

ちょっと難しい積分

吉田茂生

2025 年 8 月 16 日

目次

第 1 章	$1/(x^n + 1)$ の積分	7
1.1	不定積分	7
1.1.1	$n = 1$	7
1.1.2	$n = 2$	7
1.1.3	$n = 3$	7
1.1.4	$n = 4$	8
1.1.5	$n = 6$	10
1.1.6	参考文献	11
1.2	$(0, \infty)$ における定積分	11
1.2.1	複素積分	11
1.2.2	変数変換とガンマ関数に関する Euler の相反公式による	13
1.2.3	$n = 4$ の問題を $n = 2$ の問題に帰着させる巧みな積分法	14
1.2.4	参考文献	15
第 2 章	二項積分	17
2.1	超幾何関数の利用	17
2.1.1	超幾何関数を用いて二項積分（不定積分）を表す方法	17
2.1.2	$a > 0$ の場合の $x \rightarrow \infty$ での値（定積分 I_d ）	18
2.1.3	$a < 0$ の場合の $x = (-b/a)^{1/n}$ での値（定積分 I_d ）	20
2.1.4	1 章で扱った積分との関係	20
2.2	ベータ関数を用いて定積分 I_d を表す方法	21
2.2.1	$a > 0$ の場合の定積分 I_d	21
2.2.2	$a < 0$ の場合の定積分 I_d	21
2.3	Chebyshev の計算法	22
2.4	参考文献	23
第 3 章	三角関数の有理関数	25
3.1	Weierstrass 置換	25
3.1.1	参考文献	26

3.2	不定積分各論	26
3.2.1	$\sec \theta$ の積分	26
3.2.2	$\csc \theta$ の積分	33
3.2.3	$1/(a \sin \theta + b \cos \theta)$ の積分	35
3.2.4	$1/(a + b \cos \theta)$ の積分	38
3.2.5	$1/(a + b \sin \theta)$ の積分	41
3.2.6	$\sec^2 \theta$ の積分	46
3.2.7	$\sec^3 \theta$ の積分	47
3.2.8	参考文献	47
3.3	定積分	48
3.3.1	$[0, 2\pi]$ の積分は複素積分で	48
3.3.2	ベータ関数	48
3.3.3	Wallis 積分	48
3.3.3.1	ベータ関数との関係	48
3.3.3.2	漸化式	49
3.3.4	参考文献	49
第 4 章	無理関数の積分 ～ 楕円積分とその周辺	51
4.1	標準形への還元	51
4.1.1	参考文献	53
4.2	1 次式の平方根を含む有理式の積分	54
4.2.1	根号の部分をもっと置き換える方法	54
4.2.2	標準形に直して積分	54
4.2.2.1	漸化式	54
4.2.2.2	$J_1(\alpha)$ の具体的な表式	55
4.2.3	参考文献	57
4.3	2 次式の平方根を含む有理式の積分	57
4.3.1	三角関数を使った解法	57
4.3.2	双曲線関数を使った解法	59
4.3.3	規格化してからを 1 回の変数変換で済ませる解法	60
4.3.4	$a > 0$ の場合、1 回の変数変換で済ませる解法	62
4.3.5	$a > 0$ 、 $D < 0$ の場合、1 回の変数変換で済ませる解法	64
4.3.6	$D > 0$ の場合、因数分解を使った解法 その 1	65
4.3.7	$D > 0$ の場合、因数分解を使った解法 その 2	67
4.3.8	標準形に直して積分	69
4.3.8.1	漸化式	69
4.3.8.2	I_0 の具体的な表式	71

4.3.8.3	$J_1(\alpha)$ の具体的な表式	74
4.3.9	例 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) の積分	83
4.3.10	参考文献	86
4.4	楕円積分	87
4.4.1	楕円積分の標準化	87
4.4.1.1	Step 1 $\varphi(x)$ の標準化	87
4.4.1.2	Step 2 楕円積分の標準化	90
4.4.2	参考文献	91
第 5 章	Dirichlet 積分	93
5.1	Dirichlet 積分の定義	93
5.1.1	参考文献	93
5.2	複素積分	93
5.2.1	式 (5.6) の第 2 項の評価	95
5.2.2	参考文献	96
5.3	Laplace 変換を用いる方法	96
5.3.1	ここで使う Laplace 変換の性質	96
5.3.1.1	Laplace 変換の像の微分法則	97
5.3.1.2	Laplace 変換の像の積分法則	97
5.3.1.3	sine 関数の Laplace 変換	98
5.3.2	Laplace 変換の像の微分法則の利用 $\sim$ Feynmann's technique	98
5.3.3	Laplace 変換の像の積分法則の利用	99
5.3.4	2 重積分法	100
5.3.5	参考文献	100
5.4	方形パルスの Fourier 変換を用いる方法	101
5.4.1	Fourier 変換による二重積分法	101
5.4.2	短冊近似	101
5.4.3	Dirichlet kernel の利用	102
5.4.4	参考文献	104
5.5	方形パルスの Fourier 変換を用いる方法 $\sim (-\infty, \infty)$ の積分	104
5.5.1	Fourier 変換による二重積分法	104
5.5.2	短冊近似	105
5.5.3	Dirichlet kernel の利用	106
5.5.4	参考文献	107
5.6	Fourier 級数を用いる方法	108
5.6.1	Fourier 級数を用いる方法における前提	108
5.6.1.1	Fourier 級数	109

5.6.1.2	Riemann-Lebesgue の補題	109
5.6.2	デルタ関数の Fourier 級数展開と Dirichlet 積分	109
5.6.3	Fourier 級数展開を使った Dirichlet 積分の一般化	110
5.6.4	参考文献	112
5.7	Dirichlet 積分から比較的簡単に導かれる積分	112
5.7.1	$\sin(cx)/x$ の積分と超関数	112
5.7.2	$\sin(x^n)/x$ の積分	112
5.7.3	$\sin(e^x)$ の積分	113
5.7.4	$\sin^2 x/x^2$ の積分	113
5.7.5	参考文献	114
第 6 章	Lorentz 関数の逆 Fourier 変換	115
6.1	Lorentz 関数の逆 Fourier 変換の定義とその簡単な性質	115
6.2	複素積分	116
6.3	Laplace 変換を用いる方法	118
6.3.1	参考文献	118
6.4	Feynmann's technique	119
6.4.1	t をパラメタとした場合 その 1	119
6.4.2	t をパラメタとした場合 その 2	120
6.4.3	γ をパラメタとした場合	121
6.4.4	参考文献	123
6.5	Parseval の等式の利用	123
6.5.1	参考文献	124
第 7 章	Delta 関数や Heaviside 関数の Fourier 変換	125
7.1	Fourier 変換の定義	125
7.2	delta 関数	125
7.2.1	delta 関数の Fourier 変換と佐藤超関数	125
7.2.2	delta 関数と Lorentz 関数	126
7.3	Heaviside 関数	127
7.3.1	Heaviside 関数の Fourier 変換	127
7.3.2	Heaviside 関数と Dirichlet 積分	128

第 1 章

$1/(x^n + 1)$ の積分

有理関数の積分なので、原理的に困難があるわけでもないのだが、定積分は複素積分の例題としてもよく扱われる。

1.1 不定積分

$$I_n = \int \frac{1}{x^n + 1} dx \quad (1.1)$$

を解く。ただし、 $n > 1$ とする。 n が小さい場合の不定積分を見てゆく。

1.1.1 $n = 1$

$$I_1 = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \quad (1.2)$$

(C は積分定数)

1.1.2 $n = 2$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C \quad (1.3)$$

(C は積分定数)

1.1.3 $n = 3$

$$I_3 = \int \frac{1}{x^3 + 1} dx \quad (1.4)$$

有理式の定石に則って、分母を因数分解する。

$$I_3 = \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx \quad (1.5)$$

部分分数分解をして

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3} \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln \left| \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \end{aligned} \quad (1.6)$$

となる。ここで、

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \tan \theta \quad (1.7)$$

と置くと、

$$\frac{2}{\sqrt{3}} dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad (1.8)$$

となるので、第3項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \theta + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C \end{aligned} \quad (1.9)$$

(C は積分定数) となる。そこで、

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln \left| \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^3}{x^3+1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned} \quad (1.10)$$

が答えとなる。

1.1.4 $n = 4$

$$I_4 = \int \frac{1}{x^4+1} dx \quad (1.11)$$

有理式の定石に則って、分母を因数分解する。

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2} dx \\
 &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2} dx \\
 &= \int \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

部分分数分解をして

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{-x + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{-\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right] dx \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx \\
 &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right| \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \sqrt{2} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + C \\
 &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln [x^2 - \sqrt{2}x + 1] + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln [x^2 + \sqrt{2}x + 1] \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan (\sqrt{2}x - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan (\sqrt{2}x + 1) + C \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan (\sqrt{2}x - 1) + \arctan (\sqrt{2}x + 1) \right] + C
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。ここで、 $\arctan$ の加法定理

$$\arctan a \pm \arctan b = \arctan \frac{a \pm b}{1 \mp ab} \tag{1.14}$$

を用いると、

$$I_4 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} + C \tag{1.15}$$

とも書くことができる。ただし、こう書くときは $\arctan$ のどの分枝を取るかに注意が必要で、加法定理を使う前の表式から考えると $|x| < 1$ では $|\arctan| < \pi/2$ だが、 $x > 1$ では $\pi/2 < \arctan < \pi$ 、 $x < -1$ では $-\pi < \arctan < -\pi/2$ としないといけない。たとえば、 $I_4(x \rightarrow \infty) - I_4(0) = \pi/(2\sqrt{2})$ である。

1.1.5 $n = 6$

$$I_6 = \int \frac{1}{x^6 + 1} dx \quad (1.16)$$

有理式の定石に則って、分母を因数分解する。

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx \\ &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2)} dx \\ &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)[(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}x)^2]} dx \\ &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)} dx \end{aligned} \quad (1.17)$$

部分分数分解をして

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{6\sqrt{3}} \int \left[\frac{-3x + 2\sqrt{3}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{3x + 2\sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{6\sqrt{3}} \int \left[\frac{-3\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{3\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \arctan x - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx + \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx \\ &\quad + \frac{1}{12} \int \frac{1}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx + \frac{1}{12} \int \frac{1}{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \arctan x - \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right| + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right| \\ &\quad + \frac{1}{6} \arctan 2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{6} \arctan 2 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + C \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln [x^2 - \sqrt{3}x + 1] + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln [x^2 + \sqrt{3}x + 1] \\ &\quad + \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{6} \arctan (2x - \sqrt{3}) + \frac{1}{6} \arctan (2x + \sqrt{3}) + C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right| \\ &\quad + \frac{1}{6} \left[2 \arctan x + \arctan (2x - \sqrt{3}) + \arctan (2x + \sqrt{3}) \right] + C \end{aligned} \quad (1.18)$$

となる。ただし、 C は積分定数である。ここで、 $\arctan$ の加法定理

$$\arctan a \pm \arctan b = \arctan \frac{a \pm b}{1 \mp ab} \quad (1.19)$$

を用いると、

$$I_6 = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right| + \frac{1}{6} \arctan \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{3} \arctan x + C \quad (1.20)$$

