

Euler 角と剛体運動

吉田茂生

2018 年 10 月 26 日

目次

第 1 章	Euler 角と回転	5
1.1	Euler 角の定義	5
1.2	参考文献	11
第 2 章	剛体回転の力学と Euler 角	13
2.1	Euler 角の微小回転	13
2.2	Euler 角と剛体の角速度ベクトル	15
2.3	Euler 角と剛体の角加速度ベクトル	17
2.4	Euler 角を用いた剛体の運動方程式	21
2.5	軸対称剛体の自由回転運動	25
2.6	参考文献	28

第 1 章

Euler 角と回転

1.1 Euler 角の定義

Euler 角の定義にはいくつかの流儀があって、それによって回転行列の表現も少しずつ異なる。座標軸 (x, y, z) から別の座標軸 (X, Y, Z) への変換を考える。両方の座標系の赤道面の交線を節線と呼ぶ (図 1.1)。Euler 角は 3 つの回転からなる。まず、 z 軸の周りに ϕ 回転し、節線の周りに θ 回転し、最後に Z 軸の周りに ψ 回転する (図 1.2)。といっても、以下の 2 つのポイントがあるので、行列の定義には 4 通りの可能性がある (表 1.1)

1. ベクトルの矢印は固定して座標系の回転による座標成分の変換を考えるか、座標系は固定してベクトルの矢印を回すか。これらを表現する行列は逆行列の関係にある。剛体の力学への応用を考えるときは通常は前者を考える。というのは、空間固定座標系 xyz と剛体固定座標系 XYZ で同じベクトルを見たときにどう見え方が違うかというようなことを議論するからである。量子力学への応用を考えるときは後者を考える場合が多い。というのは、量子力学では関数の回転

$$[T_R f](\mathbf{r}) \equiv f(R^{-1}\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

を考え、そのときには座標系の方は固定しておきたいからである。

2. 第 1 の回転によって x 軸を節線に持ってゆくか y 軸が節線になるようにするか。図 1.2 は第 1 の回転後の y 軸を節線にした場合である。この場合、 Z 軸の方向が元の座標系から見て球座標の (θ, ϕ) で表される方向に来るという利点がある。

以下、主に最初の回転で節線に y 軸を持ってゆく場合に具体的に考えてゆく (図 1.2)。つまり、(A) と (C) のパターンである。

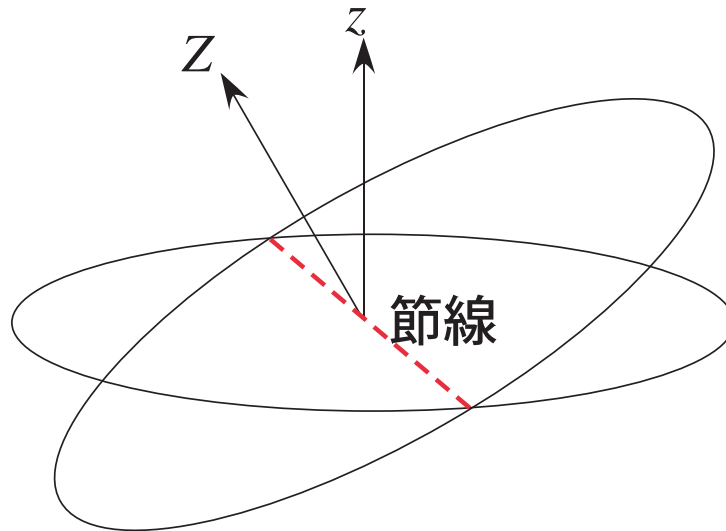


図 1.1 2つの座標系の節線 (line of nodes)。

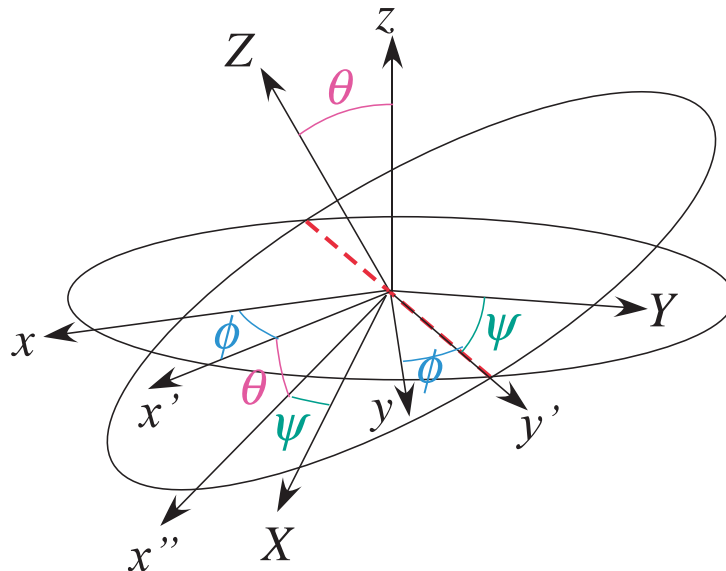


図 1.2 オイラー角。第 1 の回転の後で y 軸が節線に来るようにする場合。このやり方では、 x, x', y, y' 軸は元の xyz 座標系の赤道面内に、 x'', X, y', Y 軸は最後の XYZ 座標系の赤道面内にある。

