\tau \quad (3.25)$$

という関数を考える。ここで積分経路 $L_1 + L_2$ は図 3.5 の左に示した。被積分関数を z で多項式展開して項別積分することを目指すのだが、このままだと $\sin \tau$ の多項式の Fourier 変換のようなことをしないといけなさそうで、それは簡単ではない。そのため次のような変換をする。

$$u = \frac{z}{2} e^{i(\pi-\tau)} \quad (3.26)$$

すると、積分経路は図 3.5 の右に示した L のようになる。変数変換から導かれる

$$e^{i\tau} = e^{i\pi} \frac{z}{2} \frac{1}{u} = -\frac{z}{2} \frac{1}{u} \quad (3.27a)$$

$$iz \sin \tau = -\frac{z}{2} e^{-i\tau} + \frac{z}{2} e^{i\tau} = u - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{u} \quad (3.27b)$$

$$e^{i\nu \tau} d\tau = -\frac{1}{i} e^{i\nu \pi} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu u^{-\nu-1} du \quad (3.27c)$$

を用いると、

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i} e^{i\nu \pi} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_L e^{-u + (z/2)^2 (1/u)} u^{-\nu-1} du \quad (3.28)$$

となる。つまり、変数変換によって、 $\sin \tau$ が消えて、指数関数とべき乗関数だけで書けるようになった。

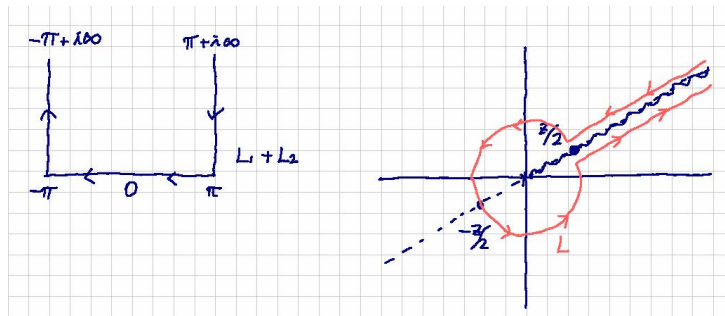


図 3.5 Bessel 関数の積分経路。

そこで、 $\exp[(z/2)^2(1/u)]$ を展開して項別に積分する。

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i} e^{i\nu\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \int_L e^{-u} u^{-\nu-m-1} du \quad (3.29)$$

式 (1.2) を用いると cut が右半面にある限り ($\Re z > 0$ のとき)、

$$\begin{aligned} U(z) &= -e^{i\nu\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \frac{e^{-i\pi(\nu+m+1)}}{\Gamma(\nu+m+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \end{aligned} \quad (3.30)$$

これは Bessel 関数の定義式 (2.1) そのものである。つまり

$$U(z) = J_\nu(z) \quad (3.31)$$

したがって、

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} \left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z) \right] \quad (3.32)$$

となることがわかった。解析接続の考え方からすると、これは $\Re z \leq 0$ でも（つまりすべての z で）成立する。

3.1.5 最初から z^ν を括り出した逆 Laplace 変換

式 (3.13) を導いたときは、Bessel の微分方程式を逆 Laplace 変換して 2 階の微分方程式を導いた。しかし、それほど簡単にはならなかった。というのは、Laplace 変数を s とするとき、微分は s を掛けるだけになるので都合だが、 z を掛ける操作が微分になるので、素直に逆 Laplace 変換すると、やはり 2 階の微分方程式が出てきてしまったからだ。そこで、ここではまず $\nu^2 u_\nu$ の項を消す方向での変数変換を考える。この項が消えれば、両辺を z で割ると z を掛ける操作が 1 つだけになるからである。

そこで、まず

$$u_\nu = z^\nu f_\nu \quad (3.33)$$

と置いて、 f_ν に対する微分方程式を求める。この置き換えは、Bessel 関数の級数による定義で z^ν の項が出ていることから自然である。

$$\frac{du_\nu}{dz} = \nu z^{\nu-1} f_\nu + z^\nu \frac{df_\nu}{dz} \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2 u_\nu}{dz^2} = \nu(\nu-1) z^{\nu-2} f_\nu + 2\nu z^{\nu-1} \frac{df_\nu}{dz} + z^\nu \frac{d^2 f_\nu}{dz^2} \quad (3.35)$$

を (3.1) に代入すると、

$$z \frac{d^2 f_\nu}{dz^2} + (2\nu+1) \frac{df_\nu}{dz} + z f_\nu = 0 \quad (3.36)$$

となり、係数の z 依存性が 1 乗までになって目的が達せられた。これで逆 Laplace 変換をすれば 1 階の微分方程式を解けば済むようになるはずである。

この解を

$$f_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F_\nu(s) e^{sz} ds \quad (3.37)$$

の形に置く（拡張された逆 Laplace 変換）。積分路 C はあとで都合の良いように決めることにする。

これから (3.37) を (3.36) に代入するわけだが、準備として各項がどうなるかをそれぞれ計算してゆこう。微分と部分積分をしてゆくと

$$\begin{aligned} z f_\nu &= \frac{1}{2\pi i} \int_C z F_\nu(s) e^{sz} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} F_\nu e^{sz} \Big|_C - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dF_\nu}{ds} e^{sz} ds \\ \frac{df_\nu}{dz} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C s F_\nu(s) e^{sz} ds \\ z \frac{d^2 f_\nu}{dz^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C z s^2 F_\nu(s) e^{sz} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} s^2 F_\nu e^{sz} \Big|_C - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d(s^2 F_\nu)}{ds} e^{sz} ds \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。これらを用いれば、微分方程式 (3.36) は、

$$\frac{1}{2\pi i} \left[(1 + s^2) F_\nu e^{sz} \right] \Big|_C - \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{d(s^2 F_\nu)}{ds} + \frac{dF_\nu}{ds} - (2\nu + 1)s F_\nu \right] e^{sz} ds = 0 \quad (3.39)$$

