

地球の熱史の方程式の振る舞い

吉田茂生

平成 30 年 7 月 25 日

地球の熱史の方程式を簡単化した方程式の解を考えることで、その振る舞いを考えてゆく。講義に使うには細かすぎるので、ここにメモとして置いておく。

1 熱史を考える方程式

熱史を考えるための式は、エネルギーの式である。

$$\frac{dE}{dt} = -Q_S + H_{rad} \quad (1)$$

ここで E は地球の内部エネルギー、 Q_A は地表面熱流量、 H_{rad} は放射性熱源である。このままでは微分方程式としては解けないので、各項の具体的表現を求め、微分方程式として解けるようにすることを考える。

まず左辺は冷却を表すと考えて

$$\frac{dE}{dt} = M_E C \frac{dT}{dt} \quad (2)$$

とする。ここで、 M_E は地球の質量、 C は比熱¹、 T はマンツルの平均的な温度である。本当はコアも別に考えなければいけないけれども、コアの質量はマンツルの約半分なので、第 0 近似的にはまずマンツルを考えて、コアも同じ速さで冷えてきていると考えることにする。

次に、地表面熱流量 Q_S である。ヌッセルト数-レイリー数の関係

$$Nu \approx \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^\beta \quad (3)$$

を用いる。 Nu は Nusselt 数、 Ra は Rayleigh 数、 Ra_c は臨界 Rayleigh 数である。 β は定数で、標準的には $\beta = 1/3$ である。 Q_S との関係は、Nusselt 数 Nu の定義より

$$Q_S = Nu A k \frac{T - T_S}{D} \quad (4)$$

である。ここで、 A は地球表面積、 k はマンツルの熱伝導率、 T_S は地表温度、 D はマンツルの厚さである。これに Rayleigh 数の定義

$$Ra = \frac{\alpha g (T - T_S) D^3}{\kappa \nu} \quad (5)$$

¹定圧比熱と定積比熱の差はそう大きくはないので、その違いは、気にしないことにする。

をさらに加える。ここで、 α は熱膨張率、 g は重力加速度、 κ は温度伝導率（熱拡散率）、 ν は動粘性係数である。すると、

$$\begin{aligned} Q_S &= Ak \frac{T - T_S}{D} \left(\frac{\alpha g (T - T_S) D^3}{\kappa \nu Ra_c} \right)^\beta \\ &= Ak \left(\frac{\alpha g}{\kappa Ra_c} \right)^\beta D^{-1+3\beta} (T - T_S)^{1+\beta} \nu^{-\beta} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここでは、 $\beta = 1/3$ ならば、 Q_S が D に依存しなくなることが一つのポイントである。もともと、標準的に使われる $\beta = 1/3$ は、そうなるように導かれたということもできる。さらに、粘性係数 ν がマンツルの温度に強く依存するということも重要である。以下では、それを

$$\nu = \nu_0 \exp \left[\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (7)$$

と書いてみたり

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-n} \quad (8)$$

($n \approx 35$) と書いてみたりする。ここで、 ν_0 は $T = T_0$ (現在のマンツルの平均温度) における粘性係数、 E_a は活性化エネルギーである。このようにして、 Q_S を T の関数として表すことができた。

最後に、右辺第2項は放射性熱源である。放射性元素は U, Th, K による寄与の和だが、まとめて近似的に

$$H_{rad} = H_{rad,0} \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \quad (9)$$

のように表してよいことがわかっている。ここで t は現在を 0 とする時間、 τ_{rad} は平均的な壊変定数、 $H_{rad,0}$ は現在の放射性熱源である。

以上をまとめると、熱史の方程式は

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Ak \left(\frac{\alpha g}{\kappa Ra_c} \right)^\beta D^{-1+3\beta} (T - T_S)^{1+\beta} \nu^{-\beta} + H_{rad,0} \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \quad (10)$$

となる。 ν の温度依存性を入れて、いろいろな係数をまとめて定数扱いする場合は、粘性として指数関数型 (7) を用いるときは

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Q_0 \left\{ \left(\frac{T - T_S}{T_0 - T_S} \right)^{1+\beta} \exp \left[-T_\nu \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] - Ur_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \right\} \quad (11)$$