表 1.1 Euler 角の取り方の文献による違い。

	座標系の変換 (剛体力学)	ベクトルの回転 (量子力学)
節線が中間 y 軸	(A) Ginsberg (2008)	(C) 山内 & 杉浦 (1960), Edmonds (1960), 犬井 et al. (1976)
節線が中間 x 軸	(B) Goldstein et al. (2006)	(D) Gel'fand & Shapiro (1956)

座標系を回すという意味での座標変換を考える。これは (A) のパターンである。このときは、行列を順々に掛けていけばよい。まず、座標軸に関する回転による座標変換の行列

$$R_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$R_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

を準備する*1。最初の回転では y 軸を節線に持ってくる。座標軸は (x', y', z) に変わる。ベクトル ξ の座標成分を縦に並べたものを $\xi|_{\text{座標系}}$ のように書いておくことにすると、

$$\xi|_{x'y'z} = R_3(\phi)\xi|_{xyz} \quad (1.5)$$

になり、次の回転で座標軸は (x'', y', Z) に変わる。

$$\xi|_{x''y'Z} = R_2(\theta)\xi|_{x'y'z} \quad (1.6)$$

最後の回転で座標軸は (X, Y, Z) に変わる。

$$\xi|_{XYZ} = R_3(\psi)\xi|_{x''y'Z} \quad (1.7)$$

となるから、全部あわせると座標成分は

$$\xi|_{XYZ} = R_3(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi)\xi|_{xyz} \quad (1.8)$$

と変わる。すなわち、全部の回転行列は

$$\begin{aligned} & R^{(y'\text{-node})}(\phi, \theta, \psi) \\ &= R_3(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \cos \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \cos \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.9) \end{aligned}$$

*1 (A) のときは R_1 は使わないが、後で (B) も結果だけ書いておくので、用意しておく。

となる*²。なお、(B) の場合は 2 番目の回転行列が $R_1(\theta)$ になるので、回転行列としては

$$\begin{aligned}
R^{(x'\text{-node})}(\phi, \theta, \psi) &= R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{1.10}
\end{aligned}$$

となる。

一方で、ベクトルを回す場合は、話は少し違う。以下、第 1 の回転で (C) の y 軸を節線に持ってくる場合で考える*³。最初の回転の行列を $S_z(\phi)$ 、次の回転の行列を $S_{\text{node}}(\theta)$ 、最後の回転の行列を $S_Z(\psi)$ と書くと*⁴、それで、ベクトルが

$$\xi''' = S_Z(\psi)S_{\text{node}}(\theta)S_z(\phi)\xi \tag{1.11}$$

と変わるというのは形式的には座標を回す場合と同じだが、この場合 ξ も ξ''' は矢印として異なるベクトルであり、成分は元の座標系 (x, y, z) に対する成分である。問題は $S_Z(\psi)$ や $S_{\text{node}}(\theta)$ が、すでに回転した軸に関する回転なので、その表現が先に座標回転の時に考えた行列のように簡単ではないということである。つまり、ベクトルを回す場合は、記述に用いる座標系は常に (x, y, z) 系なので、最初の座標系に対して斜交する軸を中心に回転すると回転行列が簡単でなくなるのである。それを求めておく必要がある。まず、

$$S_{\text{node}}(\theta) = S_z(\phi)S_y(\theta)S_z^{-1}(\phi) \tag{1.12}$$

である。つまりいったん節線を y 軸に戻しておいてから θ 回転し、ふたたび節線に回し戻すという操作が必要である。同様にして、

$$\begin{aligned}
S_Z(\psi) &= S_{\text{node}}(\theta)S_z(\psi)S_{\text{node}}^{-1}(\theta) \\
&= S_z(\phi)S_y(\theta)S_z(\psi)S_y^{-1}(\theta)S_z^{-1}(\phi)S_z(\phi)S_y(\theta)S_z^{-1}(\phi)S_z(\phi) \tag{1.13}
\end{aligned}$$

である。そこで、合成した回転行列は

$$\begin{aligned}
S^{(y'\text{-node})}(\phi, \theta, \psi) &= S_Z(\psi)S_{\text{node}}(\theta)S_z(\phi) \\
&= S_z(\phi)S_y(\theta)S_z(\psi)S_y^{-1}(\theta)S_z^{-1}(\phi)S_z(\phi)S_y(\theta)S_z^{-1}(\phi)S_z(\phi) \\
&= S_z(\phi)S_y(\theta)S_z(\psi) \tag{1.14}
\end{aligned}$$

*² Ginsberg et al. (2008) の角度記号はここで用いているものと ψ と ϕ が逆で、そこでの回転行列は、この記号では $R(\psi, \theta, \phi)$ と書かれる。

*³ (D) の場合は、以下で出てくる y を x に読み替える。

*⁴ 矢印を止めておいて座標系を変える場合と、矢印を回す場合とでは回転角の符号が逆になるので、それを強調するために R ではなく S と書くことにする。

となる。つまり、元の座標系での回転行列を座標系を回す場合とは逆順にかけたものになる。具体的には

$$S_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = R_1(-\phi) \quad (1.15)$$

$$S_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} = R_2(-\phi) \quad (1.16)$$

$$S_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3(-\phi) \quad (1.17)$$

となるので、

$$\begin{aligned} & S^{(y'\text{-node})}(\phi, \theta, \psi) \\ &= S_z(\phi)S_y(\theta)S_z(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.18)$$