とも書くことができる。ただし、こう書くときは第 2 項の $\arctan$ のどの分枝を取るかに注意が必要で、加法定理を使う前の表式から考えると $|x| < 1$ では $|\arctan| < \pi/2$ だが、 $x > 1$ では $\pi/2 < \arctan < \pi$ 、 $x < -1$ では $-\pi < \arctan < -\pi/2$ としないといけない。たとえば、 $I_6(x \rightarrow \infty) - I_6(0) = \pi/3$ である。

1.1.6 参考文献

- [YouTube] Flammable Maths (2017/12/25) "AN ALGEBRAIC EXTRAVAGANZA! The integral $1/(x^3+1)$ "
<https://www.youtube.com/watch?v=uSIKsznD5mw>
- [YouTube] blackpenredpen (2017/08/20) "integral of $1/(x^4+1)$ "
<https://www.youtube.com/watch?v=GZFQNs3p1U>
- [YouTube] Polar Pi (2017/04/16) "Advanced Calculus: [FCI Pt 14] - Integral of $1/(x^6+1)$ [Very tricky and Difficult Fun Integral]"
<https://www.youtube.com/watch?v=hLyYoqCXM1k>

1.2 $(0, \infty)$ における定積分

以上考えてきた不定積分の $(0, \infty)$ における定積分を見てゆく。

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{x^n + 1} dx \quad (1.21)$$

を解く。ただし、 $n > 1$ とする。

なお、積分範囲が $(-\infty, \infty)$ だと、 n が奇数のとき $x = -1$ で被積分関数が発散して積分できなくなる。

1.2.1 複素積分

まず、分母を複素数に拡張した $z^n + 1$ の零点を求める。

$$z^n = -1 = e^{i\pi(1+2m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.22)$$

より、

$$z = e^{i\pi(1+2m)/n} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.23)$$

が零点になる。

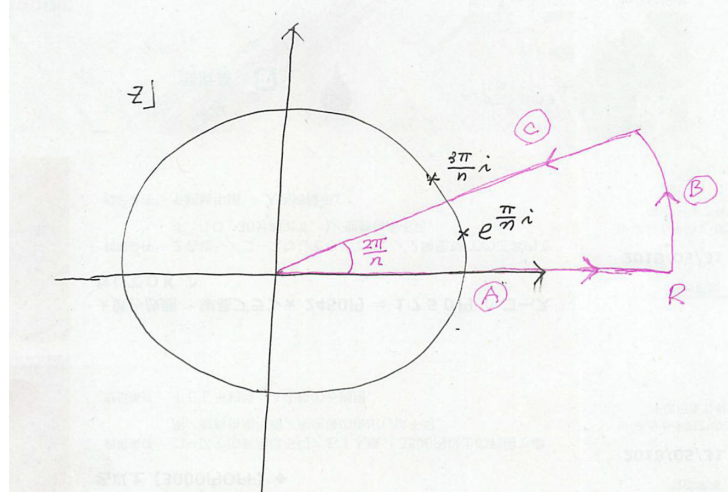


図 1.1 複素積分の経路。円は単位円である。

図 1.1 のような積分路を通る複素積分を考える。

$$I = \int \frac{1}{z^n + 1} dz = \int_A \frac{1}{z^n + 1} dz + \int_B \frac{1}{z^n + 1} dz + \int_C \frac{1}{z^n + 1} dz \quad (1.24)$$

右辺の各項は、A の部分の積分が

$$\int_A \frac{1}{z^n + 1} dz = \int_0^R \frac{1}{x^n + 1} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{x^n + 1} dx = I_n \quad (1.25)$$

となる。B の部分の積分は

$$z = Re^{i\theta} \quad (1.26)$$

として、

$$\int_B \frac{1}{z^n + 1} dz = i \int_0^{2\pi/n} \frac{z}{z^n + 1} d\theta \quad (1.27)$$

だから

$$\left| \int_B \frac{1}{z^n + 1} dz \right| \leq \int_0^{2\pi/n} \left| \frac{z}{z^n + 1} \right| d\theta \leq \frac{R}{R^n - 1} \int_0^{2\pi/n} d\theta = \frac{2\pi}{n} \frac{R}{R^n - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (1.28)$$

である。C の部分の積分は

$$z = (R - t)e^{i(2\pi/n)} \quad (1.29)$$

として、

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z^n + 1} dz &= -e^{i(2\pi/n)} \int_0^R \frac{1}{[(R - t)e^{i(2\pi/n)}]^n + 1} dt \\ &= -e^{i(2\pi/n)} \int_0^R \frac{1}{(R - t)^n + 1} dt \end{aligned} \quad (1.30)$$

となる。さらに、

$$u = R - t \quad (1.31)$$

として

$$\int_C \frac{1}{z^n + 1} dz = -e^{i(2\pi/n)} \int_0^R \frac{1}{u^n + 1} du \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -e^{i(2\pi/n)} I_n \quad (1.32)$$

を得る。一方、(1.24) の左辺は、留数定理によって評価する。零点 $e^{i(\pi/n)}$ における留数は

$$\lim_{z \rightarrow e^{i(\pi/n)}} \frac{z - e^{i(\pi/n)}}{z^n + 1} = \lim_{z \rightarrow e^{i(\pi/n)}} \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{n(e^{i(\pi/n)})^{n-1}} = \frac{1}{ne^{i\pi} e^{-i(\pi/n)}} = -\frac{e^{i(\pi/n)}}{n} \quad (1.33)$$

だから、

$$I = -\frac{2\pi}{n} i e^{i(\pi/n)} \quad (1.34)$$

である。

以上の (1.24) の各項の評価をまとめると

$$I = -\frac{2\pi}{n} i e^{i(\pi/n)} = (1 - e^{i(2\pi/n)}) I_n \quad (1.35)$$

となる。これから

$$\frac{\pi}{n} = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) I_n \quad (1.36)$$

となり、

$$I_n = \frac{(\pi/n)}{\sin(\pi/n)} \quad (1.37)$$

が導かれる。

1.2.2 変数変換とガンマ関数に関する Euler の相反公式による

$$t = \frac{1}{x^n + 1} \quad (1.38)$$

と置く。

$$x = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{1/n} \quad (1.39)$$

ゆえ

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{1}{nt^2} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{(1/n)-1} dt \\ &= -\frac{1}{n} t^{-\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}-1} dt \end{aligned} \quad (1.40)$$

となるので、

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{-\frac{1}{n}} (1-t)^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \quad (1.41)$$

となる。ここで、 $B(p, q)$ はベータ関数である。ガンマ関数を利用すると、

$$I_n = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (1.42)$$

となる。ガンマ関数に関する Euler の相反公式 (reflection formula ; e.g. Wikipedia ”ガンマ関数”)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.43)$$

を用いれば、

$$I_n = \frac{(\pi/n)}{\sin(\pi/n)} \quad (1.44)$$

を得る。

1.2.3 $n = 4$ の問題を $n = 2$ の問題に帰着させる巧妙な積分法

$n = 4$ では不定積分が求められているので、わざわざ巧妙な積分法を案出するまでもないのだが、以下のようなうまい方法もあるということ。

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 2x^2 \cos(2a) + 1} dx \quad (1.45)$$

とする。ただし、 $a = \pi/4$ とする。すると、 $\cos(2a) = 0$ である。ここでこのように $\cos(2a) = 0$ がかった項を入れるというのはちょっとびっくりするテクニックだが、あとでやっていることは、実は不定積分の時と同様に

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \quad (1.46)$$

と因数分解するのをちょっと格好良くやっているだけなのでそれほど驚くことではない。問題は、ここからうまく式変形をして $n = 2$ の問題にする算段である。

新たな変数として

$$u = \frac{1}{x} \quad (1.47)$$

$$x = \frac{1}{u} \quad (1.48)$$

$$dx = -\frac{du}{u^2} \quad (1.49)$$

を導入する。すると、

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^\infty \frac{1}{u^2 + 2 \cos(2a) + u^{-2}} du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^2}{u^4 + 2u^2 \cos(2a) + 1} du \end{aligned} \quad (1.50)$$

となる。そこで、2つの I_4 の表現 (1.45) と (1.50) が得られたので、それらを足して2で割ってみる。

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 \cos(2a) + 1} dx \quad (1.51)$$

被積分関数は偶関数なので、積分範囲を $(-\infty, \infty)$ に広げて

$$I_4 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 \cos(2a) + 1} dx \quad (1.52)$$

としてもよい。三角関数の公式などを用いて

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2 \sin^2(a)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2 - 4x^2 \sin^2(a)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1 - 2x \sin a)(x^2 + 1 + 2x \sin a)} dx \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \sin a}{(x^2 + 1 - 2x \sin a)(x^2 + 1 + 2x \sin a)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1 - 2x \sin a}{(x^2 + 1 - 2x \sin a)(x^2 + 1 + 2x \sin a)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1 + 2x \sin a} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x \sin a + \sin^2 a + \cos^2 a} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + \sin a)^2 + \cos^2 a} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\cos a} \arctan \left(\frac{x + \sin a}{\cos a} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{4 \cos a} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \end{aligned} \quad (1.53)$$

となる。3つ目の等号は、奇関数の $(-\infty, \infty)$ での積分が 0 になることを用いた。

1.2.4 参考文献

- [YouTube] Dr. Peyman's Show (2017/12/25) "Integral of $1/(x^n + 1)$ from 0 to infinity" ; 複素解析版
<https://www.youtube.com/watch?v=tdb40g0Dbew>
- [YouTube] Dr. Peyman's Show (2018/03/23) "Integral of $1/(x^n + 1)$ from 0 to infinity" ; 変数変換版
<https://www.youtube.com/watch?v=xro7c-mDk1g>
- [YouTube] Flammable Maths (2017/11/17) "The Integral $1/(x^4 + 1)$ from 0 to infinity"
<https://www.youtube.com/watch?v=YtorrokbfFeA>

- [YouTube] Flammable Maths (2018/07/01) "What a crazy approach! Integral $1/(x^4 + 1)$ from 0 to infinity [Papa Flammy's V2]"
<https://www.youtube.com/watch?v=CIRGU-Zc9h4>
- [web page] Wikipedia "ガンマ関数"
<https://ja.wikipedia.org/wiki/ガンマ関数>

第 2 章

二項積分

以下の形の不定積分を二項積分と呼ぶことにする。

$$I(x; a, b, m, n, p) = \int x^m (ax^n + b)^p dx \quad (2.1)$$

ここで、一般に a, b, m, n, p は実数であるものとする。ただし、 $a = 0$ だと単純なべき乗関数になるので、 $a \neq 0$ とする。同様に、 $b = 0$ でも単純なべき乗関数になるので、 $b \neq 0$ とする。

$n < 0$ の場合は

$$\begin{aligned} I(x; a, b, m, n, p) &= \int x^m (ax^n + b)^p dx \\ &= \int x^m \left(\frac{a + bx^{-n}}{x^{-n}} \right)^p dx \\ &= \int x^{m+np} (bx^{-n} + a)^p dx \\ &= I(x; b, a, m + np, -n, p) \end{aligned} \quad (2.2)$$