となる。 F_ν としては、被積分関数が 0 になるように選ぶ。

$$\frac{d(s^2 F_\nu)}{ds} + \frac{dF_\nu}{ds} - (2\nu + 1)s F_\nu = 0 \quad (3.40)$$

整理すると

$$(s^2 + 1) \frac{dF_\nu}{ds} - (2\nu - 1)s F_\nu = 0 \quad (3.41)$$

となる。これは変数分離型である。

$$\frac{1}{2\nu - 1} \int \frac{dF_\nu}{F_\nu} = \int \frac{s}{s^2 + 1} ds \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{2\nu - 1} \ln |F_\nu| = \frac{1}{2} \ln |s^2 + 1| + D'' \quad (3.43)$$

$$F_\nu = D'(s^2 + 1)^{\nu - \frac{1}{2}} \quad (3.44)$$

ここで、 D', D'' は積分定数である。そこで、積分経路 C を

$$(s^2 + 1)^{\nu + \frac{1}{2}} e^{sz} \Big|_C = 0 \quad (3.45)$$

となるように選べば、Bessel の微分方程式の解は

$$u_\nu(z) = D' \frac{z^\nu}{2\pi i} \int_C (s^2 + 1)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{sz} ds \quad (3.46)$$

となる。

慣例的には $s = it$ と置いて

$$u_\nu(z) = Dz^\nu \int_C (t^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{itz} dt \quad (3.47)$$

とも表現する。ここで

$$D = D' \frac{(-1)^{\nu-\frac{1}{2}}}{2\pi} \quad (3.48)$$

と置いた。積分経路は

$$(t^2 - 1)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{itz} \Big|_C = 0 \quad (3.49)$$

を満たすように選ぶ。

3.2 ν が整数の時の Bessel 関数のいろいろな積分表現

3.1.4 節の結果によれば、

$$J_\nu(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L e^{-iz \sin \tau + i\nu\tau} d\tau \quad (3.50)$$

であった。ここで、積分経路 L は図 3.6 の通りである。

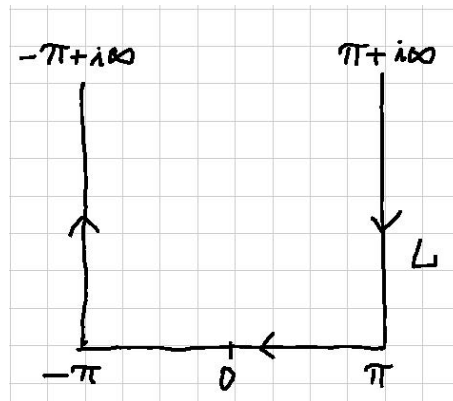


図 3.6 Bessel 関数の積分経路。

$\nu = n$ (整数) として積分路を 3 つに分けて、それぞれ $\tau = \pi + ix$ 、 $\tau = \xi$ 、 $\tau = -\pi + ix$ と

書くことから計算してゆくと

$$\begin{aligned}
J_n(z) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-iz \sin(\pi+ix)+in(\pi+ix)} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} e^{-iz \sin \xi + in\xi} d\xi \\
&\quad - \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iz \sin(-\pi+ix)+in(-\pi+ix)} dx \\
&= \frac{i}{2\pi} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-z \sinh x - nx} dx - \frac{i}{2\pi} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-z \sinh x - nx} dx \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{-iz \sin \xi + in\xi} d\xi - \int_0^{-\pi} e^{-iz \sin \xi + in\xi} d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{-iz \sin \xi + in\xi} + e^{iz \sin \xi - in\xi}) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\xi - z \sin \xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.51}$$

となり、以前 (2.15) で求めた Bessel の積分が再び求められた。

上の式の途中から導かれる

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz \sin \xi + in\xi} d\xi \tag{3.52}$$

において、 $\xi = \varphi - \pi/2$ と置けば、

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi/2}^{(3/2)\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi \tag{3.53}$$

となる。被積分関数は周期 2π の周期関数だから、積分区間をずらして

$$\begin{aligned}
J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi
\end{aligned} \tag{3.54}$$

と書いても良い。そのうえで、

$$\begin{aligned}
J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i^n} \left[\int_0^{\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi + \int_{-\pi}^0 e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i^n} \left[\int_0^{\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi - \int_0^{-\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i^n} \left[\int_0^{\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi + \int_0^{\pi} e^{iz \cos \varphi - in\varphi} d\varphi \right] \\
&= \frac{1}{\pi i^n} \int_0^{\pi} e^{iz \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi
\end{aligned} \tag{3.55}$$

となる。これを Hansen の積分という。Hansen の積分には少しだけ形の違う別バージョンもあ

る。(3.55) において、 $\psi = \pi - \varphi$ と置けば、

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{\pi i^n} \int_0^\pi e^{iz \cos(\pi-\psi)} \cos[n(\pi-\psi)] d\psi \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi i^n} \int_0^\pi e^{-iz \cos \psi} \cos(n\psi) d\psi \\ &= \frac{i^n}{\pi} \int_0^\pi e^{-iz \cos \psi} \cos(n\psi) d\psi \end{aligned} \quad (3.56)$$

となる。

Hansen の積分 (3.55) から、

$$J_{-n}(z) = \frac{i^n}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi = \frac{(-1)^n}{\pi i^n} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi = (-1)^n J_n(z) \quad (3.57)$$

が導かれ、(2.2) が再び得られる。

3.3 参考文献

本章では以下の本を参考にした。

- [本] 犬井鉄郎 (1962) 特殊関数 (岩波全書), 岩波書店.
- [本] 寺沢寛一 (1954) 自然科学者のための数学概論, 岩波書店.