が得られる*⁵。 e_z が回転すると e_Z になり、その e_Z が球座標の (θ, ϕ) で表される向きを向いていることを反映して行列の第 3 列目が、その Z 軸方向の単位ベクトルの直交座標での表現になっている。つまり

$$e_Z = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = S(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_z \quad (1.19)$$

*⁵ Edmonds (1960), 犬井 et al. (1976) の角度記号の α, β, γ はこの ϕ, θ, ψ に対応する。

ということである。なお、(D) の場合は 2 番目の回転行列が $S_x(\theta)$ になるので、回転行列としては

$$\begin{aligned}
S^{(x'\text{-node})}(\phi, \theta, \psi) &= S_z(\phi)S_x(\theta)S_z(\psi) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{1.20}
\end{aligned}$$

となる*6。

いろいろ考えてきたが、矢印を止めて座標軸を回すのと、座標軸を止めて矢印を回すのとは、当然ながら行列としては逆行列の関係にある。

$$S(\phi, \theta, \psi) = R^{-1}(\phi, \theta, \psi) = {}^tR(\phi, \theta, \psi) \tag{1.21}$$

なので、 R と S を別々に求める必要は無かったといえ無かった。とはいえ、いろいろな考え方で矛盾無く答えが求められていることを確認することも重要である。

矢印の回転で掛け算が逆順になるのは、基底の変換を考えた方がわかりやすい。(C) の方式で考えるとき、第 1 の回転で基底は

$$(\mathbf{e}_{x'} \ \mathbf{e}_{y'} \ \mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z) S_z(\phi) \tag{1.22}$$

になり、第 2 の回転で基底は

$$(\mathbf{e}_{x''} \ \mathbf{e}_{y'} \ \mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}_{x'} \ \mathbf{e}_{y'} \ \mathbf{e}_z) S_y(\theta) \tag{1.23}$$

になり、第 3 の回転で基底は

$$(\mathbf{e}_X \ \mathbf{e}_Y \ \mathbf{e}_Z) = (\mathbf{e}_{x''} \ \mathbf{e}_{y'} \ \mathbf{e}_z) S_z(\psi) \tag{1.24}$$

となる。すると、基底の回転をまとめると

$$(\mathbf{e}_X \ \mathbf{e}_Y \ \mathbf{e}_Z) = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z) S_z(\phi) S_y(\theta) S_z(\psi) \tag{1.25}$$

*6 Gel'fand and Shapiro (1956) の (9) は φ_2 を ϕ 、 φ_1 を ψ と読みかえるとこれに等しくなるのだが、2 点問題がある。(a) 訳注のとおり、Euler 角の定義の説明からすると、(9) 式では掛け算の順序を逆にすることを忘れていて、(9) 式では φ_1 と φ_2 を入れ替えなければならない。(b) Fig.1 は矢印を変えるというより座標系の取替えを示しており、ここでいう (B) で、回転角の符号を変えたものを見ているとも読める。それならば、(9) 式は $R(-\varphi_1, -\theta, -\varphi_2) = R_3(-\varphi_2)R_1(-\theta)R_3(-\varphi_1)$ を表しているとも見られる。そう見れば間違っていない。

になるというわけである。回転行列はしたがって、

$$S^{(y'\text{-node})}(\phi, \theta, \psi) = S_z(\phi)S_y(\theta)S_z(\psi) \quad (1.26)$$

となる。

1.2 参考文献

- Edmonds, A.R. (1960) *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press
- Gel'fand, I.M.; Shapiro, Z.Ya. (1956) Representations of the Group of Rotations of 3-Dimensional Space and their Applications, *American Mathematical Society Translations*, Ser.2, Vol.2, 207–316
- Ginsberg, Jerry (2008) *Engineering Dynamics*, Cambridge University Press
- Goldstein, Herbert; Poole, Charles; Safko, John (2006) 古典力学 (上) (原書第 3 版), 吉岡書店
- 犬井 鉄郎, 田辺 行人, 小野寺 嘉孝 (1976) 応用群論 — 群表現と物理学 — (増補版), 裳華房
- 山内 恭彦, 杉浦 光夫 (1960) 連続群論入門 [新数学シリーズ 18], 培風館

第 2 章

剛体回転の力学と Euler 角

ここでは、Euler 角としては先に定義した (A) と (B) の方式で考える。すなわち、回転行列は座標回転に対する成分の変化を表すものとする。空間固定系を (x, y, z) で表し、剛体固定系を (X, Y, Z) で表す。たいていは、剛体固定系は 3 つの軸を慣性主軸の方向に選ぶ。二つの系は Euler 角で結ばれる。力学の教科書では Goldstein et al. (2006) が (B) 方式（節線が x' 軸）、Ginsberg (2008) が (A) 方式（節線が y' 軸）である。