ここで、

$$Q_0 = \frac{Ak(T_0 - T_S)}{D} \left(\frac{Ra_0}{Ra_c} \right)^\beta \quad (12)$$

$$Ra_0 = \frac{\alpha g (T_0 - T_S) D^3}{\kappa \nu_0} \quad (13)$$

$$T_\nu = \beta \frac{E_a}{R} \quad (14)$$

$$Ur_0 = \frac{H_{rad,0}}{Q_0} \quad (15)$$

で、 D はマンツルの厚さ、 Ra_0 は現在のマンツルの Rayleigh 数である。 Ur_0 は現在の Urey 比である。Urey 比とは、放射性熱源と地表熱流量の比である。粘性としてべき乗型 (8) を用いるときは

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Q_0 \left[\left(\frac{T - T_S}{T_0 - T_S} \right)^{1+\beta} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\beta n} - Ur_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \right] \quad (16)$$

となる。

上で出てきたように放射性熱源と地表面熱流量の比を Urey 比と呼ぶ。

$$Ur = \frac{H_{rad}}{Q_S} \quad (17)$$

ここで

$$Q_S \equiv \oint_{Earth \ Surface} \underline{q} \cdot d\underline{S} \quad (18)$$

である。 $Q_S = 44$ TW、 $H_{rad,0} = 20$ TW と見積もると、現在の地球の Urey 比は $Ur_0 = 20$ TW/44 TW = 0.45 となる。ただし、熱史を考える上では、大陸地殻の放射性熱源（大陸地殻には放射性熱源が濃集している）はマンツル対流と関わないので除外して考えるべきだという考え方もあり、その考え方によれば、現在の地球の Urey 比は $Ur_0 = (20 - 7)$ TW/(44 - 7) TW = 0.35 となる（おおむね 1/3）。

2 単純な熱史の方程式の解の振る舞いその 1 : $\beta = 0$ で、放射性元素の時間依存性が無いとき

このような方程式の解がどう振舞うかを単純化した式で調べていく。

まず、 $\beta = 0$ で放射性熱源の時間依存性が無いときを考える。すなわち、

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Q_0 \left[\frac{T - T_S}{T_0 - T_S} - Ur_0 \right] \quad (19)$$

の振る舞いを考える。これは単純な式だから、答えはすぐにわかる。答えは

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-t/\tau} \quad (20)$$

となる。ここで、 t は現在を 0 とする時間で、

$$T_\infty = T_S + (T_0 - T_S) Ur_0 \approx T_0 Ur_0 \quad (21)$$

$$\tau = M_E C T_0 / Q_0 \quad (22)$$

である。わかること：

1. 時間が無限に経つと、右辺が 0 になるような温度に近づく。つまり、放射性熱源による発熱と対流による放熱が釣り合うような温度になる。その温度は、現在の温度に Urey 比をかけたくらいである。
2. 温度が落ち着くための時定数 τ は、現在の熱流がずっと続いたとして地球の温度が 0 になる時間である。それはおおむね 1.5×10^{31} J/40 TW ≈ 10 Gyr (100 億年) となる。
3. Urey 比がおおむね 1 より小さければ、現在地球は冷えているということだし、1 より大きければ暖まっているということになる。

3 単純な熱史の方程式の解の振る舞いその2： $\beta > 1$ で、放射性元素の時間依存性が無いとき

次に β を大きくする効果を見るために、簡単に積分できる例として、べき乗粘性の式 (16) で、 $\beta = 1, n = 0$ もしくは $\beta = 1/3, n = 2$ で $T, T_0 \gg T_S$ としてみよう。相変わらず、放射性熱源の時間依存性はないことにする。さらに、現在地球は冷えているものとし $Ur_0 < 1$ とする。

すると、解く式は

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Q_0 \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^2 - Ur_0 \right] \quad (23)$$

書き換えると

$$\frac{d(T/T_0)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^2 - Ur_0 \right] \quad (24)$$

である。変数分離型として解く。

$$\frac{1}{2\sqrt{Ur_0}} \int_1^{T/T_0} \left(\frac{1}{(T/T_0) - \sqrt{Ur_0}} - \frac{1}{(T/T_0) + \sqrt{Ur_0}} \right) d(T/T_0) = -\frac{t}{\tau} \quad (25)$$