となるので、 $n > 0$ の場合だけ調べておけばよい。 $n = 0$ は単純なべき関数なので調べなくて良い。そこで、以下では $n > 0$ とする。

本章では、二項積分 $I(x; a, b, m, n, p)$ 、ならびに $a > 0$ の場合はその $(0, \infty)$ での定積分

$$I_d(a, b, m, n, p) = \int_0^\infty x^m (ax^n + b)^p dx \quad (2.3)$$

$a < 0$ の場合はその $(0, (-b/a)^{1/n})$ での定積分

$$I_d(a, b, m, n, p) = \int_0^{(-b/a)^{1/n}} x^m (ax^n + b)^p dx \quad (2.4)$$

の計算法を扱う。1 章で扱った積分もこれに含まれる。

2.1 Gauss の超幾何関数の利用

2.1.1 超幾何関数を用いて二項積分（不定積分）を表す方法

$x > 0$ 、 $b > 0$ 、 $m > -1$ 、 $n > 0$ の場合には超幾何関数を用いて解を表現できる。

Gauss の超幾何関数の積分表示 (Euler 積分表示) に

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt \quad (2.5)$$

というものがある (森口・宇田川・一松, 1960)。ここで、 $\Gamma(\gamma)$ 等はガンマ関数である。ただし、 $\gamma > \beta > 0$ とする。これを用いて二項積分を表現する。

まず、超幾何関数の積分表示が定積分で書かれているので、それと合わせるために、求める不定積分を定積分の形で

$$I(x; a, b, m, n, p) = \int_0^x y^m (ay^n + b)^p dy \quad (2.6)$$

と書く。つまり、積分定数を $I(0; a, b, m, n, p) = 0$ となるように取ったということである。ただし、 $x > 0$ として、 $y = 0$ での積分が収束するためには、 $n > 0$ 、 $b \neq 0$ としてあるので、 $m > -1$ でなければならない。また、 $b < 0$ だと計算の途中で出てくる b^p が実数でなくなる可能性があるので除外する。そこで、 $x > 0$ 、 $b > 0$ 、 $m > -1$ 、 $n > 0$ に話を限る (実際はもう少し適用できる範囲が広いかもしれない)。ただし、 $a < 0$ の場合は、 $0 < x < (-b/a)^{1/n}$ とする。 x がそれより大きいと被積分関数が実数でなくなるかもしれないからである。

$$u = \left(\frac{y}{x}\right)^n \quad (2.7)$$

と置くと、

$$y = xu^{1/n} \quad (2.8)$$

$$dy = \frac{x}{n} u^{1/n-1} du \quad (2.9)$$

なので、

$$\begin{aligned} I(x; a, b, m, n, p) &= \frac{x}{n} \int_0^1 u^{1/n-1} x^m u^{m/n} (ax^n u + b)^p du \\ &= \frac{b^p}{n} x^{m+1} \int_0^1 u^{(m+1)/n-1} \left[1 + \frac{a}{b} x^n u\right]^p du \\ &= \frac{b^p}{n} x^{m+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + 1\right)} F\left(-p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + 1; -\frac{a}{b} x^n\right) \\ &= \frac{b^p}{m+1} x^{m+1} F\left(-p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + 1; -\frac{a}{b} x^n\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

という積分公式が得られる。ただし、 $n > 0$ 、 $m > -1$ と仮定したので、超幾何関数の積分表示が使えるための条件 $(m+1)/n > 0$ は満たされている。

2.1.2 $a > 0$ の場合の $x \rightarrow \infty$ での値 (定積分 I_d)

$a > 0$ のとき $x \rightarrow \infty$ として、

$$I_d(a, b, m, n, p) = I(\infty; a, b, m, n, p) = \int_0^\infty y^m (ay^n + b)^p dy \quad (2.11)$$

の値を求めることを考える。ただし、積分が $y \rightarrow \infty$ で収束するために、 $m + np < -1$ とする。

超幾何関数の性質

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1 \quad (2.12)$$

と公式 (森口・宇田川・一松, 1960)

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; z) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{z}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{z}\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

を用いる。公式 (2.13) は、 $|z| > 1$ で z が正の実数ではないときに成り立つ。

$(a/b)x^n > 1$ のとき、公式 (2.13) を適用すると、

$$\begin{aligned} I(x; a, b, m, n, p) &= \frac{b^p}{m+1} x^{m+1} F\left(-p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + 1; -\frac{a}{b} x^n\right) \\ &= \frac{b^p}{m+1} x^{m+1} \\ &\times \left[\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + 1\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{n} + p\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{n} + p + 1\right)} \left(\frac{a}{b} x^n\right)^p F\left(-p, -p - \frac{m+1}{n}, -p - \frac{m+1}{n} + 1; -\frac{b}{a} x^{-n}\right) \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{m+1}{n} - p\right)}{\Gamma(-p) \Gamma(1)} \left(\frac{a}{b} x^n\right)^{-(m+1)/n} F\left(\frac{m+1}{n}, 0, \frac{m+1}{n} + p + 1; -\frac{b}{a} x^{-n}\right) \right] \\ &= \frac{a^p}{m+np+1} x^{m+np+1} F\left(-p, -p - \frac{m+1}{n}, -p - \frac{m+1}{n} + 1; -\frac{b}{a} x^{-n}\right) \\ &+ \frac{b^{(m+np+1)/n}}{a^{(m+1)/n}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{m+1}{n} - p\right)}{(m+1)\Gamma(-p)} F\left(\frac{m+1}{n}, 0, \frac{m+1}{n} + p + 1; -\frac{b}{a} x^{-n}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$m + np + 1 < 0$ に注意して $x \rightarrow \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} I(\infty; a, b, m, n, p) &= \frac{b^{(m+np+1)/n}}{a^{(m+1)/n}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{m+1}{n} - p\right)}{(m+1)\Gamma(-p)} \\ &= \frac{b^{(m+np+1)/n}}{a^{(m+1)/n}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \Gamma\left(-\frac{m+1}{n} - p\right)}{n\Gamma(-p)} \\ &= \frac{b^{(m+np+1)/n}}{na^{(m+1)/n}} B\left(\frac{m+1}{n}, -\frac{m+1}{n} - p\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。ここで $B(\alpha, \beta)$ はベータ関数である。この結果は、後で 2.2 節においてもっと直接的に導けることを示す。

2.1.3 $a < 0$ の場合の $x = (-b/a)^{1/n}$ での値 (定積分 I_d)

$a < 0$ のとき

$$I_d(a, b, m, n, p) = I\left(\left[-\frac{b}{a}\right]^{1/n}; a, b, m, n, p\right) = \int_0^{(-b/a)^{1/n}} y^m (ay^n + b)^p dy \quad (2.16)$$

の値を求めることを考える。ただし、積分が $y \rightarrow (-b/a)^{1/n}$ で収束するために、 $p > -1$ とする。

超幾何関数の公式 (森口・宇田川・一松, 1960)

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \quad (2.17)$$

を用いる。ただし、 $\gamma > 0$ 、 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ とする。この公式を適用すると、

$$\begin{aligned} & I\left(\left[-\frac{b}{a}\right]^{1/n}; a, b, m, n, p\right) \\ &= \frac{b^p}{m+1} \left(-\frac{b}{a}\right)^{(m+1)/n} F\left(-p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + 1; 1\right) \\ &= \frac{b^p}{m+1} \left(-\frac{b}{a}\right)^{(m+1)/n} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + 1\right) \Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + p + 1\right) \Gamma(1)} \\ &= \frac{b^p}{n} \left(-\frac{b}{a}\right)^{(m+1)/n} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + p + 1\right)} \\ &= \frac{b^{(m+np+1)/n}}{n(-a)^{(m+1)/n}} B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。ここで $B(\alpha, \beta)$ はベータ関数である。 $n > 0$ 、 $m > -1$ 、 $p > -1$ ゆえ、公式の適用条件も満たされている。この結果は、後で 2.2 節においてもっと直接的に導けることを示す。

2.1.4 1 章で扱った積分との関係

とくに、1 章で扱った不定積分は

$$\int \frac{1}{x^n + 1} dx = I(x; 1, 1, 0, n, -1) + C = xF\left(1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 1; -x^n\right) + C \quad (2.19)$$

と書くことができる。定積分は、

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n + 1} dx = I(\infty; 1, 1, 0, n, -1) = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{n} + 1\right) \quad (2.20)$$

となる。ガンマ関数に関する Euler の相反公式 (reflection formula ; e.g. 森口・宇田川・一松, 1960)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (2.21)$$

を用いれば、

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n + 1} dx = \frac{(\pi/n)}{\sin(\pi/n)} \quad (2.22)$$

を得る。

2.2 ベータ関数を用いて定積分 I_d を表す方法

I_d が最終的にベータ関数で表されたことから想像できる通り、(2.15) 式と (2.18) 式の結果は、超幾何関数を経由せず、もっと直接的に求めることもできる。

2.2.1 $a > 0$ の場合の定積分 I_d

以下、 $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $m+1 > 0$ 、 $m+np+1 < 0$ を仮定する。なお、始めから $n > 0$ としてある。

$$I_d(a, b, m, n, p) = \int_0^\infty x^m (ax^n + b)^p dx \quad (2.23)$$

において、

$$x = \left(\frac{b}{a} \frac{t}{1-t} \right)^{1/n} \quad (2.24)$$

と置く。 $a, b > 0$ を仮定したし、始めから $n > 0$ としてあるので、 t での積分範囲は $(0, 1)$ である。

$$dx = \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/n} \frac{t^{1/n-1}}{(1-t)^{1/n+1}} dt \quad (2.25)$$

となるから、

$$\begin{aligned} I_d(a, b, m, n, p) &= \frac{b^{(m+np+1)/n}}{na^{(m+1)/n}} \int_0^1 t^{(m+1)/n-1} (1-t)^{-(m+1)/n-p-1} dt \\ &= \frac{b^{(m+np+1)/n}}{na^{(m+1)/n}} B\left(\frac{m+1}{n}, -\frac{m+1}{n} - p\right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

が得られる。 $n > 0$ 、 $m+1 > 0$ 、 $m+np+1 < 0$ を仮定してあるので、 $t = 0, 1$ のところで積分は収束する。

2.2.2 $a < 0$ の場合の定積分 I_d

以下、 $a < 0$ 、 $b > 0$ 、 $m+1 > 0$ 、 $p+1 > 0$ を仮定する。なお、始めから $n > 0$ としてある。

$$I_d(a, b, m, n, p) = \int_0^{(-b/a)^{1/n}} x^m (ax^n + b)^p dx \quad (2.27)$$

において、

$$x = \left(-\frac{b}{a}t\right)^{1/n} \quad (2.28)$$

と置く。 $a < 0, b > 0$ を仮定したし、始めから $n > 0$ としてあるので、 t での積分範囲は $(0, 1)$ である。

$$dx = \frac{1}{n} \left(-\frac{b}{a}\right)^{1/n} t^{1/n-1} dt \quad (2.29)$$

となるから、

$$\begin{aligned} I_d(a, b, m, n, p) &= \frac{b^{(m+np+1)/n}}{n(-a)^{(m+1)/n}} \int_0^1 t^{(m+1)/n-1} (1-t)^p dt \\ &= \frac{b^{(m+np+1)/n}}{n(-a)^{(m+1)/n}} B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