2.1 Euler 角の微小回転

Euler 角による微小回転によって剛体に固定したベクトルが空間固定系から見てどのように変化するかを考える。いま、剛体に固定したベクトルを一つ取ってきて、それを \mathbf{r} と書くことにする。その空間固定系と剛体固定系での成分の関係は

$$\mathbf{r}|_{XYZ} = R(\phi, \theta, \psi)\mathbf{r}|_{xyz}(\phi, \theta, \psi) \quad (2.1)$$

である。一方、Euler 角が微小変化したときの空間固定系と剛体固定系での成分の関係は

$$\mathbf{r}|_{XYZ} = R(\phi + d\phi, \theta + d\theta, \psi + d\psi)\mathbf{r}|_{xyz}(\phi + d\phi, \theta + d\theta, \psi + d\psi) \quad (2.2)$$

である。すると、空間固定系から見ると、Euler 角の微小変化によって、ベクトルは以下のように変化したことになる。

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}|_{xyz} &= \mathbf{r}|_{xyz}(\phi + d\phi, \theta + d\theta, \psi + d\psi) - \mathbf{r}|_{xyz}(\phi, \theta, \psi) \\ &= R^{-1}(\phi + d\phi, \theta + d\theta, \psi + d\psi)\mathbf{r}|_{XYZ} - R^{-1}(\phi, \theta, \psi)\mathbf{r}|_{XYZ} \\ &= {}^tR(\phi + d\phi, \theta + d\theta, \psi + d\psi)\mathbf{r}|_{XYZ} - {}^tR(\phi, \theta, \psi)\mathbf{r}|_{XYZ} \\ &= \left(d\phi \frac{\partial {}^tR}{\partial \phi} + d\theta \frac{\partial {}^tR}{\partial \theta} + d\psi \frac{\partial {}^tR}{\partial \psi} \right) \mathbf{r}|_{XYZ} \\ &= \left(d\phi \frac{\partial {}^tR}{\partial \phi} + d\theta \frac{\partial {}^tR}{\partial \theta} + d\psi \frac{\partial {}^tR}{\partial \psi} \right) R\mathbf{r}|_{xyz} \\ &= \left(d\phi \frac{\partial {}^tR}{\partial \phi} R + d\theta \frac{\partial {}^tR}{\partial \theta} R + d\psi \frac{\partial {}^tR}{\partial \psi} R \right) \mathbf{r}|_{xyz} \end{aligned} \quad (2.3)$$

この右辺にかかっている演算子が微小回転演算子となる。

具体的に微小回転演算子を (B) 方式で計算してみる。(A) 方式でも同様にできるが、省略する。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^t R^{(x'-\text{node})}}{\partial \phi} R^{(x'-\text{node})} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^t R^{(x'-\text{node})}}{\partial \theta} R^{(x'-\text{node})} \\
&= \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \psi \sin \theta \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \cos \phi & -\cos \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\cos \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^t R^{(x'-\text{node})}}{\partial \psi} R^{(x'-\text{node})} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\cos \psi \cos \phi + \sin \psi \cos \theta \sin \phi & 0 \\ -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \theta \cos \phi & 0 \\ \cos \psi \sin \theta & -\sin \psi \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

したがって、微小回転演算子を dR と書くと

$$d\mathbf{r}|_{xyz} = dR\mathbf{r}|_{xyz} \tag{2.7}$$

で、

$$\begin{aligned}
 dR &= d\phi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &+ d\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\cos \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \\
 &+ d\psi \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。また、

$$dR = d\boldsymbol{\Omega} \times \tag{2.9}$$

$$d\mathbf{r}|_{xyz} = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|_{xyz} \tag{2.10}$$

と書くと、

$$\begin{aligned}
 d\boldsymbol{\Omega} &= d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\theta \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + d\psi \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= d\phi \mathbf{e}_z + d\theta \mathbf{e}_{\text{node}} + d\psi \mathbf{e}_Z
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

とも書ける。

2.2 Euler 角と剛体の角速度ベクトル

角速度ベクトルは、矢印としては座標系に依らない。式 (2.11) を参照すると、

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{e}_{\text{node}} + \dot{\psi} \mathbf{e}_Z \tag{2.12}$$

と書き表すことができる。前節のような計算をするまでもなく、 $\dot{\phi}$ は z 軸 \mathbf{e}_z の周りの回転、 $\dot{\theta}$ は節線 \mathbf{e}_{node} の周りの回転、 $\dot{\psi}$ は Z 軸 \mathbf{e}_Z の周りの回転だから上のよう書けると言うこともできる。 ϕ を歳差角、 θ を章動角、 ψ を自转角と呼ぶことがある（力学用語）。ただし、定義次第とはいえ、 ϕ 、 θ 、 ψ がそれぞれ歳差、章動、自転を表しているとは必ずしも限らない。典型的にこの名称が相応しいのは、対称ゴマが強制歳差運動するときとか、地球のいわゆる歳差運動の場合に限る（そのときでも章動は微妙である）。

具体的な座標成分は、見ている系と Euler 角の定義によって異なる。空間固定系から見ると、

(A) 方式では

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

(B) 方式では

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

だから、

$$\boldsymbol{\omega}|_{(A),\text{space}} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\omega}|_{(B),\text{space}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

となる。

剛体固定系から見ると、(A) 方式では

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

(B) 方式では

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

だから、

$$\boldsymbol{\omega}|_{(A),\text{body}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\omega}|_{(B),\text{body}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