第 4 章

Bessel 関数を含む積分

Bessel 関数を含んだ積分

4.1 無限区間の積分 ～ Hankel 変換型の積分

Hankel 変換は

$$F(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(\xi x) x dx \quad (4.1a)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\xi) J_{\nu}(x\xi) \xi d\xi \quad (4.1b)$$

というものである。この型の積分を求めてゆく。

4.1.1 Lipschitz の積分とその Hankel による拡張

4.1.1.1 Lipschitz の積分

Lipschitz の積分とは

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_0(\xi x) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \quad (4.2)$$

という積分である。これを証明する。

Hansen の積分 (3.55) を用いると、 $\Re \alpha > 0$ 、 $\Re(\alpha \pm i\xi) > 0$ として（そうでなければ積分が発散する）、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_0(\xi x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \left[\int_0^{\pi} e^{i\xi x \cos \theta} d\theta \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{(-\alpha + i\xi \cos \theta)x} dx \right] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\alpha - i\xi \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha - i\xi \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。 $z = e^{i\theta}$ と置くと、

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (4.4a)$$

$$\cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z} \quad (4.4b)$$

ゆえ、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{unit circle}} \frac{dz}{z \left(\alpha - i\xi \frac{z^2+1}{2z} \right)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\text{unit circle}} \frac{dz}{\xi z^2 + 2i\alpha z + \xi} \\ &= \frac{1}{\pi\xi} \int_{\text{unit circle}} \frac{dz}{(z - z_+)(z - z_-)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

where

$$z_{\pm} = -i \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \xi^2}}{\xi} \quad (4.6)$$

となる。根号は $|\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \xi^2}| > |\xi|$ となるように取れば、 z_+ は単位円の外で、 z_- は単位円の中に来る。すると、留数定理により

$$I = \frac{2i}{\xi} \frac{1}{z_- - z_+} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \quad (4.7)$$

となる。

4.1.1.2 Lipschitz の積分から微分によって求められる関係式

Lipschitz の積分

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_0(\xi x) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \quad (4.8)$$

を α と ξ で微分して出てくる式を見てゆく。

まず、 ξ で微分する。

$$\frac{d}{d\xi} J_0(z) = -J_1(z) \quad (4.9)$$

であることを用いると、

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x} J_1(\xi x) dx = \frac{\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^{3/2}} \quad (4.10)$$

がわかる。

次に、(4.8) と (4.10) とを次々に α で微分してゆく。すると、

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x} J_0(\xi x) dx = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \xi^2)^{3/2}} \quad (4.11)$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} J_1(\xi x) dx = \frac{3\alpha\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^{5/2}} \quad (4.12)$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} J_0(\xi x) dx = -\frac{1}{(\alpha^2 + \xi^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3\alpha^2}{\alpha^2 + \xi^2} \right] \quad (4.13)$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x} J_1(\xi x) dx = -\frac{3\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^{5/2}} \left[1 - \frac{5\alpha^2}{\alpha^2 + \xi^2} \right] \quad (4.14)$$

といった式が得られる。

4.1.1.3 多項式と指数関数の積の Hankel 変換

さて、4.1.1.2 節のようにしてゆくと、多項式と指数関数の積の Hankel 変換が求められるわけだが、その一般的な形を求めておく。

$$I_m^n = \int_0^\infty x^m e^{-\alpha x} J_n(\xi x) dx \quad (4.15)$$

ただし、ここで、 α と ξ は実数で $\alpha > 0$ 、 m と n は自然数で $m \geq n$ とする。

Hansen の積分 (3.56) を用いると、

$$\begin{aligned} I_m^n &= \frac{i^n}{\pi} \int_0^\infty x^m e^{-\alpha x} \left[\int_0^\pi e^{-i\xi x \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi \right] dx \\ &= \frac{i^n}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi) \left[\int_0^\infty x^m e^{-x(\alpha + i\xi \cos \varphi)} dx \right] d\varphi \\ &= \frac{i^n}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi) \frac{m!}{(\alpha + i\xi \cos \varphi)^{m+1}} d\varphi \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる。ここで、 $r = \sqrt{\alpha^2 + \xi^2}$ 、 $\mu = \alpha/r$ と置くと、

$$I_m^n = \frac{i^n m!}{\pi r^{m+1}} \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi)}{(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \cos \varphi)^{m+1}} d\varphi \quad (4.17)$$

となる。これに Legendre 陪関数の積分表示の一つ (1.4) を用いると

$$I_m^n = \frac{\Gamma(m-n+1)}{r^{m+1}} P_m^n(\mu) = \frac{(m-n)!}{(\alpha^2 + \xi^2)^{(m+1)/2}} P_m^n \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \right) \quad (4.18)$$

を得る。

とくに $n = 0$ とすると、

$$I_0^0 = \frac{1}{(\alpha^2 + \xi^2)^{1/2}} \quad (4.19)$$

$$I_1^0 = \frac{1}{(\alpha^2 + \xi^2)} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \xi^2)^{3/2}} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} I_2^0 &= \frac{2}{(\alpha^2 + \xi^2)^{3/2}} \frac{1}{2} \left(3 \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \right]^2 - 1 \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha^2 + \xi^2)^{3/2}} \left(3 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \xi^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$n = 1$ とすると、

$$I_1^1 = \frac{1}{(\alpha^2 + \xi^2)} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} = \frac{\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^{3/2}} \quad (4.22)$$

$$I_2^1 = \frac{1}{(\alpha^2 + \xi^2)^{3/2}} \frac{3\alpha\xi}{\alpha^2 + \xi^2} = \frac{3\alpha\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^{5/2}} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} I_3^1 &= \frac{2}{(\alpha^2 + \xi^2)^2} \frac{3}{2} \left(5 \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \right]^2 - 1 \right) \frac{\xi}{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \\ &= \frac{3\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^{5/2}} \left(5 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \xi^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