が得られる。 $n > 0, m+1 > 0, p+1 > 0$ を仮定してあるので、 $t = 0, 1$ のところで積分は収束する。

2.3 Chebyshev の計算法

m, n, p が有理数の場合の二項積分 $I(x; a, b, m, n, p)$ が初等関数の範囲で積分できるのは、(1) p が整数の場合 (2) $(m+1)/n$ が整数の場合 (3) $(m+1)/n + p$ が整数の場合、の 3 つの場合に限られることが知られている (森口・宇田川・一松, 1960)。

1. p が整数の場合。有理数 m, n を既約分数に表示したときの分母の最小公倍数を l とすれば、置換 $t = x^{1/l}$ により有理化される。実際、 $m = \mu/l, n = \nu/l$ とすると、 μ, ν は整数で、

$$x = t^l \quad (2.31)$$

$$dx = lt^{l-1} dt \quad (2.32)$$

だから、

$$I(x; a, b, m, n, p) = \int x^m (ax^n + b)^p dx = l \int t^{\mu+l-1} (at^\nu + b)^p dt \quad (2.33)$$

となって、有理式の積分になる。

2. $(m+1)/n$ が整数の場合。 $p = q/r$ (q と r は整数) とすると、置換 $t^r = ax^n + b$ により有理化される。実際 $(m+1)/n = \mu$ (整数) とすると、

$$x = \left(\frac{t^r - b}{a}\right)^{1/n} \quad (2.34)$$

$$dx = \frac{r}{na^{1/n}} (t^r - b)^{1/n-1} t^{r-1} dt \quad (2.35)$$

だから、

$$\begin{aligned}
 I(x; a, b, m, n, p) &= \int x^m (ax^n + b)^p dx \\
 &= \frac{r}{na^{1/n}} \int (t^r - b)^{(m+1)/n-1} a^{-m/n} t^{q+r-1} dt \\
 &= \frac{r}{na} \int \left(\frac{t^r - b}{a} \right)^{\mu-1} t^{q+r-1} dt
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

となって、有理式の積分になる。

3. $(m+1)/n + p$ が整数の場合。 $p = q/r$ (q と r は整数) とすると、置換 $t^r = a + bx^{-n}$ により有理化される。実際 $(m+1)/n + p = \mu$ (整数) とすると、

$$x = \left(\frac{b}{t^r - a} \right)^{1/n} \tag{2.37}$$

$$dx = -\frac{rb^{1/n}}{n(t^r - a)^{1/n+1}} t^{r-1} dt \tag{2.38}$$

だから、

$$\begin{aligned}
 I(x; a, b, m, n, p) &= \int x^m (ax^n + b)^p dx \\
 &= -\frac{rb^{1/n}}{n} \int \frac{b^{m/n+p}}{(t^r - a)^{(m+1)/n+p+1}} t^{q+r-1} dt \\
 &= -\frac{r}{nb} \int \left(\frac{b}{t^r - a} \right)^{\mu+1} t^{q+r-1} dt
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

となって、有理式の積分になる。

2.4 参考文献

- [本] 森口繁一, 宇田川かね久 (「かね」は、金へんに圭), 一松信 (1960) 数学公式 III — 特殊関数 —, 岩波書店

第 3 章

三角関数の有理関数

3.1 Weierstrass 置換

三角関数の有理関数の積分には以下の必殺技がある。以下、少しだけ違う 2 通りの方法を考える。 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ の有理関数の積分を考える。

- 方法 1 Weierstrass 置換

$$t = \tan(\theta/2) \quad (3.1)$$

$$\theta = 2 \arctan t \quad (3.2)$$

と置くと

$$d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt \quad (3.3)$$

であり、半角公式より

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (3.4)$$

ゆえ

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (3.5)$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (3.6)$$

$$\tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2} \quad (3.7)$$

となり、積分 $\int R(x, \sqrt{\varphi(x)}) dx$ は t の有理関数積分となる。これで積分ができる。

- 方法 2

$$t = \tan(\theta/2 + \pi/4) \quad (3.8)$$

$$\theta = 2 \arctan t - \pi/2 \quad (3.9)$$

と置くと

$$d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt \quad (3.10)$$

であり、半角公式より

$$\tan^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \cos(\theta + \pi/2)}{1 + \cos(\theta + \pi/2)} = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \quad (3.11)$$

ゆえ

$$\sin \theta = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad (3.12)$$

$$\cos \theta = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad (3.13)$$

$$\tan \theta = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad (3.14)$$

となり、積分 $\int R(x, \sqrt{\varphi(x)})dx$ は t の有理関数積分となる。これで積分ができる。

方法 1 と 2 とではちょうど $\cos$ と $\sin$ の役割が入れ替わった形になり、どちらの方がうまくいくかは問題による。どちらも積分できることに変わりはないが、答えの形が少し違う。

3.1.1 参考文献

- [雑誌記事] 武部尚志 (2017) 楕円積分の分類—道案内版 (連載: 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方 第 3 回), 数学セミナー 2017 年 6 月号, 73–79.
- [ネット上文書] Scott K. Hyde, Math 113, The Weierstrass Substitution
<http://jekyll.math.byuh.edu/courses/m113/handouts/weierstrass.pdf>

3.2 不定積分各論

三角関数の積分は 3.1 節の定石を使えば必ず積分はできるのだが、個別には定石に従わないやり方が知られている場合がいくつでもある。それを見てゆく。

3.2.1 $\sec \theta$ の積分

$$I = \int \sec \theta d\theta = \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \quad (3.15)$$

を積分する。面白いことには、10 通り以上の答え方があり、そのやり方によって、一見すると異なる形の答えがいくつも出てくる。

(1) まずは素直に定石どおりやる方法。3.1 節の Wierstrass 置換にしたがって

$$t = \tan(\theta/2) \quad (3.16)$$

と置けば

$$I = \int \frac{2}{1-t^2} dt = \int \left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right] dt = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \quad (3.17)$$

となる。 C は積分定数である。変数を元に戻すと

$$I = \ln \left| \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)} \right| + C \quad (3.18)$$

となる。

- (2) (3.18) では最後に $\theta/2$ の関数が出てしまった。これを θ の関数にしたいと思うと、三角関数の公式を用いるというのもあるけれど、 t の関数の段階で $1 - t^2$ を出すように変形するというのもありそうだと見当をつける。すると、(1) の途中から

$$\begin{aligned} I &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \frac{1+t}{1+t} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1+t^2+2t}{1-t^2} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{2t}{1-t^2} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right| + C \end{aligned} \quad (3.19)$$

- (3) では、素直に $s = \sec \theta$ と置くとどうということになるか見てみる。

$$ds = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = -\tan \theta \sec \theta d\theta \quad (3.20)$$

ゆえ

$$I = \int \sec \theta d\theta = \int \frac{ds}{\tan \theta} = \int \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} \quad (3.21)$$

となる。4.3.3 節の置き換え

$$s = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (3.22)$$

$$t = s + \sqrt{s^2 - 1} \quad (3.23)$$

$$\sqrt{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad (3.24)$$

$$ds = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt \quad (3.25)$$

を行うと

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |s + \sqrt{s^2 - 1}| + C = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \quad (3.26)$$

と (3.19) と同じ形を得る。

- (4) (3.19) という答えがわかっているからできるようなものだが、それを導く一番手っ取り早い方法は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{\cos \theta} \frac{\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta}}{\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta}} d\theta \\
 &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}{\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta}} d\theta \\
 &= \ln \left| \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right| + C
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

ここで、 C は積分定数である。

- (5) (4) と同様の方法で少しだけ違うもの

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{\cos \theta} \frac{\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta}{\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta} d\theta \\
 &= - \int \frac{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta} d\theta \\
 &= \ln \left| \frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta \right| + C
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ここで、 C は積分定数である。

- (6) (1) のやり方だと実は 3.2.2 節でやるように $\sec$ より $\csc$ の積分の方が簡単だということを知っていれば最初に

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2} \tag{3.29}$$

としておいて

$$I = \int \frac{1}{\cos(\phi - \pi/2)} d\phi = \int \frac{1}{\sin \phi} d\phi = \int \csc \phi d\phi \tag{3.30}$$

とするのもある。3.2.2 節の結果より

$$I = \ln \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \tag{3.31}$$

となる。 C は積分定数である。

- (7) (6) と同じことだが 3.1 節の方法 2 にしたがって

$$t = \tan(\theta/2 + \pi/4) \tag{3.32}$$

と置けば

$$I = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \tag{3.33}$$

となる。 C は積分定数である。

- (8) $\sec$ より $\csc$ の方が簡単だとわかっているならば、 $\cos$ を $\sin$ に直すのは、以下のも素直である。

$$I = \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int \frac{1}{\sin(\pi/2 - \theta)} d\theta = - \int \csc(\pi/2 - \theta) d(\pi/2 - \theta) \tag{3.34}$$

3.2.2 節の結果より

$$I = -\ln \left| \tan \frac{\pi/2 - \theta}{2} \right| + C = -\ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right| + C \quad (3.35)$$

となる。 C は積分定数である。

(9) 積分を

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned} \quad (3.36)$$

と書き直してみると、

$$t = \sin \theta \quad (3.37)$$

$$dt = \cos \theta d\theta \quad (3.38)$$

と置いても t の有理式の積分にできることがわかるだろう。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1 - t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{(1 + t)(1 - t)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} [\ln |1 + t| - \ln |1 - t|] + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} + C \end{aligned} \quad (3.39)$$

ここで、 C は積分定数である。

(10) 双曲線関数を使い慣れていれば (9) の途中の

$$I = \int \frac{1}{1 - t^2} dt \quad (3.40)$$

において

$$t = \tanh x \quad (3.41)$$

$$dt = \frac{1}{\cosh^2 x} dx \quad (3.42)$$

と置き ($|t| = |\sin \theta| < 1$ で、 $|\tanh x| < 1$ ゆえ、こう置いてかまわない)、

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (3.43)$$

を用いると

$$I = \int dx = x + C = \tanh^{-1} t + C = \tanh^{-1}(\sin \theta) + C \quad (3.44)$$

という答え方もある (C は積分定数)。

- (11) 双曲線関数を使うなら他のやり方もある。 $\sec \theta \geq 1$ とともに $\cosh x \geq 1$ であることに注目すると

$$\sec \theta = \cosh x \quad (3.45)$$

と置くことも考えられる。すると

$$\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sinh x \quad (3.46)$$

と書くことができる。すると、

$$\sec \theta \tan \theta d\theta = \sinh x dx \quad (3.47)$$

より

$$d\theta = \frac{1}{\cosh x} dx \quad (3.48)$$

となる。したがって、

$$I = \int \sec \theta d\theta = \int \frac{\cosh x}{\cosh x} dx = \int dx = x + C = \cosh^{-1}(\sec \theta) + C \quad (3.49)$$

となる (C は積分定数)。

- (12) 双曲線関数を使うならば、 $t = \tan \theta$ と置くことも考えられよう。

$$\sec \theta = \sqrt{1 + t^2} \quad (3.50)$$

$$dt = \sec^2 \theta d\theta = (1 + t^2) d\theta \quad (3.51)$$

なので、

$$I = \int \sec \theta d\theta = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} \quad (3.52)$$