となる。

2.3 Euler 角と剛体の角加速度ベクトル

角加速度ベクトルも求めておこう。これも矢印としては空間固定座標系と剛体固定座標系で同じになる。というのは、 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ だからである。角加速度ベクトルが空間固定座標と剛体固定座標で同じということが、対称ゴマにおいて空間円錐と物体円錐とがすべらずに回るということにつながっている。

角速度ベクトルを実際に微分してみよう。ただし、

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{e}_{\text{node}} + \dot{\psi} \mathbf{e}_Z \quad (2.29)$$

に入っている単位ベクトルの微分は、空間固定座標系と剛体固定座標系で異なるので注意を要する。空間固定座標系では

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{space}} \mathbf{e}_z = 0 \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{space}} \mathbf{e}_{\text{node}} = \dot{\phi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\text{node}} \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{space}} \mathbf{e}_Z = (\dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{e}_{\text{node}}) \times \mathbf{e}_Z \quad (2.32)$$

剛体固定座標系では

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} \mathbf{e}_z = -(\dot{\psi}\mathbf{e}_Z + \dot{\theta}\mathbf{e}_{\text{node}}) \times \mathbf{e}_z \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} \mathbf{e}_{\text{node}} = -\dot{\psi}\mathbf{e}_Z \times \mathbf{e}_{\text{node}} \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} \mathbf{e}_Z = 0 \quad (2.35)$$

なので、いずれを用いても角加速度ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &\equiv \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ &= \ddot{\phi}\mathbf{e}_z + \ddot{\theta}\mathbf{e}_{\text{node}} + \ddot{\psi}\mathbf{e}_Z + \dot{\phi}\dot{\theta}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\text{node}} + \dot{\phi}\dot{\psi}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_Z + \dot{\theta}\dot{\psi}\mathbf{e}_{\text{node}} \times \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (2.36)$$

である。

具体的な座標成分は、見ている系と Euler 角の定義によって異なる。空間固定系から見ると、(A) 方式では

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} \times \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

なので、

$$\boldsymbol{\alpha}|_{(A),\text{space}} = \begin{pmatrix} -\ddot{\theta} \sin \phi + \ddot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi}\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \\ \ddot{\theta} \cos \phi + \ddot{\psi} \sin \theta \sin \phi - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

となる。これは、もちろん

$$\boldsymbol{\omega}|_{(A),\text{space}} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

を直接微分しても求めることができる。

空間固定座標系で (B) 方式では

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} \times \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

なので、

$$\boldsymbol{\alpha}|_{(\text{B}),\text{space}} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \cos \phi + \ddot{\psi} \sin \theta \sin \phi - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \ddot{\theta} \sin \phi - \ddot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi - \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \\ \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

となる。これは、もちろん

$$\boldsymbol{\omega}|_{(\text{B}),\text{space}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

を直接微分しても求めることができる。

剛体固定系で (A) 方式では

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} \times \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

なので、

$$\boldsymbol{\alpha}|_{(A),\text{body}} = \begin{pmatrix} -\ddot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \ddot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \\ \ddot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \ddot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi \\ \ddot{\phi} \cos \theta + \ddot{\psi} - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

となる。これは、もちろん

$$\boldsymbol{\omega}|_{(A),\text{body}} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

を直接微分しても求めることができる。

剛体固定系で (B) 方式では

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{\text{node}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \psi \\ \cos \theta \cos \psi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \theta \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{e}_{\text{node}} \times \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ -\cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

なので、

$$\boldsymbol{\alpha}|_{(\text{B}),\text{body}} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \ddot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \\ \ddot{\phi} \cos \theta + \ddot{\psi} - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

となる。これは、もちろん

$$\boldsymbol{\omega}|_{(\text{B}),\text{body}} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

を直接微分しても求めることができる。

2.4 Euler 角を用いた剛体の運動方程式

ここでは、Euler-Lagrange の方程式から求められる運動方程式の意味を明らかにしておきたい。

まず運動エネルギーを求める。運動エネルギーは剛体固定座標系で求めたいところで、式の形をわかりやすくするために剛体固定座標系の座標軸を慣性主軸に取る。角速度ベクトルは (A)

方式、(B) 方式それぞれで

$$\boldsymbol{\omega}|_{(A),\text{body}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$\boldsymbol{\omega}|_{(B),\text{body}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

だから、運動エネルギーは (A) 方式で

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2] \\ &= \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta)^2 + I_2 (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\dot{\theta}^2 (I_1 \sin^2 \psi + I_2 \cos^2 \psi) + \dot{\phi}^2 \{ (I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi) \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\psi}^2 I_3 - 2\dot{\theta}\dot{\phi} (I_1 - I_2) \sin \theta \sin \psi \cos \psi + 2\dot{\phi}\dot{\psi} I_3 \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

(B) 方式で

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2] \\ &= \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta)^2 + I_2 (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\dot{\theta}^2 (I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi) + \dot{\phi}^2 \{ (I_1 \sin^2 \psi + I_2 \cos^2 \psi) \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\psi}^2 I_3 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} (I_1 - I_2) \sin \theta \sin \psi \cos \psi + 2\dot{\phi}\dot{\psi} I_3 \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (2.72)$$