となって、4.1.1.2 節の結果が再び得られる。

4.1.1.4 Hankel による一般化

4.1.1.3 節の結果を、 m, n が自然数に限らず、 α, ξ が実数に限らない場合に一般化する。これは Hankel と Gegenbauer による (1875 年ころ)。

$$I_\mu^\nu(\alpha, \xi) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-\alpha x} J_\nu(\xi x) dx \quad (4.25)$$

とにおいて、これを超幾何関数で表現するのが目標である。ただし、 $\Re \alpha > 0$ 、 $\Re(\alpha \pm i\xi) > 0$ とする（そうでなければ積分が発散する）。

Bessel 関数を多項式展開した形で表して（定義通り）、項別積分する。

$$\begin{aligned} I_\mu^\nu(\alpha, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\nu+2m} \int_0^\infty x^{\mu+\nu+2m-1} e^{-\alpha x} dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\nu+2m} \frac{\Gamma(\mu + \nu + 2m)}{\alpha^{\mu+\nu+2m}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

項別積分が正当化されるための十分条件は、 $|\xi| < |\alpha|$ となることである。このとき、Gauss の

超幾何関数の定義 (1.13) と Pochhammer の記号 (1.12) を用いれば、

$$\begin{aligned}
 I_\mu^\nu(\alpha, \xi) &= \frac{1}{\alpha^\mu} \left(\frac{\xi}{2\alpha} \right)^\nu \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\nu + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\mu + \nu)_{2m}}{m! (\nu + 1)_m} \left(\frac{\xi}{2\alpha} \right)^{2m} \\
 &= \frac{1}{\alpha^\mu} \left(\frac{\xi}{2\alpha} \right)^\nu \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\nu + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\mu + \nu}{2} \right)_m \left(\frac{\mu + \nu + 1}{2} \right)_m}{m! (\nu + 1)_m} \left(-\frac{\xi^2}{\alpha^2} \right)^m \\
 &= \frac{1}{\alpha^\mu} \left(\frac{\xi}{2\alpha} \right)^\nu \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\nu + 1)} F \left(\frac{\mu + \nu}{2}, \frac{\mu + \nu + 1}{2}; \nu + 1; -\frac{\xi^2}{\alpha^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

となる。これが Hankel による一般化の結果である。これはもともと $\Re \alpha > 0$ 、 $\Re(\alpha \pm i\xi) > 0$ 、 $|\xi| < |\alpha|$ の仮定で得られたが、解析接続の考え方からすると、この級数が収束する限りにおいて、この式は正しい。

4.2 参考文献

- [本] G.N. Watson (1995) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge University Press.
- [本] 寺沢寛一 (1954) 自然科学者のための数学概論, 岩波書店.

第 5 章

$ISO(2)$ の表現としての整数次の Bessel 関数

5.1 本章で用いる記号や定理

5.1.1 記号

- 群 G の表現空間 V 上での表現 ρ を、しばしば (ρ, V) と書く。

5.1.2 Lie 群と Lie 環

以下の定義や定理は証明無しに用いる。

定義 線型 Lie 群 G に関して、任意の実数 t に対して、

$$\exp tX \in G \quad (5.1)$$

となる X の全体を G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ という。

このことを表現に反映させたものが微分表現である。

定義と定理 線型 Lie 群 G の表現 (ρ, V) に対して、実変数 t の 1 パラメタ群の表現 $g(t) = \rho(\exp tX)$ を考える。このとき

$$d\rho(X) \equiv g'(0) \quad (5.2)$$

は、Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現であり、これを微分表現 $(d\rho, V)$ と呼ぶ。任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$\rho(\exp tX) = \exp t[d\rho](X) \quad (5.3)$$

が成り立つ。

G の元の表現が何かの変換を表すものとすれば、微分表現は無限小変換を表している。

定理 線型 Lie 群 G が連結であれば、表現 ρ が既約、可約、完全可約であることの必要十分条件は、微分表現 $d\rho$ が既約、可約、完全可約であることである。

5.2 $ISO(2)$ と $IU(1)$

以下の形の行列が作る群を**非斉次特殊回転群** (inhomogeneous special orthogonal group) $ISO(2)$ と呼ぶ。

$$g(\theta, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & a_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

ここで、 $0 \leq \theta < 2\pi$ 、 $\mathbf{a} = {}^t(a_1, a_2)$ である。 g が表している変換は 3 次元空間では

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta + a_1 z \\ x \sin \theta + y \cos \theta + a_2 z \\ z \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

ということだから、 xy 面内で矢印を θ だけ反時計回りに回転し $\mathbf{a}z$ だけ足したことに相当する。もっと簡単には $z = 1$ として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta + a_1 \\ x \sin \theta + y \cos \theta + a_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

という変換だと考えることもできる。合同変換のうち裏返しを含まないものを**運動** (motion) と呼ぶから、これは 2 次元 xy 平面内の運動である。その意味で、これを**運動群** (motion group) $M(2)$ とか**ユークリッド群** $E(2)$ と呼ぶこともある。

g の形の行列が確かに群をなすことを確認する。まず、積について閉じていることを確認する。

$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= g(\theta_1, \mathbf{a}_1) g(\theta_2, \mathbf{a}_2) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & a_{11} \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & a_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & a_{21} \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & a_{22} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 & a_{11} + a_{21} \cos \theta_1 - a_{22} \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 & a_{12} + a_{21} \sin \theta_1 + a_{22} \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & a_{11} + a_{21} \cos \theta_1 - a_{22} \sin \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_{12} + a_{21} \sin \theta_1 + a_{22} \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= g(\theta_1 + \theta_2, \mathbf{a}_1 + g(\theta_1, 0)\mathbf{a}_2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