ここで、 $t = \sinh x$ と置けば

$$\sqrt{1 + t^2} = \cosh x \quad (3.53)$$

$$dt = \cosh x dx \quad (3.54)$$

ゆえ

$$I = \int dx = x + C = \sinh^{-1}(\tan \theta) + C \quad (3.55)$$

となる (C は積分定数)。

(13) 複素数の領域に侵入する方法もある。

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\
 &= \int \frac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} d\theta \\
 &= 2 \int \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta} + 1} d\theta
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

ここで、

$$z = e^{i\theta} \tag{3.57}$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \tag{3.58}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
 I &= -2i \int \frac{1}{z^2 + 1} dz \\
 &= -2i \arctan z + C \\
 &= -2i \arctan(e^{i\theta}) + C
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

を得る。ただし、実関数の積分に複素数が出てきてしまうのは、興味深くはあっても、実用的には困ったことではある。

答えの表式がお互いに等しいことをいくつかの場合に直接示しておく。

- (3.31) から (3.18) を導くには $\tan$ の加法定理を用いれば良い。

$$\begin{aligned}
 \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| &= \ln \left| \frac{\tan(\theta/2) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(\theta/2) \tan(\pi/4)} \right| \\
 &= \ln \left| \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)} \right|
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

- (3.35) から (3.31) を導くには

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \cot \phi \tag{3.61}$$

を用いる。すると

$$-\ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right| = -\ln \left| \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \tag{3.62}$$

となる。

- (3.39) から (3.18) を導くには $\sin$ の倍角公式を用いて以下のようにする。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{1 - 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{[\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)]^2}{[\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)]^2} \\
&= \ln \left| \frac{\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)} \right| \\
&= \ln \left| \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)} \right|
\end{aligned} \tag{3.63}$$

- (3.18) から (3.19) を導くには

$$\begin{aligned}
\ln \left| \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)} \right| &= \ln \left| \frac{\cos^2(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2) - \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \right| \\
&= \ln \left| \frac{1 + \cos \theta + \sin \theta}{1 + \cos \theta - \sin \theta} \right| \\
&= \ln \left| \frac{(1 + \cos \theta + \sin \theta)^2}{(1 + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta} \right| \\
&= \ln \left| \frac{2(1 + \cos \theta + \sin \theta + \sin \theta \cos \theta)}{2 \cos \theta (1 + \cos \theta)} \right| \\
&= \ln \left| \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \cos \theta)}{\cos \theta (1 + \cos \theta)} \right| \\
&= \ln \left| \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right| \\
&= \ln \left| \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right|
\end{aligned} \tag{3.64}$$

- (3.39) から (3.19) を導くには

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin \theta)^2}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 \\
&= \ln \left| \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right| \\
&= \ln \left| \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right|
\end{aligned} \tag{3.65}$$

となることかわかる。

- (3.44) が (3.39) に等しいことは、公式

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \tag{3.66}$$

が示せればよい。以下、これを示す。

$$y = \tanh^{-1} x \tag{3.67}$$

と置くと $x = \tanh y$ 。これを指数関数で書くと

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad (3.68)$$

となるから、

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad (3.69)$$

したがって、

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad (3.70)$$

となる。

- (3.59) が (3.18) に等しいことは、公式

$$\arctan x = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i+x}{i-x} \right) \quad (3.71)$$

を用いて

$$\begin{aligned} -2i [\arctan(e^{i\theta}) - \arctan(1)] &= \ln \left(\frac{i+e^{i\theta}}{i-e^{i\theta}} \right) - \ln \left(\frac{i+1}{i-1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{i+e^{i\theta}}{i-e^{i\theta}} \frac{i-1}{i+1} \right) \\ &= \ln \frac{-e^{i\theta} - 1 + i(e^{i\theta} - 1)}{-e^{i\theta} - 1 - i(e^{i\theta} - 1)} \\ &= \ln \frac{e^{i\theta} + 1 - i(e^{i\theta} - 1)}{e^{i\theta} + 1 + i(e^{i\theta} - 1)} \\ &= \ln \frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} - i(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} + i(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} \\ &= \ln \frac{\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)} \\ &= \ln \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)} \end{aligned} \quad (3.72)$$

となることからわかる。ただし、複素関数として考えると $\ln$ の中が負になると $i\pi$ が出てくるだけだが、実関数としては困るので、実関数として考えるときは $\ln$ の中身には絶対値をつけておく必要がある。もともと $\theta = \pi/2 + n\pi$ をまたぐと積分が発散するので、そこをまたいで積分するようなことは考えなくてよい。なので、そこで積分に $i\pi$ の跳びが出てきてもその分は積分定数に入れてしまってもかまわない。

3.2.2 $\csc \theta$ の積分

$$I = \int \csc \theta d\theta = \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta \quad (3.73)$$

を積分する。sec でいろいろな積分をやったのと基本的には同じことができる。ここでは代表的ないくつかだけ見ておくことにする。

(1) まずは素直に定石どおりやる方法。3.1 節の方法 1 にしたがって

$$t = \tan(\theta/2) \quad (3.74)$$

と置けば

$$I = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| + C \quad (3.75)$$

となる。 C は積分定数である。

(2) 上の答えがわかっているならば、変数変換をしなくても答えにたどり着ける。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta \\ &= \int \frac{1}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} d\theta \\ &= \int \frac{1}{2 \tan(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} d\theta \\ &= \int \frac{1/\cos^2(\theta/2)}{\tan(\theta/2)} d(\theta/2) \\ &= \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| + C \end{aligned} \quad (3.76)$$

(3) 同様にこういう手もある。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta \\ &= \int \frac{\sin^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} d\theta \\ &= \int \left[\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right] d(\theta/2) \\ &= -\ln \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| + \ln \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \\ &= \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| + C \end{aligned} \quad (3.77)$$

(4) 積分を

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int \frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned} \quad (3.78)$$

と書き直してみると、

$$t = \cos \theta \quad (3.79)$$

$$dt = -\sin \theta d\theta \quad (3.80)$$

と置いても t の有理式の積分にできることがわかるだろう。

$$\begin{aligned}
 I &= - \int \frac{1}{(1+t)(1-t)} dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right] dt \\
 &= -\frac{1}{2} [\ln |1+t| - \ln |1-t|] + C \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right| + C \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} + C
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

ここで、 C は積分定数である。

(5) $\sec$ の積分と同様の手っ取り早い方法は

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{\sin\theta} \frac{\cot\theta + \csc\theta}{\cot\theta + \csc\theta} d\theta \\
 &= - \int \frac{-\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}{\cot\theta + \csc\theta} d\theta \\
 &= -\ln |\cot\theta + \csc\theta| + C
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

である (C は積分定数)。

3.2.3 $1/(a \sin \theta + b \cos \theta)$ の積分

$$I = \int \frac{1}{a \sin \theta + b \cos \theta} d\theta \tag{3.83}$$

を積分する。2通りのやり方を試みる。

(1) $\csc$ の積分に還元する。

$$I = \int \frac{1}{a \sin \theta + b \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{1}{\sin(\theta + \alpha)} d\theta \tag{3.84}$$

と書ける。ここで、

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.85}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.86}$$

である。3.2.2 節の結果を利用すれば

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln |\cot(\theta+\alpha) + \csc(\theta+\alpha)| + C \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{1+\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} \right| + C \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{1+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\cos\theta-b\sin\theta)}{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\sin\theta+b\cos\theta)} \right| + C \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2+b^2}+(a\cos\theta-b\sin\theta)}{a\sin\theta+b\cos\theta} \right| + C
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

あるいは途中から $\ln$ の中の分母分子を入れ替えて

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{1+\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} \right| + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{\sin(\theta+\alpha)}{1+\cos(\theta+\alpha)} \right| + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{1-\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} \right| + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{1-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\cos\theta-b\sin\theta)}{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\sin\theta+b\cos\theta)} \right| + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2+b^2}-(a\cos\theta-b\sin\theta)}{a\sin\theta+b\cos\theta} \right| + C
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

とすることもできる。

(2) 定石に従って積分する。3.1 節の方法 1 Weierstrass 置換にしたがって

$$t = \tan(\theta/2) \tag{3.89}$$

$$d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt \tag{3.90}$$

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{3.91}$$

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \tag{3.92}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2}{2at + b(1 - t^2)} dt \\
&= \int \frac{2b}{(a^2 + b^2) - (bt - a)^2} dt \\
&= \int \frac{2b}{(\sqrt{a^2 + b^2} + bt - a)(\sqrt{a^2 + b^2} - bt + a)} dt \\
&= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} + bt - a} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} - bt + a} \right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\ln \left| \sqrt{a^2 + b^2} + bt - a \right| - \ln \left| \sqrt{a^2 + b^2} - bt + a \right| \right] + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + bt - a}{\sqrt{a^2 + b^2} - bt + a} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b \tan(\theta/2) - a}{\sqrt{a^2 + b^2} - b \tan(\theta/2) + a} \right| + C
\end{aligned} \tag{3.93}$$

となる。ただし、 $b = 0$ のときは 3.2.2 節の結果に従う。

もしも、 $\theta/2$ の関数になっているのが不便で θ の関数に直したいときは、 $\ln$ の中の分母分子に $\cos^2(\theta/2)$ をかけてから半角公式・倍角公式を用いる。

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a) \cos^2(\theta/2) + b \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{(\sqrt{a^2 + b^2} + a) \cos^2(\theta/2) - b \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)[1 + \cos \theta] + b \sin \theta}{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)[1 + \cos \theta] - b \sin \theta} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)[1 + \sec \theta] + b \tan \theta}{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)[1 + \sec \theta] - b \tan \theta} \right| + C
\end{aligned} \tag{3.94}$$

といった形になる。あるいは右辺 2 番目の式から派生して

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)[1 + \cos \theta] + b \sin \theta}{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)[1 + \cos \theta] - b \sin \theta} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{\{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)[1 + \cos \theta] + b \sin \theta\}^2}{\{(\sqrt{a^2 + b^2}[1 + \cos \theta]\}^2 - \{a[1 + \cos \theta] - b \sin \theta\}^2} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&\quad \times \ln \left| \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)^2[1 + \cos \theta]^2 + 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)b[1 + \cos \theta] \sin \theta + b^2 \sin^2 \theta}{(a^2 + b^2)(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) - (a^2[1 + \cos \theta]^2 - 2ab \sin \theta[1 + \cos \theta] + b^2 \sin^2 \theta)} \right| \\
&\quad + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&\quad \times \ln \left| \frac{\{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)^2[1 + \cos \theta] + 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)b \sin \theta + b^2(1 - \cos \theta)\} (1 + \cos \theta)}{2b(a \sin \theta + b \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \right| \\
&\quad + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)^2[1 + \cos \theta] + 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)b \sin \theta + b^2(1 - \cos \theta)}{2b(a \sin \theta + b \cos \theta)} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{a^2(1 + \cos \theta) + b^2 - \sqrt{a^2 + b^2}(a + a \cos \theta - b \sin \theta) - ab \sin \theta}{b(a \sin \theta + b \cos \theta)} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{[\sqrt{a^2 + b^2} - a][\sqrt{a^2 + b^2} - (a \cos \theta - b \sin \theta)]}{b(a \sin \theta + b \cos \theta)} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - (a \cos \theta - b \sin \theta)}{a \sin \theta + b \cos \theta} \right| + C'
\end{aligned} \tag{3.95}$$