である。

次に、この運動エネルギーを用いてそれぞれの Euler 角に対する一般化運動量を求めておく。ただし、ポテンシャルエネルギー V は角度の時間微分を含まないとする。角速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{e}_{\text{node}} + \dot{\psi} \mathbf{e}_Z \quad (2.73)$$

だったので、 ϕ は空間 z 軸の周りの回転、 θ は節線軸の周りの回転、 ψ は剛体 z' 軸の周りの回転を表す角度だから、一般化運動量は、それぞれの軸の周りの角運動量になっているはずである。

まず、これを確かめよう。一般化運動量は

$$\begin{aligned}
p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \\
&= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \\
&= \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\phi}} \\
&= \begin{cases} -I_1 \omega_1 \sin \theta \cos \psi + I_2 \omega_2 \sin \theta \sin \psi + I_3 \omega_3 \cos \theta & \text{(A) 方式} \\ I_1 \omega_1 \sin \theta \sin \psi + I_2 \omega_2 \sin \theta \cos \psi + I_3 \omega_3 \cos \theta & \text{(B) 方式} \end{cases} \\
&= \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z \\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\
&= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \\
&= \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\theta}} \\
&= \begin{cases} I_1 \omega_1 \sin \psi + I_2 \omega_2 \cos \psi & \text{(A) 方式} \\ I_1 \omega_1 \cos \psi - I_2 \omega_2 \sin \psi & \text{(B) 方式} \end{cases} \\
&= \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_{\text{node}} \\
p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \\
&= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \\
&= \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} \\
&= I_3 \omega_3 \\
&= \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_Z
\end{aligned} \tag{2.74}$$

となり、予想通り、それぞれ角運動量 \mathbf{L} の \mathbf{e}_z 成分、 \mathbf{e}_{node} 成分、 \mathbf{e}_Z 成分となっている。Euler 角のみを用いた表式も求めておくと、(A) 方式で

$$\begin{aligned}
p_\phi &= -I_1 \omega_1 \sin \theta \cos \psi + I_2 \omega_2 \sin \theta \sin \psi + I_3 \omega_3 \cos \theta \\
&= -I_1 (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \sin \theta \cos \psi \\
&\quad + I_2 (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \sin \theta \sin \psi + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \\
&= -(I_1 - I_2) \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi \\
&\quad + (I_1 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \\
p_\theta &= I_1 \omega_1 \sin \psi + I_2 \omega_2 \cos \psi \\
&= I_1 (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \sin \psi + I_2 (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \cos \psi \\
&= (I_1 \sin^2 \psi + I_2 \cos^2 \psi) \dot{\theta} - (I_1 - I_2) \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi \\
p_\psi &= I_3 \omega_3 \\
&= I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

となり、(B) 方式では、

$$\begin{aligned}
p_\phi &= I_1\omega_1 \sin\theta \sin\psi + I_2\omega_2 \sin\theta \cos\psi + I_3\omega_3 \cos\theta \\
&= I_1(\dot{\theta} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi) \sin\theta \sin\psi \\
&\quad + I_2(-\dot{\theta} \sin\psi + \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi) \sin\theta \cos\psi + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \cos\theta \\
&= (I_1 - I_2)\dot{\theta} \sin\theta \sin\psi \cos\psi \\
&\quad + (I_1 \sin^2\theta \sin^2\psi + I_2 \sin^2\theta \cos^2\psi + I_3 \cos^2\theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi} \cos\theta \\
p_\theta &= I_1\omega_1 \cos\psi - I_2\omega_2 \sin\psi \\
&= I_1(\dot{\theta} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi) \cos\psi - I_2(-\dot{\theta} \sin\psi + \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi) \sin\psi \\
&= (I_1 \cos^2\psi + I_2 \sin^2\psi)\dot{\theta} + (I_1 - I_2)\dot{\phi} \sin\theta \sin\psi \cos\psi \\
p_\psi &= I_3\omega_3 \\
&= I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta)
\end{aligned} \tag{2.76}$$

となる。

見かけのトルクは

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \theta} \\
&= \begin{cases} \dot{\phi}(-I_1\omega_1 \cos\theta \cos\psi + I_2\omega_2 \cos\theta \sin\psi - I_3\omega_3 \sin\theta) & \text{(A) 方式} \\ \dot{\phi}(I_1\omega_1 \cos\theta \sin\psi + I_2\omega_2 \cos\theta \cos\psi - I_3\omega_3 \sin\theta) & \text{(B) 方式} \end{cases} \\
&= -(\dot{\phi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{e}_{\text{node}} \\
\frac{\partial T}{\partial \psi} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} \\
&= I_1\omega_1\omega_2 - I_2\omega_2\omega_1 \\
&= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \\
&= -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_3 \\
&= -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{e}_Z
\end{aligned} \tag{2.77}$$

となる。第 1 式は回転していない空間固定系に関する式、第 2 式は $\dot{\phi} \mathbf{e}_z$ で回転している系に関する式の節線方向成分、第 3 式は剛体固定系に関する式の第 3 軸方向成分と解釈できる。