となり、閉じていることが分かる。幾何学的に考えると当然の結果ではある。単位元は $g(0, \mathbf{0})$ 、 $g(\theta, \mathbf{a})$ の逆元は $g(-\theta, -g(-\theta, 0)\mathbf{a})$ だから、 g の形の行列は群をなす。

ベクトル $\mathbf{a}$ を極座標で表現し

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

とし、 $g(\theta, \mathbf{a})$ を $g(r, \varphi; \theta)$ と表記することにすれば、積の結果は

$$g(r_1, \varphi_1; \theta_1)g(r_2, \varphi_2; \theta_2) = g(r, \varphi; \theta) \quad (5.9)$$

ただし、

$$r = |r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i(\varphi_2 + \theta_1)}| \quad (5.10a)$$

$$e^{i\varphi} = \frac{1}{r} (r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i(\varphi_2 + \theta_2)}) \quad (5.10b)$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad (5.10c)$$

となる。

ベクトル $\mathbf{a}$ を極座標で表現するくらいなら、 xy 平面を複素平面と同一視すれば $ISO(2)$ と同型な群が見出せると想像が付く。実際、行列

$$g(\theta, a) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

は、複素数 z (直前まで使っていた z ではなく $z = x + iy$ に対応する) から作るベクトル ${}^t(z, 1)$ を

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} z + a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

に変換する。複素数 a は $a_1 + ia_2$ に対応する。この変換は、複素平面上で複素数を θ だけ回転して a を足すという操作になっている。行列 $g(\theta, a)$ が作る群を**非斉次ユニタリ群** (inhomogeneous unitary group) $IU(1)$ と呼ぶ。これは $ISO(2)$ と同型である。積に関しては

$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= g(\theta_1, a_1)g(\theta_2, a_2) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_2} & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\theta_1 + \theta_2)} & a_1 + e^{i\theta_1} a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= g(\theta_1 + \theta_2, a_1 + e^{i\theta_1} a_2) \end{aligned} \quad (5.13)$$

の関係があり、式 (5.7) と対応している。

$ISO(2)$ のパラメタ a_1 、 a_2 、 θ に対応する 1 パラメタ部分群はそれぞれ

$$\omega_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.14a)$$

$$\omega_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.14b)$$

$$\omega_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.14c)$$

で表され、その接行列

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15a)$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15b)$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15c)$$

が Lie 環 $\mathfrak{iso}(2)$ における微分表現の基底となる。それらの交換関係は

$$[b_1, b_2] = 0 \quad (5.16a)$$

$$[b_2, b_3] = b_1 \quad (5.16b)$$

$$[b_3, b_1] = b_2 \quad (5.16c)$$

となる。

5.3 $ISO(2)$ の既約表現

複素平面上の単位円上の関数の空間 $\mathfrak{D}$ の上での $IU(1)$ ($ISO(2)$ と同型) の表現 $(T_\lambda, \mathfrak{D})$ を以下のように定義する。 λ を複素数、 $F \in \mathfrak{D}$ として

$$[T_\lambda(g(\theta, a))F](z) = e^{\lambda \Re \bar{a} z} F(e^{-i\theta} z) \quad (5.17)$$

とする。これが表現となっていることは

$$\begin{aligned} [T_\lambda(g(\theta_1, a_1))[T_\lambda(g(\theta_2, a_2))F]](z) &= T_\lambda(g(\theta_1, a_1))e^{\lambda \Re \bar{a}_2 z} F(e^{-i\theta_2} z) \\ &= e^{\lambda \Re (\overline{a_1 + e^{i\theta_1} a_2}) z} F(e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} z) \\ &= [T_\lambda(g(\theta_1 + \theta_2, a_1 + e^{i\theta_1} a_2))F](z) \end{aligned} \quad (5.18)$$

となり、(5.13) 式と比べると、準同型写像になっていることから分かる。

単位円上では $z = e^{i\psi}$ だから、関数 $F(z)$ を ψ の関数と見ることができる。つまり、 $F(z) \equiv f(\psi)$ とする。すると、表現 $T_\lambda(g)$ は $a = re^{i\varphi}$ として、

$$[T_\lambda(g(r, \varphi; \theta))f](\psi) = e^{\lambda r \cos(\psi - \varphi)} f(\psi - \theta) \quad (5.19)$$

と書くことができる。

$\mathfrak{D}$ の上に内積

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f_1(\psi)} f_2(\psi) d\psi \quad (5.20)$$

を導入したものをヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ とする。 $\lambda = i\kappa$ が純虚数の場合にのみ表現 $(T_\lambda, \mathfrak{H})$ がユニタリ表現になる。

表現 $(T_\lambda, \mathfrak{H})$ 上の微分表現 $(dT_\lambda, \mathfrak{H})$ を求める。

$$[T_\lambda(g(\theta, a_1, a_2))f](\psi) = e^{\lambda(a_1 \cos \psi + a_2 \sin \psi)} f(\psi - \theta) \quad (5.21)$$

と書くことができるから、パラメタ a_1, a_2, θ に関して微分すると、

$$B_1 f(\psi) = \frac{d}{da_1} [T_\lambda(g(0, a_1, 0))f](\psi) \Big|_{a_1=0} = \lambda \cos \psi f(\psi) \quad (5.22a)$$

$$B_2 f(\psi) = \frac{d}{da_2} [T_\lambda(g(0, 0, a_2))f](\psi) \Big|_{a_2=0} = \lambda \sin \psi f(\psi) \quad (5.22b)$$

$$B_3 f(\psi) = \frac{d}{d\theta} [T_\lambda(g(\theta, 0, 0))f](\psi) \Big|_{\theta=0} = -\frac{d}{d\psi} f(\psi) \quad (5.22c)$$