とすると方法 (1) の結果に還元できる (C, C' は積分定数)。

3.2.4 $1/(a + b \cos \theta)$ の積分

$$I = \int \frac{1}{a + b \cos \theta} d\theta \tag{3.96}$$

を積分する。

定石に従って積分する。3.1 節の方法 1 Weierstrass 置換にしたがって

$$t = \tan(\theta/2) \tag{3.97}$$

$$d\theta = \frac{2}{1 + t^2} dt \tag{3.98}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \tag{3.99}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2}{a(1+t^2) + b(1-t^2)} dt \\
 &= \int \frac{2}{(a+b) + (a-b)t^2} dt \\
 &= \frac{2}{a-b} \int \frac{1}{t^2 + \frac{a+b}{a-b}} dt
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

となる。ここで、 a^2 と b^2 の大小に応じて4つの場合に分かれる。

(1) $a^2 > b^2$ の場合

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t \right) + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{\theta}{2} \right) + C
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

である (C は積分定数)。 $\theta/2$ の形が不便な場合は、 $\arctan$ の倍角公式

$$2 \arctan x = \arctan \frac{2x}{1-x^2} \tag{3.102}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{2\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{a-b}{a+b} \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{2\sqrt{a^2 - b^2} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{(a+b) \cos^2(\theta/2) - (a-b) \sin^2(\theta/2)} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin \theta}{a \cos \theta + b} \right) + C
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

となる。ただし、この形の場合、 $\cos \theta = -b/a$ のとき、括弧内が発散するので、 θ がその値をまたぐときには逆三角関数のどの分枝を選ぶかについて注意が必要である。あるいは $\arcsin$ の公式

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3.104}$$

ならびに

$$(a \cos \theta + b)^2 + (\sqrt{a^2 - b^2} \sin \theta)^2 = (a + b \cos \theta)^2 \tag{3.105}$$

を用いると、

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin \theta}{a + b \cos \theta} \right) + C \tag{3.106}$$

となる。ただし、この形でも、 $\cos \theta = -b/a$ のとき、括弧内が 1 になるので、 θ がその値をまたぐときには逆三角関数のどの分枝を選ぶかについて注意が必要である。あるいは $\arcsin$ の公式

$$\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0) \quad (3.107)$$

$$\arcsin x + \arcsin(-\sqrt{1-x^2}) = -\frac{\pi}{2} \quad (x < 0) \quad (3.108)$$

ならびに

$$(a + b \cos \theta)^2 - (\sqrt{a^2 - b^2} \sin \theta)^2 = (a \cos \theta + b)^2 \quad (3.109)$$

を用いると、

$$I = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{a \cos \theta + b}{a + b \cos \theta} \right) + C' \quad (3.110)$$

を得る (C' は積分定数)。この形だと、 $\cos \theta = -b/a$ のとき、括弧内は 0 になるだけなので、逆三角関数の分枝選びの問題はそこでは生じない。

(2) $a = b$ の場合

$$I = \frac{1}{a} \int dt = \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a} \tan \frac{\theta}{2} + C \quad (3.111)$$

$\theta/2$ の形が不便な場合は、さらに式変形を進めて

$$I = \frac{1}{a} \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} + C = \frac{1}{a} \frac{\sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} + C = \frac{\sin \theta}{a(1 + \cos \theta)} + C \quad (3.112)$$

(3) $a = -b$ の場合

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{at} + C = -\frac{1}{a} \cot \frac{\theta}{2} + C \quad (3.113)$$

$\theta/2$ の形が不便な場合は、さらに式変形を進めて

$$I = -\frac{1}{a} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} + C = -\frac{1}{a} \frac{\sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + C = -\frac{\sin \theta}{a(1 - \cos \theta)} + C \quad (3.114)$$

(4) $a^2 < b^2$ の場合

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{a-b} \int \frac{dt}{\left(t - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right) \left(t + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)} \\ &= \frac{1}{a-b} \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \int \left[\frac{1}{t - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} - \frac{1}{t + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} \right] dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{t + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{t + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{t - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(b-a) \tan(\theta/2) + \sqrt{b^2 - a^2}}{(b-a) \tan(\theta/2) - \sqrt{b^2 - a^2}} \right| + C \end{aligned} \quad (3.115)$$

$\theta/2$ の形が不便な場合は、さらに式変形を進めて

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(b-a) \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) + \sqrt{b^2 - a^2} \cos^2(\theta/2)}{(b-a) \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) - \sqrt{b^2 - a^2} \cos^2(\theta/2)} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(b-a) \sin \theta + \sqrt{b^2 - a^2} (1 + \cos \theta)}{(b-a) \sin \theta - \sqrt{b^2 - a^2} (1 + \cos \theta)} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \\
&\quad \times \ln \left| \frac{(b-a)^2 \sin^2 \theta + 2(b-a)\sqrt{b^2 - a^2} \sin \theta (1 + \cos \theta) + (b^2 - a^2)(1 + \cos \theta)^2}{(b-a)^2 \sin^2 \theta - (b^2 - a^2)(1 + \cos \theta)^2} \right| \\
&\quad + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(b-a) \sin^2 \theta + 2\sqrt{b^2 - a^2} \sin \theta (1 + \cos \theta) + (b+a)(1 + \cos \theta)^2}{(b-a) \sin^2 \theta - (b+a)(1 + \cos \theta)^2} \right| \\
&\quad + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{[2b + 2a \cos \theta + 2\sqrt{b^2 - a^2} \sin \theta](1 + \cos \theta)}{(-2b \cos \theta - 2a)(1 + \cos \theta)} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \cos \theta + b + \sqrt{b^2 - a^2} \sin \theta}{a + b \cos \theta} \right| + C
\end{aligned} \tag{3.116}$$

3.2.5 $1/(a + b \sin \theta)$ の積分

$$I = \int \frac{1}{a + b \sin \theta} d\theta \tag{3.117}$$

を積分する。

定石の Weierstrass 置換を行っても良いが、それは実は後述のようにけっこう面倒な形になる。それより前の 3.2.4 節の結果を流用した方が簡単である。そこで、

$$\theta = \phi + \frac{\pi}{2} \tag{3.118}$$

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{2} \tag{3.119}$$

$$d\theta = d\phi \tag{3.120}$$

の置き換えを行うと

$$I = \int \frac{1}{a + b \sin(\phi + \frac{\pi}{2})} d\phi = \int \frac{1}{a + b \cos \phi} d\phi \tag{3.121}$$

となるので、前節の結果と

$$\sin \phi = -\cos \theta \tag{3.122}$$

$$\cos \phi = \sin \theta \tag{3.123}$$

とを用いると

(1) $a^2 > b^2$ の場合^{*1}

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta}{a \sin \theta + b} \right) + C \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta}{a + b \sin \theta} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{a \sin \theta + b}{a + b \sin \theta} \right) + C'
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

(2) $a = b$ の場合

$$I = -\frac{\cos \theta}{a(1 + \sin \theta)} + C \tag{3.125}$$

(3) $a = -b$ の場合

$$I = \frac{\cos \theta}{a(1 - \sin \theta)} + C \tag{3.126}$$

(4) $a^2 < b^2$ の場合

$$I = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \sin \theta + b - \sqrt{b^2 - a^2} \cos \theta}{a + b \sin \theta} \right| + C \tag{3.127}$$

となる。

次に、定石に従って積分するのもやってみる。3.1 節の方法 1 Weierstrass 置換にしたがって

$$t = \tan(\theta/2) \tag{3.128}$$

$$d\theta = \frac{2}{1 + t^2} dt \tag{3.129}$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2} \tag{3.130}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2}{a(1 + t^2) + 2tb} dt \\
 &= \frac{2}{a} \int \frac{1}{\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}} dt
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

となる。ここで、 a^2 と b^2 の大小に応じて 4 つの場合に分かれる。

^{*1} 3.2.4 節の結果に上の置き換えをそのまま行くと以下の式の 3 行目にもマイナスが付くのだが、 $\arcsin$ の分枝の取り方次第で、どちらが正しいとはいえない。ここでは、第 2 行目から第 3 行目に移るとき、もともと $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \pi/2$ を用いていたことから 2 行目と 3 行目の符号を逆にしたいので、そのようにした。

(1) $a^2 > b^2$ の場合

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[t + \frac{b}{a} \right] \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{a \tan(\theta/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) + C \end{aligned} \quad (3.132)$$

である (C は積分定数)。 $\theta/2$ の形が不便な場合は、 $\arctan$ の倍角公式

$$2 \arctan x = \arctan \frac{2x}{1 - x^2} \quad (3.133)$$

を用いて

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{2 \frac{a \tan(\theta/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}}{1 - \frac{(a \tan(\theta/2) + b)^2}{a^2 - b^2}} \right) + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{2\sqrt{a^2 - b^2}[a \tan(\theta/2) + b]}{(a^2 - b^2) - [a \tan(\theta/2) + b]^2} \right) + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \\ &\quad \times \arctan \left(\frac{2\sqrt{a^2 - b^2}[a \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) + b \cos^2(\theta/2)]}{a^2[\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)] - 2ab \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) - 2b^2 \cos^2(\theta/2)} \right) \\ &\quad + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}[a \sin \theta + b(1 + \cos \theta)]}{a^2 \cos \theta - ab \sin \theta - b^2(1 + \cos \theta)} \right) + C' \end{aligned} \quad (3.134)$$

となる。ただし、この形の場合、 $\tan \theta = a/b$ のとき、括弧内が発散するので、 θ がその値をまたぐときには逆三角関数のどの分枝を選ぶかについて注意が必要である。ここで、さらに

$\arctan$ の加法定理を用いて、以下のように定数を加えてみると

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \\
 &\times \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}[a \sin \theta + b(1 + \cos \theta)]}{a^2 \cos \theta - ab \sin \theta - b^2(1 + \cos \theta)} \right) + \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right] \\
 &+ C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \\
 &\times \arctan \left(\frac{b\sqrt{a^2 - b^2}[a \sin \theta + b(1 + \cos \theta)] + \sqrt{a^2 - b^2}[a^2 \cos \theta - ab \sin \theta - b^2(1 + \cos \theta)]}{b[a^2 \cos \theta - ab \sin \theta - b^2(1 + \cos \theta)] - (a^2 - b^2)[a \sin \theta + b(1 + \cos \theta)]} \right) \\
 &+ C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{a^2 \sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta}{-a^2(a \sin \theta + b)} \right) + C \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cos \theta}{a \sin \theta + b} \right) + C
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

となり、前の 3.2.4 節の結果を流用した (3.124) 式に合流する。

(2) $a = b$ の場合

$$I = \frac{2}{a} \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{a(t+1)} + C = -\frac{2}{a(\tan(\theta/2) + 1)} + C \tag{3.136}$$

$\theta/2$ の形が不便な場合は、さらに式変形を進めて

$$I = -\frac{2}{a} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) + \cos^2(\theta/2)} + C = -\frac{2(1 + \cos \theta)}{a(1 + \cos \theta + \sin \theta)} + C \tag{3.137}$$

とすればよい。これが前の (3.125) 式と定数を除いて一致することは、

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + 1 = \frac{2(1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta + \sin \theta} \tag{3.138}$$