ここでも t は現在を 0 とする時間である。積分を実行して

$$\frac{1}{2\sqrt{Ur_0}} \left[\ln \frac{(T/T_0) - \sqrt{Ur_0}}{(T/T_0) + \sqrt{Ur_0}} - \ln \frac{1 - \sqrt{Ur_0}}{1 + \sqrt{Ur_0}} \right] = -\frac{t}{\tau} \quad (26)$$

整理すると

$$T = \sqrt{Ur_0} T_0 \frac{(1 + \sqrt{Ur_0}) + (1 - \sqrt{Ur_0}) e^{-2\sqrt{Ur_0}t/\tau}}{(1 + \sqrt{Ur_0}) - (1 - \sqrt{Ur_0}) e^{-2\sqrt{Ur_0}t/\tau}} \quad (27)$$

となる。わかること：

1. 時間が無限に経つと、微分方程式の右辺が 0 になるような温度に近づく。つまり、放射性熱源による発熱と対流による放熱が釣り合うような温度になる。その温度は、現在の温度に Urey 比の平方根をかけたくらいである。

$$T \rightarrow \sqrt{Ur_0} T_0 \quad (28)$$

一般に、 β と粘性則の n を用いれば

$$T \rightarrow (Ur_0)^{1/(1+\beta+\beta n)} T_0 \quad (29)$$

で、 n が十分に大きければ、 $T \rightarrow T_0$ となる。 n が大きいと、温度が少し低下しただけで熱輸送が極端に小さくなるので、現在温度からそれほど変化できなくなる。

2. 時間を過去に遡ると、

$$e^{2\sqrt{Ur_0}(-t/\tau)} = \frac{1 + \sqrt{Ur_0}}{1 - \sqrt{Ur_0}} \quad (30)$$

すなわち

$$(-t) = \frac{\tau}{2\sqrt{Ur_0}} \ln \frac{1 + \sqrt{Ur_0}}{1 - \sqrt{Ur_0}} \quad (31)$$

において解が発散する。これはなぜかといえば、過去に遡ると、マンツルの温度が高くなるので、熱輸送効率が良くなって、より冷えやすくなるためである。今は仮に $n = 2$ として解いたのだが、実際は n がもっと大きいので、この傾向はより強まる。このような解の発散を thermal catastrophe と呼ぶことがある。

4 単純な熱史の方程式の解の振る舞いその3：線形化した式で、放射性元素の時間依存性があるとき

次に、放射性熱源の時間変化の効果を見るために、べき乗粘性の式 (16) を次のように簡単化してゆく。まず、 $T, T_0 \gg T_S$ として、

$$M_E C \frac{dT}{dt} = -Q_0 \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{1+\beta+\beta n} - U r_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \right] \quad (32)$$

とする。次に、右辺第1項に限って $T = T_0$ のまわりに線形化して

$$T = T_0 + \Theta \quad (33)$$

として、

$$M_E C \frac{d\Theta}{dt} = -Q_0 \left[1 + \frac{\Theta}{T_0} (1 + \beta + \beta n) - U r_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) \right] \quad (34)$$

としたものを解いてみることにする。現在を $t = 0$ として積分すると、

$$\begin{aligned} \Theta &= -\frac{T_0}{1 + \beta + \beta n} \left[1 - \exp \left(-\frac{1 + \beta + \beta n}{\tau} t \right) \right] \\ &\quad + U r_0 T_0 \frac{\tau_{rad}}{(1 + \beta + \beta n)\tau_{rad} - \tau} \left[\exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) - \exp \left(-\frac{1 + \beta + \beta n}{\tau} t \right) \right] \\ &= -\frac{T_0}{1 + \beta + \beta n} \left[1 - \exp \left(-\frac{1 + \beta + \beta n}{\tau} t \right) \right] \\ &\quad + U r_0 T_0 \frac{\tau_{urey}}{\tau} \left[\exp \left(-\frac{t}{\tau_{rad}} \right) - \exp \left(-\frac{1 + \beta + \beta n}{\tau} t \right) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{urey}} &= \frac{1 + \beta + \beta n}{\tau} - \frac{1}{\tau_{rad}} \\ &= \frac{(1 + \beta + \beta n)\tau_{rad} - \tau}{\tau \tau_{rad}} \end{aligned} \quad (36)$$

と定義した。この時間スケールは、 $\tau_{rad} = 3$ Gyr、 $\tau = 10$ Gyr、 $\beta = 1/3$ 、 $n = 35$ とすれば、 $\tau_{urey} = 1$ Gyr となる。