となる。 B_1, B_2, B_3 は Lie 環 $\mathfrak{iso}(3)$ の基底の表現であり、(5.16) 式と同じ交換関係

$$[B_1, B_2] = 0 \quad (5.23a)$$

$$[B_2, B_3] = B_1 \quad (5.23b)$$

$$[B_3, B_1] = B_2 \quad (5.23c)$$

を満たす。

これから新たな演算子の組を

$$H_+ = B_1 + iB_2 = \lambda e^{i\psi} \quad (5.24a)$$

$$H_- = B_1 - iB_2 = \lambda e^{-i\psi} \quad (5.24b)$$

$$B_3 = -\frac{d}{d\psi} \quad (5.24c)$$

を定義する。すると、交換関係は

$$[H_+, H_-] = 0 \quad (5.25a)$$

$$[H_+, B_3] = iH_+ \quad (5.25b)$$

$$[H_-, B_3] = -iH_- \quad (5.25c)$$

となる。表現空間 $\mathfrak{H}$ の基底として $e^{ik\psi}$ (k は整数) を取れば、

$$H_+ e^{ik\psi} = \lambda e^{i(k+1)\psi} \quad (5.26a)$$

$$H_- e^{ik\psi} = \lambda e^{i(k-1)\psi} \quad (5.26b)$$

$$B_3 e^{ik\psi} = -ike^{ik\psi} \quad (5.26c)$$

となる。 $\lambda \neq 0$ であれば、この演算子 H_+, H_- によって $e^{ik\psi}$ のすべての k を移り変われるので、微分表現 dT_λ ($\lambda \neq 0$) は既約である。したがって、表現 T_λ ($\lambda \neq 0$) は既約である。 $\lambda = 0$ の表現

$$[T_0(g(r, \varphi; \theta))f](\psi) = f(\psi - \theta) \quad (5.27)$$

は、基底 $e^{ik\psi}$ に対して $e^{-ik\theta}$ を掛けるだけの 1 次元表現になる。

5.4 表現 T_λ の行列要素の計算

表現空間 $\mathfrak{h}$ の基底を $\{e^{ik\psi}\}$ に取った時の表現 T_λ の行列要素は、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} t_{mn}^{[\lambda]}(g) &= (e^{im\psi}, T_\lambda(g)e^{in\psi}) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-in\theta} \int_0^{2\pi} e^{\lambda r \cos(\psi-\varphi) + i(n-m)\psi} d\psi \end{aligned} \quad (5.28)$$

$\psi - \varphi$ を改めて ψ と書けば

$$t_{mn}^{[\lambda]}(g) = \frac{1}{2\pi} e^{-i[n\theta + (m-n)\varphi]} \int_0^{2\pi} e^{\lambda r \cos \psi + i(n-m)\psi} d\psi \quad (5.29)$$

となり、これを (3.54) 式と見比べることで、

$$t_{mn}^{[\lambda]}(g(r, \varphi; \theta)) = i^{n-m} e^{-i[n\theta + (m-n)\varphi]} J_{n-m}(-i\lambda r) \quad (5.30)$$

とベッセル関数を用いて表されることがわかる。とくに、ユニタリ表現 $\lambda = i\kappa$ (κ は実数) のとき

$$t_{mn}^{[i\kappa]}(g(r, \varphi; \theta)) = i^{n-m} e^{-i[n\theta + (m-n)\varphi]} J_{n-m}(\kappa r) \quad (5.31)$$

となる。

5.5 加法定理と乗法公式

表現行列は

$$t_{mn}^{[i\kappa]}(g_1 g_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} t_{ml}^{[i\kappa]}(g_1) t_{ln}^{[i\kappa]}(g_2) \quad (5.32)$$

を満たす。とくに、 $g_1 = g(r_1, 0; 0)$ 、 $g_2 = g(r_2, \varphi_2; 0)$ 、 $m = 0$ 、 $\kappa = 1$ と置く。つまり、回転を伴わず、ベクトルの足し算だけの合成に関して考える。すると、 $g(r, \varphi; \theta) = g_1 g_2$ は、合成規則 (5.10) より、

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varphi_2} \quad (5.33a)$$

$$e^{i\varphi} = \frac{1}{r} (r_1 + r_2 e^{i\varphi_2}) \quad (5.33b)$$

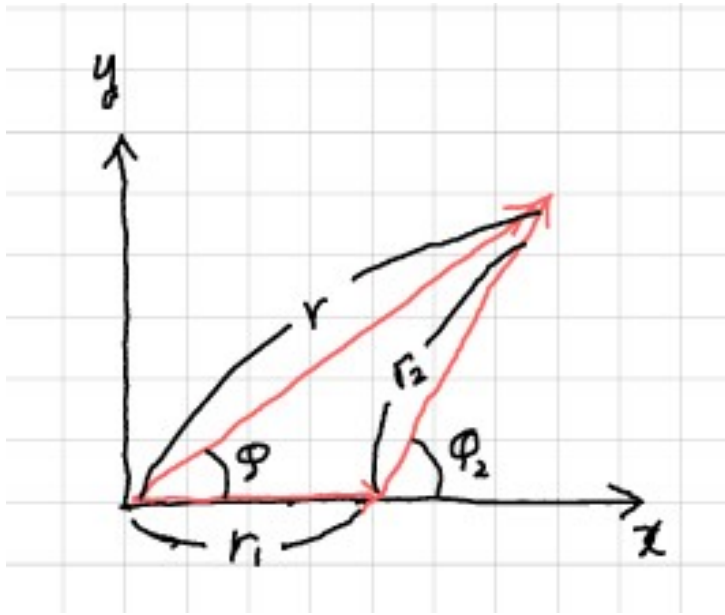
$$\theta = 0 \quad (5.33c)$$

となり (図 5.1)、(5.31) と (5.32) より、

$$e^{in\varphi} J_n(r) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i(l-n)\varphi_2} J_l(r_1) J_{n-l}(r_2) \quad (5.34)$$