となることからわかる。

(3) $a = -b$ の場合

$$I = \frac{2}{a} \int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{a(t-1)} + C = -\frac{2}{a(\tan(\theta/2) - 1)} + C \tag{3.139}$$

$\theta/2$ の形が不便な場合は、さらに式変形を進めて

$$I = -\frac{2}{a} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) - \cos^2(\theta/2)} + C = \frac{2(1 + \cos \theta)}{a(1 + \cos \theta - \sin \theta)} + C \tag{3.140}$$

とすればよい。これが前の (3.126) 式と定数を除いて一致することは、

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + 1 = \frac{2(1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta - \sin \theta} \tag{3.141}$$

となることからわかる。

(4) $a^2 < b^2$ の場合

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{a} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right) \left(t + \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int \left[\frac{1}{t + \frac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a}} - \frac{1}{t + \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}} \right] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{t + \frac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a}}{t + \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}} \right| + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \tan(\theta/2) + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \tan(\theta/2) + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \right| + C'
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

$\theta/2$ の形が不便な場合は、さらに式変形を進めて

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) + (b - \sqrt{b^2 - a^2}) \cos^2(\theta/2)}{a \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) + (b + \sqrt{b^2 - a^2}) \cos^2(\theta/2)} \right| + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \sin \theta + (b - \sqrt{b^2 - a^2})(1 + \cos \theta)}{a \sin \theta + (b + \sqrt{b^2 - a^2})(1 + \cos \theta)} \right| + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left[\ln |a^2 \sin^2 \theta + 2ab \sin \theta(1 + \cos \theta) + b^2(1 + \cos \theta)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (b^2 - a^2)(1 + \cos \theta)^2 - 2[a \sin \theta + b(1 + \cos \theta)]\sqrt{b^2 - a^2}(1 + \cos \theta) \right| \\
 &\quad - \ln |a^2 \sin^2 \theta + 2ab \sin \theta(1 + \cos \theta) + b^2(1 + \cos \theta)^2 - (b^2 - a^2)(1 + \cos \theta)^2| \\
 &\quad + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| -2a^2 \cos \theta(1 + \cos \theta) + 2ab \sin \theta(1 + \cos \theta) + 2b^2(1 + \cos \theta)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2[a \sin \theta + b(1 + \cos \theta)]\sqrt{b^2 - a^2}(1 + \cos \theta) \right| \\
 &\quad - \ln |2a^2(1 + \cos \theta) + 2ab \sin \theta(1 + \cos \theta)| + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \\
 &\quad \times \ln \left| \frac{-a^2 \cos \theta + ab \sin \theta + b^2(1 + \cos \theta) - [a \sin \theta + b(1 + \cos \theta)]\sqrt{b^2 - a^2}}{a[a + b \sin \theta]} \right| \\
 &\quad + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(b - \sqrt{b^2 - a^2})(a \sin \theta + b - \sqrt{b^2 - a^2} \cos \theta)}{a[a + b \sin \theta]} \right| + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \sin \theta + b - \sqrt{b^2 - a^2} \cos \theta}{a + b \sin \theta} \right| + C
 \end{aligned} \tag{3.143}$$

となり、前の 3.2.4 節の結果を流用した (3.127) 式に帰着する。

3.2.6 $\sec^2 \theta$ の積分

$$I = \int \sec^2 \theta = \int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \tan \theta + C \quad (3.144)$$

(C は積分定数) というわけで、簡単なのだが、仮にこのように答えを知らない場合にどうするかを考えてみる。以下 2 通りやってみる。

(1) 定石どおり Weierstrass 置換を用いる。3.1 節の方法 1 にしたがって

$$t = \tan(\theta/2) \quad (3.145)$$

$$d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt \quad (3.146)$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (3.147)$$

を用いると

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^2 \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int \frac{(1+t^2)}{(1-t^2)^2} dt \\ &= 2 \int \frac{(1+t^2)}{(1-t)^2(1+t)^2} dt \\ &= \int \left[\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} + C \\ &= \frac{2t}{1-t^2} + C \\ &= \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} + C \\ &= \tan \theta + C \end{aligned} \quad (3.148)$$

(2) $\sin \theta d\theta = -d(\cos \theta)$ がうまく使える形に持ってゆく。

$$\begin{aligned} I &= \int (\tan^2 \theta + 1) d\theta \\ &= \int \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 \right) d\theta \end{aligned} \quad (3.149)$$

ここで、

$$\int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = - \int \frac{d(\cos \theta)}{(\cos \theta)^2} = \frac{1}{\cos \theta} + C' \quad (3.150)$$

(C' は積分定数) と部分積分を用いると

$$I = \sin \theta \frac{1}{\cos \theta} - \int \cos \theta \frac{1}{\cos \theta} d\theta + \int d\theta = \tan \theta + C \quad (3.151)$$

(C は積分定数) となる。

3.2.7 $\sec^3 \theta$ の積分

$$I = \int \sec^3 \theta = \int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta \quad (3.152)$$

を積分する。いろいろなやり方があるが、ここでは部分積分を用いて積分してみる。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{\tan \theta}{\cos \theta} - \int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \tan \theta d\theta \\ &= \frac{\tan \theta}{\cos \theta} - \int \frac{1}{\cos \theta} \tan^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\tan \theta}{\cos \theta} - \int \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) d\theta \\ &= \frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta - I \end{aligned} \quad (3.153)$$

となるので、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \int \sec \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \log \left| \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right| \right] + C \end{aligned} \quad (3.154)$$

となる。ここで、 $\sec \theta$ の積分には 3.2.1 節の結果のうちの一つの表式を用いた。 C は積分定数である。

3.2.8 参考文献

- [YouTube] blackpenredpen (2017/09/03) "integral of $\sec(x)$, 4 results!"
<https://www.youtube.com/watch?v=7pxmSz0S8Q>
- [YouTube] Flammable Maths (2018/08/17) "Integrating a Quadratic boi - Papa's Improvised Session #2 [integral $\sqrt{ax^2+bx+c}$]"
<https://www.youtube.com/watch?v=cfe5ZPnp-Qg>
- [YouTube] MastereWuMathematics (2016/01/22) "Integral of $\int \sec^2(x)dx$ "
<https://www.youtube.com/watch?v=z7Seqzd8iug>
- [web page] 三角関数の積分 (5) : $\int 1/\sin x dx$ 、 $\int 1/\cos x dx$ in 受験の月
<http://examist.jp/mathematics/math-3/integration/sankakukansu-sekibun5>
- [web page] $\sec x (=1/\cos x)$ の微分と積分の公式 in 具体例で学ぶ数学
<https://mathwords.net/secxnobisekibun>

- [web page] 逆双曲線関数を対数関数で表す in 倭算数理研究所
<https://wasan.hatenablog.com/entry/2016/09/07/092623>
- [ネット上文書] Yue Kwok Choy, Integrate sec x
https://www.qc.edu.hk/math/Teaching_Learning/Integrate%20sec%20x.pdf
- [ネット上文書] Scott K. Hyde, Math 113, The Weierstrass Substitution
<http://jekyll.math.byuh.edu/courses/m113/handouts/weierstrass.pdf>

3.3 定積分

三角関数を含んだ関数の定積分で、定積分ならではのものがいくつかある。

3.3.1 $[0, 2\pi]$ の積分は複素積分で

三角関数 $\sin \theta, \cos \theta$ etc. の関数を $[0, 2\pi]$ の一周で積分するときは、

$$z = e^{i\theta} \quad (3.155)$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (3.156)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (3.157)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (3.158)$$

の置き換えで単位円上の複素積分にすると簡単に積分できることが多い。

3.3.2 ベータ関数

ベータ関数で三角関数の実数冪の $[0, \pi/2]$ の積分が求められる。

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \quad (3.159)$$

3.3.3 Wallis 積分

次の形の積分を Wallis 積分という。

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta \quad (3.160)$$

3.3.3.1 ベータ関数との関係

$$W_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n/2+1)} \quad (3.161)$$

- n が奇数なら $n = 2p + 1$ として

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(p+1+1/2)} = \frac{p!\Gamma(1/2)}{(2p+1)\Gamma(p+1/2)} \\ &= \frac{2^p p!}{(2p+1)!!} = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned} \quad (3.162)$$

- n が偶数なら $n = 2p$ として

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{\Gamma(p+1/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(p+1)} \\ &= \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (3.163)$$

3.3.3.2 漸化式

$n \geq 2$ として、

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} \theta \sin \theta d\theta \\ &= -[\sin^{n-1} \theta \cos \theta]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \end{aligned} \quad (3.164)$$

したがって、

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \quad (3.165)$$

- n が奇数なら $n = 2p + 1$ として

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2}{3} W_1 = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \quad (3.166)$$

- n が偶数なら $n = 2p$ として

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot \frac{1}{2} W_0 = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad (3.167)$$

3.3.4 参考文献

- [web page] Wikipedia "Wallis's integrals" 「ウォリス積分」
https://en.wikipedia.org/wiki/Wallis'_integrals
<https://ja.wikipedia.org/wiki/ウォリス積分>

第 4 章

無理関数の積分 ～ 楕円積分とその周辺

$R(x, s)$ を x, s の有理関数、 $\varphi(x)$ を多項式として

$$\int R(x, \sqrt{\varphi(x)}) dx \quad (4.1)$$

の形の積分を扱う。とくに $\varphi(x)$ が平方因子を含まない 3 次式や 4 次式になるものを楕円積分 (elliptic integral) と呼ぶ。さらに $\varphi(x)$ の次数が 5 以上になると超楕円積分 (hyperelliptic integral) と呼ばれる。

4.1 標準形への還元

この型の積分の解き方のひとつは、少数の標準形に還元してその標準形の積分さえわかっているならばよい、という形にすることである。前提として、有理関数の積分の仕方は既知とし（部分分数に分解）、有理関数や $\varphi(x)$ の係数に複素数を許すことにする。

$s = \sqrt{\varphi(x)}$ と書く。 s^2 は多項式なので、 R として考えないといけない形は

$$R(x, s) = \frac{P_0(x) + P_1(x)s}{Q_0(x) + Q_1(x)s} \quad (4.2)$$

と書ける。ここで、 P_0, P_1, Q_0, Q_1 は多項式である。さらに、

$$\begin{aligned} R(x, s) &= \frac{P_0(x) + P_1(x)s}{Q_0(x) + Q_1(x)s} \\ &= \frac{P_0(x) + P_1(x)s}{Q_0(x) + Q_1(x)s} \cdot \frac{Q_0(x) - Q_1(x)s}{Q_0(x) - Q_1(x)s} \\ &= \frac{[P_0(x)Q_0(x) + P_1(x)Q_1(x)\varphi(x)] + [P_1(x)Q_0(x) + P_0(x)Q_1(x)]s}{Q_0(x)^2 - Q_1(x)^2\varphi(x)} \\ &= \frac{P_0(x)Q_0(x) + P_1(x)Q_1(x)\varphi(x)}{Q_0(x)^2 - Q_1(x)^2\varphi(x)} + \frac{[P_1(x)Q_0(x) + P_0(x)Q_1(x)]\varphi(x)}{[Q_0(x)^2 - Q_1(x)^2\varphi(x)]s} \\ &= R_0(x) + \frac{R_1(x)}{s} \end{aligned} \quad (4.3)$$