現在の冷却率は

$$\frac{d\Theta}{dt}(t=0) = -\frac{T_0}{\tau} (1 - U r_0) \quad (37)$$

ということになる。 $T_0 = 2000$ K、 $U r_0 = 1/3$ 、 $\tau = 10$ Gyr とすれば、冷却率は 130 K/Gyr となる。

Urey 比は

$$\begin{aligned} U r &= \frac{U r_0 e^{-t/\tau_{rad}}}{1 + (\Theta/T_0)(1 + \beta + \beta n)} \\ &= \frac{U r_0 e^{-t/\tau_{rad}}}{e^{-[(1+\beta+\beta n)/\tau]t} + U r_0 [(1 + \beta + \beta n)\tau_{urey}/\tau] [e^{-t/\tau_{rad}} - e^{-[(1+\beta+\beta n)/\tau]t}]} \\ &= \left\{ e^{-t/\tau_{urey}} + (1 + \beta + \beta n) \frac{\tau_{urey}}{\tau} [1 - e^{-t/\tau_{urey}}] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (38)$$

となる。 $t \gg \tau_{urey}$ では、

$$Ur \rightarrow \frac{\tau}{\tau_{urey}(1 + \beta + \beta n)} = \frac{\tau_{rad} - \tau/(1 + \beta + \beta n)}{\tau_{rad}} \quad (39)$$

となる。この極限值は、 $\tau_{rad} = 3$ Gyr、 $\tau = 10$ Gyr、 $\beta = 1/3$ 、 $n = 35$ とすれば、0.74 となる。放射性熱源の時間変化を考えなければ、方程式の右辺が 0 に近づくので、この極限值は 1 に近づくのであった。時間変化を考えたことで、0.74 の程度になった。ところが、これを現在の地球と比べてみると、現在の地球の年齢は τ_{urey} よりも十分に大きいにもかかわらず、Urey 比は $1/3$ の程度である。この問題は、現在でも議論中である。上の式から直接的に考えると、 β や n を小さくすると問題は解消する。たとえば、プレートの bending に対する抵抗を考えると $\beta \approx 0$ になるとする説がある [Conrad and Hager, 1999]。あるいは、温度が上がると脱水してプレートが硬くなるという説もある [Sleep, 2000]。すると n が下がる

5 熱史の方程式を簡単化せずに数値的に積分するとき

以上を踏まえて、熱史の式 (16) を現在から過去に向かって積分した計算例が Korenaga (2008) Fig.4 にある。わかること：

1. 時間を過去に遡ると、現在の Urey 比が小さめだと、有限の時間で温度が発散する (thermal catastrophe)。これはなぜかといえ、過去に遡ると、マンツルの温度が高くなるので、熱輸送効率が良くなって、より冷えやすくなるためである。
2. 逆に現在の Urey 比が大きめだと、過去には地球が暖まっていた時代が出てくる。
3. そういふわけで、過去の温度がありえそふな範囲に収まるためには、現在の Urey 比が 0.7 から 0.75 程度でないといけなふと結論付けられる。ところが、地球化学的な議論によれば、現在の Urey 比は $1/3$ 程度であり、大きくても 0.4 くらいである。解決策としては、その矛盾を地球深部に押し付けるか、 β や n を小さくするといふたことになる。 β や n を小さくすると、thermal catastrophe が起こりづらくなる。
4. 時間を未来に積分してゆくと、やがては微分方程式の右辺が小さくなるように変化する。つまり、放射性熱源による発熱と対流による放熱がだいたい釣り合うような温度になる。つまり、地球はやがて放射性熱源の減少に歩調を合わせるように冷却してゆくようになる。

6 参考文献

- Conrad, C.P.; Hager, B.H. (1999) The thermal evolution of an earth with strong subduction zones, *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 3041–3044.
- Jaupart, Claude; Mareschal, Jean-Claude (2011) *Heat Generation and Transport in the Earth*, Cambridge University Press の 10 章
これが主に参考にしたもの
- Korenaga, Jun (2008) Urey ratio and the structure and evolution of Earth’s mantle, *Reviews of Geophysics*, **46**, RG2007, pp.32, doi:10.1029/2007RG00241
地球の熱史のレビュー

- Sleep, N.H. (2000) Evolution of the mode of convection within terrestrial planets, *J. Geophys. Res.*, **105**, 17563–17578.