そして、一般化力は、質点に付けた番号を i 、一般化座標につけた番号を j として、Goldstein et al. (2006) の (1.49) と (1.51) 式より

$$\mathbf{Q}_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{2.78}$$

であった。剛体の回転の場合は

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \tag{2.79}$$

となるから、

$$\mathbf{Q}_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_j} \times \mathbf{r}_i \right) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_j} = \sum_i \mathbf{N}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_j} = \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_j} \tag{2.80}$$

である。これより、

$$\begin{aligned}
Q_\phi &= N_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\phi}} + N_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\phi}} + N_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\phi}} \\
&= \begin{cases} -N_1 \sin \theta \cos \psi + N_2 \sin \theta \sin \psi + N_3 \cos \theta & \text{(A) 方式} \\ N_1 \sin \theta \sin \psi + N_2 \sin \theta \cos \psi + N_3 \cos \theta & \text{(B) 方式} \end{cases} \\
&= \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_z \\
Q_\theta &= N_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\theta}} + N_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\theta}} \\
&= \begin{cases} N_1 \sin \psi + N_2 \cos \psi & \text{(A) 方式} \\ N_1 \cos \psi - N_2 \sin \psi & \text{(B) 方式} \end{cases} \\
&= \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_{\text{node}} \\
Q_\psi &= N_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} \\
&= N_3 \\
&= \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_Z
\end{aligned} \tag{2.81}$$

ということになって、一般化運動量と同様にそれぞれトルク \mathbf{N} の \mathbf{e}_z 成分、 \mathbf{e}_{node} 成分、 \mathbf{e}_Z 成分となっている。

以上の結果を組み合わせると、Lagrangian から求められる運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_z \tag{2.82}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_{\text{node}}) + (\dot{\phi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{e}_{\text{node}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_{\text{node}} \tag{2.83}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_Z) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{e}_Z = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_Z \tag{2.84}$$

ということになる。第1式 (ϕ に関する式) は、空間固定系の角運動量保存則の z 成分、第2式 (θ に関する式) は $\dot{\phi} \mathbf{e}_z$ で回転する系に関する Euler 方程式の節線方向成分、第3式 (ψ に関する式) は剛体固定系に関する式の第3軸方向成分である。

2.5 軸対称剛体の自由回転運動

軸対称剛体を考える ($I_1 = I_2$)。

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

自由運動は角運動量 (\mathbf{L}) の保存で特徴付けられる。まず、

$$\mathbf{L} = L \mathbf{e}_z \tag{2.86}$$

と

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_{\text{node}} + \dot{\psi} \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_Z \tag{2.87}$$

とから、回転角速度 $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ を求める。具体的な座標成分を剛体固定座標系で書き下す。(A)
(B) 両方式で書いてみると、それぞれ

$$L \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta) \\ I_1(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta) \\ I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

$$L \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta) \\ I_1(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta) \\ I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

である。どちらの式を使っても、

$$\dot{\phi} = \frac{L}{I_1} \quad (2.90)$$

$$\dot{\theta} = 0 \quad (2.91)$$

$$\dot{\psi} = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L \cos \theta \quad (2.92)$$

が得られる。つまり、章動角は不変で (θ は一定)、一定角速度で自転と歳差運動 (自由歳差運動) をしている。 ϕ は空間固定座標系から見たときの対称軸の方位角 (反時計回りが正) だから $\dot{\phi}$ は空間固定座標系から見たときに剛体の対称軸が回る角速度である。 ψ は剛体固定座標系から見たときの空間軸の方位角 (時計回りが正) だから $\dot{\psi}$ は剛体固定座標系から見たときに空間軸が負の向きに回る角速度である。

幾何学的関係をもう少し詳しく見てゆく。角速度の Z 成分 (自転角速度)

$$\omega_Z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{L}{I_3} \cos \theta \quad (2.93)$$

は定数であって、以下これは正と仮定しておく。その中の L も $\cos \theta$ も正とする。 $L < 0$ や $\cos \theta < 0$ になるようなときは、それぞれ z 軸や Z 軸の向きを逆にとっておく方がわかりやすい。これを用いて

$$\Omega_{\text{free}} \equiv \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_Z = \dot{\psi} \quad (2.94)$$

を自由歳差運動の角振動数と定義する。この量が歳差運動の周波数と解釈できることはすぐ後でわかる。ともかく、地球のように $I_3 > I_1$ なら負、 $I_1 > I_3$ なら正であることに注意しておく。こうすると、

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \Omega_{\text{free}} \mathbf{e}_Z \quad (2.95)$$

であって、 $\boldsymbol{\omega}$ が \mathbf{e}_z と \mathbf{e}_Z が張る面内にあることがわかる。すなわち、角運動量ベクトル、角速度ベクトル、対称軸は同一平面内にある。なお、 ω_Z が正のとき

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \omega_Z}{I_1 \cos \theta} \quad (2.96)$$

も正である。したがって、角運動量ベクトル、角速度ベクトル、対称軸の関係は図 2.1 のようになる。地球のような場合 ($I_1 < I_3$) では、対称軸 (極軸) から見たとき、 ψ は角運動量ベクトル