が得られる。さらに $n - l$ を改めて l と置き直すと、

$$e^{in\varphi} J_n(r) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\varphi_2} J_{n-l}(r_1) J_l(r_2) \quad (5.35)$$

図 5.1 加法定理における角度と r 、 r_1 、 r_2 の関係。

が得られる。これが Bessel 関数の**加法定理** (addition theorem) である。

加法定理 (5.35) の特別な場合として以下のような関係が得られる。まず、 $n = 0$ とすると、(2.2) を用いて

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l e^{il\varphi_2} J_l(r_1) J_l(r_2) = J_0(r) \quad (5.36)$$

を得る。次に、 $\varphi_2 = 0$ とすると、

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n-l}(r_1) J_l(r_2) = J_n(r_1 + r_2) \quad (5.37)$$

を得る。次に、 $\varphi_2 = \pi$ とすると、

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{n-l}(r_1) J_l(r_2) = J_n(r_1 - r_2) \quad (5.38)$$

を得る。最後に、上の式で $r_1 = r_2 = r$ として

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{n-l}(r) J_l(r) = J_n(0) = \delta_{n0} \quad (5.39)$$

とした後に n を $-n$ に置き換えて (2.2) を用いると、

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n+l}(r) J_l(r) = J_n(0) = \delta_{n0} \quad (5.40)$$

を得る。

加法定理 (5.35) の両辺に $e^{-im\varphi_2}/2\pi$ を掛けて φ_2 で 0 から 2π まで積分することにより、

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi-m\varphi_2)} J_n(r) d\varphi_2 = J_{n-m}(r_1) J_m(r_2) \quad (5.41)$$

が得られる。これを Bessel 関数の**乗法公式** (multiplication formula) という。左辺は、点 $(r_0, 0)$ を中心とする半径 r_2 の円の上での $e^{i(n\varphi-m\varphi_2)} J_n(r)$ の平均値となっている。(5.41) の左辺の積分を r に関する積分に変えることもできる。 φ_2 が 0 から π まで変わるとき、 r は $r_1 + r_2$ から $|r_1 - r_2|$ まで変わる。 φ_2 が π から 2π まで変わるとき、 r は $|r_1 - r_2|$ から $r_1 + r_2$ まで変わる。それと、(5.33a) より

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi_2} &= -\frac{r_1 r_2 \sin \varphi_2}{r} \\ &= \text{sign}(\varphi_2 - \pi) \frac{r_1 r_2 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2}}{r} \\ &= \text{sign}(\varphi_2 - \pi) \frac{r_1 r_2}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} \right)^2} \\ &= \text{sign}(\varphi_2 - \pi) \frac{\sqrt{4r_1^2 r_2^2 - (r^2 - r_1^2 - r_2^2)^2}}{2r} \end{aligned} \quad (5.42)$$

となることを用いると、

$$J_{n-m}(r_1) J_m(r_2) = \frac{2}{\pi} \int_{|r_1-r_2|}^{r_1+r_2} e^{i(n\varphi-m\varphi_2)} \frac{r J_n(r) dr}{\sqrt{4r_1^2 r_2^2 - (r^2 - r_1^2 - r_2^2)^2}} \quad (5.43)$$

を得る。変数変換の過程の式 (5.42) を見ると、右辺の被積分関数の分母は

$$\sqrt{4r_1^2 r_2^2 - (r^2 - r_1^2 - r_2^2)^2} = 2r_1 r_2 |\sin \varphi_2| = 4 \left[\frac{1}{2} r_1 r_2 |\sin \varphi_2| \right] \quad (5.44)$$

ゆえ、図 5.1 の辺長が r 、 r_1 、 r_2 の三角形の面積の 4 倍であることもわかる。乗法公式 (5.43) は $n = m = 0$ のとき特に簡単になって、

$$J_0(r_1) J_0(r_2) = \frac{2}{\pi} \int_{|r_1-r_2|}^{r_1+r_2} \frac{r J_0(r) dr}{\sqrt{4r_1^2 r_2^2 - (r^2 - r_1^2 - r_2^2)^2}} \quad (5.45)$$

となる。

5.6 加法定理と漸化式

加法定理を微分すると、2.4 節で求めた漸化式を再び導くことができる。すなわち、 J_ν の ν が整数の時は、漸化式は加法定理の無限小形と考えることができる。

1. 式 (5.37) を r_2 で微分すると、

$$J'_n(r_1 + r_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n-l}(r_1) J'_l(r_2) \quad (5.46)$$

となり、それで $r_2 = 0$ とし r_1 を r と書き換える。 $J'_m(0)$ で 0 でないのは、 $m \geq 0$ のときの級数展開と (2.2) を考えると、

$$J'_1(0) = -J'_{-1}(0) = \frac{1}{2} \quad (5.47)$$

だけだから、漸化式 (2.31)

$$J'_n(r) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r)] \quad (5.48)$$

が再び得られる。

2. 式 (5.35) を φ_2 で微分すると、

$$\begin{aligned} & \frac{inr_2(r_1 + r_2 e^{i\varphi_2})^{n-1} e^{i\varphi_2}}{r^n} J_n(r) \\ & + n \frac{(r_1 + r_2 e^{i\varphi_2})^n}{r^{n+1}} \frac{r_1 r_2 \sin \varphi_2}{r} J_n(r) - \frac{r_1 r_2 \sin \varphi_2}{r} J'_n(r) \\ & = i \sum_{l=-\infty}^{\infty} l e^{il\varphi_2} J_{n-l}(r_1) J_l(r_2) \end{aligned} \quad (5.49)$$