の方位角（時計回りが正）であると同時に、角速度ベクトルの方位角にもなるから、 $\dot{\psi} = \Omega_{\text{free}}$ は自由歳差運動の周波数であると解釈できる。この場合、歳差運動は極軸から見たときの瞬間回転軸のゆっくりした回転である。 $\Omega_{\text{free}} < 0$ は極運動が順行であることを表している。ところで、順行、逆行の言葉の使い方はテキストによっても違う。Ginsberg (2008) では、 $\dot{\psi}$ の符号が正 (ω_z と同じ) のものを順行歳差 (regular precession) とよび、 $\dot{\psi}$ の符号が負 (ω_z と逆) のものを逆行歳差 (retrograde precession) と呼んでいる*¹。私（というより極運動業界）はこれと逆で、地球上で極軸から見たときの瞬間回転軸の運動方向で順 (prograde) と逆 (retrograde) を決める。反時計回りが順で、時計回りが逆である。とすれば、 $\dot{\psi} = \Omega_{\text{free}} < 0$ の方が順になる。

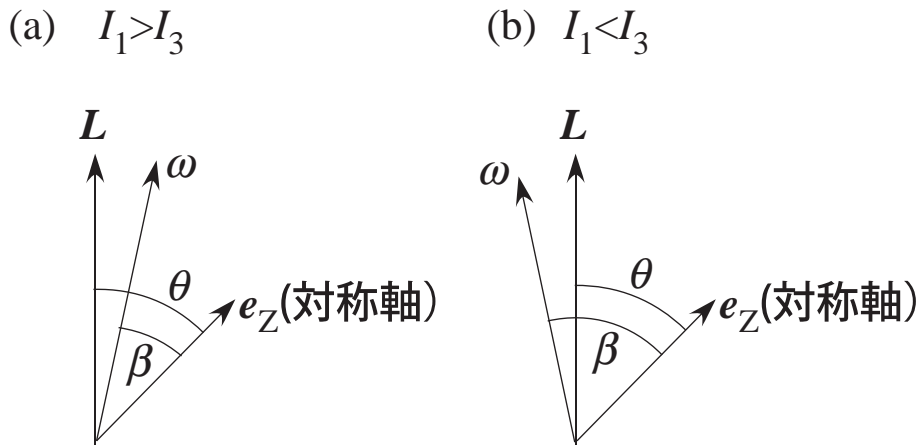


図 2.1 自由歳差運動の時の角運動量ベクトル、角速度ベクトル、対称軸の関係

角運動量ベクトル、角速度ベクトル、対称軸の関係の把握としてわかりやすいのは空間円錐と物体円錐が瞬間回転軸で接しながら滑らないように回っているというイメージ（図 2.2）である。接しながら回っているというのは、3つの軸が同一平面上にあることからわかる。滑らないようにというのは、以下のことからわかる。上で求めた、

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \Omega_{\text{free}} \mathbf{e}_z \tag{2.97}$$

と $\boldsymbol{\omega}$ 自身との外積を取ると、

$$0 = \dot{\phi} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z + \Omega_{\text{free}} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z \tag{2.98}$$

となることから、

$$\dot{\phi} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z = -\dot{\psi} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z \tag{2.99}$$

であり、これから

$$\dot{\phi} \sin(\theta - \beta) = \dot{\psi} \sin \beta \quad (I_1 > I_3) \tag{2.100}$$

$$\dot{\phi} \sin(\beta - \theta) = (-\dot{\psi}) \sin \beta \quad (I_1 < I_3) \tag{2.101}$$

が成り立つからである。左辺は空間円錐上を瞬間回転軸が動く速さで、右辺は物体円錐上を瞬間回転軸が動く速さである。これらが等しいということが、滑らずに回ることである。

*¹ ただし、Ginsberg (2008) は、この ϕ のことを ψ と書き、 ψ のことを ϕ と書いていることに注意。

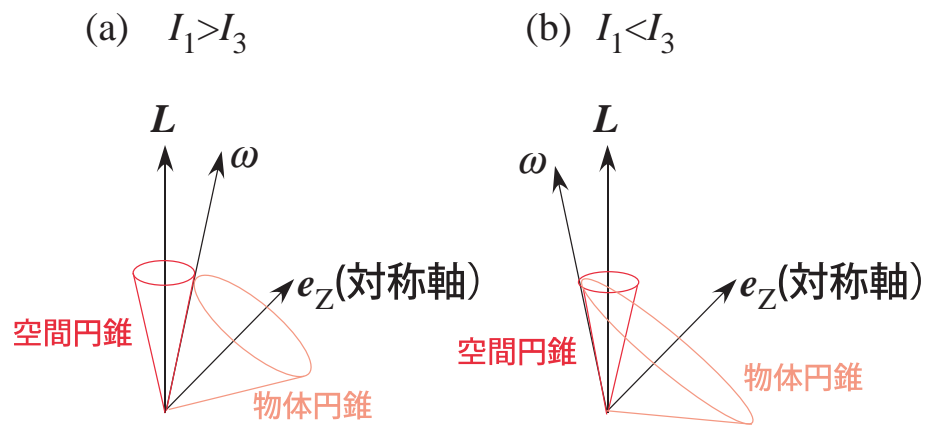


図 2.2 空間円錐と物体円錐

2.6 参考文献

- Ginsberg, Jerry (2008) *Engineering Dynamics*, Cambridge University Press
- Goldstein, Herbert; Poole, Charles; Safko, John (2006) 古典力学 (上) (原書第3版), 吉岡書店