となり、ここで $\varphi_2 = 0$ とすると、

$$\frac{nr_2}{r_1 + r_2} J_n(r_1 + r_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} l J_{n-l}(r_1) J_l(r_2) \quad (5.50)$$

が得られる。これを r_2 で微分すると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n}{r_1 + r_2} - \frac{nr_2}{(r_1 + r_2)^2} \right) J_n(r_1 + r_2) + \frac{nr_2}{r_1 + r_2} J'_n(r_1 + r_2) \\ & = \sum_{l=-\infty}^{\infty} l J_{n-l}(r_1) J'_l(r_2) \end{aligned} \quad (5.51)$$

となり、それで $r_2 = 0$ とし r_1 を r と書き換える。 $J'_m(0)$ で 0 でないのは、 $m \geq 0$ のときの級数展開と (2.2) を考えると、

$$J'_1(0) = -J'_{-1}(0) = \frac{1}{2} \quad (5.52)$$

だけだから、漸化式 (2.30)

$$\frac{n}{r} J_n(r) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(r) + J_{n+1}(r)] \quad (5.53)$$

が再び得られる。

5.7 参考文献

- [本] N.N.Ja. Vilenkin, A.U. Klimyk (1991) *Representation of Lie Groups and Special Functions, Volume 1: Simplest Lie Groups, Special Functions and Integral Transformations*, Springer Science + Business Media, B.V.
- [本] 山内恭彦, 杉浦光夫 (1960) 連続群論入門 (新数学シリーズ 18), 培風館.
- [雑誌記事] 佐藤勇二 (2025) ベッセル関数と物理現象, 数理科学, **63**(6), No.744, 23–29.

第 6 章

Bessel 関数が出てくる物理的問題

Bessel 関数が出てくる代表的な問題をいくつか挙げておく。

6.1 円筒座標（2次元極座標）での Helmholtz 方程式

円筒座標でのラプラシアンが出てくる線型微分方程式（熱伝導方程式、波動方程式など）で、Bessel 関数が登場する。時間方向には指数関数や三角関数の依存性があるとする、熱伝導方程式や波動方程式では空間成分は、Helmholtz 方程式を満たさなければならない。円筒座標での Helmholtz 方程式は

$$(\Delta + \kappa^2)f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \kappa^2 f = 0 \quad (6.1)$$

と表される。 f を θ 方向には Fourier 展開、 z 方向には f を Fourier 展開もしくは指数関数で表現する。すなわち、

$$f = y(r) e^{in\theta} e^{ik_z z} \quad (6.2)$$

とする。このとき、 $\kappa^2 - k_z^2$ の正負で2通りの場合がある。

- $\kappa^2 - k_z^2 > 0$ の場合、

$$k^2 = \kappa^2 - k_z^2 \quad (6.3)$$

とする。すると、 y は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} y + k^2 y = 0 \quad (6.4)$$

を満たすべきだということになる。 $x = kr$ と置けば

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (6.5)$$

となる。これは Bessel 方程式で、その解は

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \quad (6.6)$$

である。 J_n は第 1 種 Bessel 関数、 Y_n は第 2 種 Bessel 関数である。これらは三角関数っぽい関数である。第 2 種の方は原点で発散する。

- $\kappa^2 - k_z^2 < 0$ の場合、

$$k^2 = k_z^2 - \kappa^2 \quad (6.7)$$

とする。すると、 y は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} y - k^2 y = 0 \quad (6.8)$$

を満たすべきだということになる。 $x = kr$ と置けば

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \left(1 + \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (6.9)$$

となる。これは変形 Bessel 方程式で、その解を

$$y = AI_n(x) + BK_n(x) \quad (6.10)$$

である。 I_n は第 1 種変形 Bessel 関数、 K_n は第 2 種変形 Bessel 関数である。これらは指数関数っぽい関数である。第 2 種の方は原点で発散する。

6.2 球座標における Helmholtz 方程式

球座標での Helmholtz 方程式は

$$(\Delta + \kappa^2)f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right] + \kappa^2 f = 0 \quad (6.11)$$

と表される。 f を (θ, ϕ) 方向には球面調和関数で表現し、

$$f = u(r)Y_n^m(\theta, \phi) \quad (6.12)$$

とする。すると、 r 方向には

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \left(\kappa^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) u = 0 \quad (6.13)$$

を満たすべきだということになる。 $x = \kappa r$ と置けば

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{du}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right) u = 0 \quad (6.14)$$

となる。これは球 Bessel 方程式で、その解は

$$u = Aj_n(x) + Bn_n(x) \quad (6.15)$$

である。 j_n は第 1 種球 Bessel 関数、 n_n は第 2 種球 Bessel 関数である。これらは三角関数っぽい関数である。第 2 種の方は原点で発散する。

いま

$$u(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} y(x) \quad (6.16)$$

と変数変換すると、 y は

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left[1 - \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}{x^2} \right] y = 0 \quad (6.17)$$

を満たす。すなわち、球 Bessel 関数は半奇数次の Bessel 関数を用いて

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \quad (6.18)$$

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x) \quad (6.19)$$

と表すことができる。

6.3 参考文献

本章では以下の本を参考にした。

- [本] Frank Bowman (著), 平野鉄太郎 (訳) (1963) ベッセル関数入門 (実用数学全書), 日新出版.
- [本] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信 (1960) 数学公式 III —特殊函数— (岩波全書), 岩波書店.