と変形できる。ここで、 R_0, R_1 は有理関数である。有理関数の積分はわかっているので、調べるべき部分は $R_1(x)/s$ だけである。

次に R_1 を部分分数に展開する。複素係数を許すことにするので、

$$R_1(x) = \tilde{P}(x) + \sum_{j,m} \frac{c_{jm}}{(x-a_j)^m} \quad (4.4)$$

の形に分解できる。そこで、積分は次の形の積分の一次結合になる。

- $I_n = \int \frac{x^n}{s} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$
- $J_n(\alpha) = \int \frac{1}{(x-\alpha)^n s} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$

これらの間には漸化式の関係がある。

まず、 I_n の間の漸化式を導く。微分関係式

$$\frac{d}{dx}(x^n s) = nx^{n-1}s + \frac{x^n}{2s}\varphi(x) = \frac{nx^{n-1}\varphi(x)}{s} + \frac{x^n\varphi'(x)}{2s} \quad (4.5)$$

を積分する。すると、 $\varphi(x)$ が m 次多項式であれば、

$$x^n s = \begin{cases} c_{n,n+m-1}I_{n+m-1} + c_{n,n+m-2}I_{n+m-2} + \cdots c_{n,n-1}I_{n-1} & (n \neq 0) \\ c_{0,m-1}I_{m-1} + c_{0,m-2}I_{m-2} + \cdots c_{n,0}I_0 & (n = 0) \end{cases} \quad (4.6)$$

の形になる。これを順次適用していけば、 I_n ($n \geq m-1$) を $I_{m-2}, \dots, I_0$ の 1 次結合で表すことができる。

次に、 $J_n(\alpha)$ の間の関係式を求める。 $\varphi(x)$ が m 次多項式であるとして、微分関係式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{s}{(x-\alpha)^n} &= -n \frac{s}{(x-\alpha)^{n+1}} + \frac{\varphi'(x)}{2s(x-\alpha)^n} \\ &= \frac{1}{(x-\alpha)^{n+1}s} \left(-n\varphi(x) + \frac{(x-\alpha)\varphi'(x)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{(x-\alpha)^{n+1}s} \sum_{i=0}^m d_{n,i}(x-\alpha)^i \end{aligned} \quad (4.7)$$

が求められる。ここで、 $d_{n,i}$ は

$$\sum_{i=0}^m d_{n,i}(x-\alpha)^i = -n\varphi(x) + \frac{(x-\alpha)\varphi'(x)}{2} \quad (4.8)$$

から求められる。(4.8) 式の両辺に $x = \alpha$ を代入すると

$$d_{n,0} = -n\varphi(\alpha) \quad (4.9)$$

さらに (4.8) 式を微分して両辺に $x = \alpha$ を代入すると

$$d_{n,1} = \left(\frac{1}{2} - n \right) \varphi'(\alpha) \quad (4.10)$$

が得られる。さて、その準備の下 (4.7) を積分すると、

$$\frac{s}{(x-\alpha)^n} = d_{n,0}J_{n+1}(\alpha) + \cdots + d_{n,m}J_{n+1-m} \quad (4.11)$$

となる。ここで、 $\varphi(\alpha) \neq 0$ であれば、 $d_{n,0} \neq 0$ であって、上の漸化式を順繰りに用いて J_n ($n \geq 2$) を $J_1, J_0, \dots, J_{2-m}$ と (有理関数) $\times s$ の一次結合で表すことができる。もし $\varphi(\alpha) = 0$ であれば、 $\varphi(x)$ が平方因子を持たないという仮定から $\varphi'(\alpha) \neq 0$ になる^{*1}。そこで、先の漸化式を順繰りに用いれば、 J_n ($n \geq 1$) を $J_0, J_{-1}, \dots, J_{2-m}$ と (有理関数) $\times s$ の一次結合で表すことができる。ところが、

$$J_0 = \int \frac{dx}{s} \quad (4.12)$$

$$J_{-1} = \int \frac{x-\alpha}{s} dx \quad (4.13)$$

$$\vdots \quad (4.14)$$

$$J_{2-m} = \int \frac{(x-\alpha)^{m-2}}{s} dx \quad (4.15)$$

となり、これは I_0, I_1, I_{m-2} の線型結合で書ける。

というわけで、 $\varphi(x)$ を m 次多項式として、積分 $\int R(x, \sqrt{\varphi(x)})dx$ は、有理関数の積分、(有理関数) $\times \sqrt{\varphi(x)}$ と次の積分の一次結合になる。

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \quad (4.16)$$

$$I_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \quad (4.17)$$

$$\vdots \quad (4.18)$$

$$I_{m-2} = \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \quad (4.19)$$

$$J_1(\alpha) = \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \quad (4.20)$$

これが標準形である。

4.1.1 参考文献

- [雑誌記事] 武部尚志 (2017) 楕円積分の分類―道案内版 (連載: 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方 第3回), 数学セミナー 2017 年 6 月号, 73–79.

^{*1} もし $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$ であれば $\varphi(x) = \sum_i c_i (x-\alpha)^i$ の展開が $(x-\alpha)^2$ から始まることになり、 $\varphi(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れることになる。

4.2 1 次式の平方根を含む有理式の積分

4.2.1 根号の部分をそっくり置き換える方法

$\varphi(x) = ax + b$ の形の場合を考える。このときは

$$y = \sqrt{ax + b} \quad (4.21)$$

$$x = \frac{y^2 - b}{a} \quad (4.22)$$

と置けば

$$dx = \frac{2y}{a} dy \quad (4.23)$$

となるから、積分 $\int R(x, \sqrt{\varphi(x)}) dx$ は y の有理関数積分となる。

4.2.2 標準形に直して積分

4.1 節の考え方に従うと、

$$\int R(x, \sqrt{ax + b}) dx \quad (4.24)$$

の型の積分は、漸化式を使ってゆけば、結局

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} \quad (4.25)$$

$$J_1(\alpha) = \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax + b}} \quad (4.26)$$

の積分に帰着する。そこで具体的に漸化式と 2 つの積分さえ求めておけば良い。

4.2.2.1 漸化式

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{ax + b}} dx \quad (4.27)$$

とする。微分関係式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^n \sqrt{ax + b}) &= nx^{n-1} \sqrt{ax + b} + \frac{ax^n}{2\sqrt{ax + b}} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) a \frac{x^n}{\sqrt{ax + b}} + nb \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax + b}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

を積分することで、漸化式

$$x^n \sqrt{ax + b} = \left(n + \frac{1}{2}\right) a I_n + nb I_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (4.29)$$

$$\sqrt{ax + b} = \frac{a}{2} I_0 \quad (4.30)$$

すなわち

$$I_n = \frac{1}{(n+1/2)a} \left[x^n \sqrt{ax+b} - nbI_{n-1} \right] \quad (n \geq 1) \quad (4.31)$$

$$I_0 = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} \quad (4.32)$$

を得る。 I_0 もこれでわかる。

$$J_n(\alpha) = \int \frac{1}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax+b}} dx \quad (4.33)$$

とする。微分関係式

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{ax+b}}{(x-\alpha)^n} \right) \\ &= -n \frac{\sqrt{ax+b}}{(x-\alpha)^{n+1}} + \frac{a}{2(x-\alpha)^n \sqrt{ax+b}} \\ &= \frac{1}{(x-\alpha)^{n+1} \sqrt{ax+b}} \left(-n(ax+b) + \frac{a(x-\alpha)}{2} \right) \\ &= - \left(n - \frac{1}{2} \right) a \frac{1}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax+b}} - n(a\alpha+b) \frac{1}{(x-\alpha)^{n+1} \sqrt{ax+b}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

を積分することで、漸化式

$$\frac{\sqrt{ax+b}}{(x-\alpha)^n} = - \left(n - \frac{1}{2} \right) a J_n(\alpha) - n(a\alpha+b) J_{n+1}(\alpha) \quad (4.35)$$

を得る。すなわち、 $a\alpha+b \neq 0$ とすれば、

$$J_n(\alpha) = - \frac{1}{(n-1)(a\alpha+b)} \left[\frac{\sqrt{ax+b}}{(x-\alpha)^{n-1}} + \left(n - \frac{3}{2} \right) a J_{n-1}(\alpha) \right] \quad (n \geq 2) \quad (4.36)$$

$a\alpha+b=0$ とすれば、

$$J_n(\alpha) = - \frac{1}{(n-1/2)a} \frac{\sqrt{ax+b}}{(x-\alpha)^n} \quad (4.37)$$

を得る。

4.2.2.2 $J_1(\alpha)$ の具体的な表式

$$J_1(\alpha) = \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax+b}} \quad (4.38)$$

を 4.2.1 節の方法で積分してゆく。

以下、

$$\varphi_1(x) = ax+b \quad (4.39)$$

と書くことにする。

定石どおり

$$y = \sqrt{ax + b} \quad (4.40)$$

$$x = \frac{y^2 - b}{a} \quad (4.41)$$

$$dx = \frac{2y}{a} dy \quad (4.42)$$

と置く。すると、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{2}{a} \int \frac{y dy}{\left(\frac{y^2 - b}{a} - \alpha\right) y} \\ &= 2 \int \frac{dy}{y^2 - (a\alpha + b)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

ここで、 $\varphi_1(\alpha) = a\alpha + b$ の符号によって 3 通りの場合に分かれる。

(1) $\varphi_1(\alpha) > 0$ の場合：

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= 2 \int \frac{dy}{y^2 - \varphi_1(\alpha)} \\ &= 2 \int \frac{dy}{(y - \sqrt{\varphi_1(\alpha)})(y + \sqrt{\varphi_1(\alpha)})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_1(\alpha)}} \int \left[\frac{1}{y - \sqrt{\varphi_1(\alpha)}} - \frac{1}{y + \sqrt{\varphi_1(\alpha)}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_1(\alpha)}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{\varphi_1(\alpha)}}{y + \sqrt{\varphi_1(\alpha)}} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_1(\alpha)}} \ln \left| \frac{\sqrt{\varphi_1(x)} - \sqrt{\varphi_1(\alpha)}}{\sqrt{\varphi_1(x)} + \sqrt{\varphi_1(\alpha)}} \right| + C \end{aligned} \quad (4.44)$$

(2) $\varphi_1(\alpha) = 0$ の場合：

$$J_1(\alpha) = 2 \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{2}{y} + C = -\frac{2}{\sqrt{\varphi_1(x)}} + C \quad (4.45)$$

(3) $\varphi_1(\alpha) < 0$ の場合：

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= 2 \int \frac{dy}{y^2 + (-\varphi_1(\alpha))} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\varphi_1(\alpha)}} \arctan \left(\frac{y}{\sqrt{-\varphi_1(\alpha)}} \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\varphi_1(\alpha)}} \arctan \left(\frac{\sqrt{\varphi_1(x)}}{\sqrt{-\varphi_1(\alpha)}} \right) + C \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.2.3 参考文献

- [雑誌記事] 武部尚志 (2017) 楕円積分の分類—道案内版 (連載: 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方 第3回), 数学セミナー 2017 年 6 月号, 73–79.
- [本] 森口繁一、宇田川 (金へんに圭) 久、一松信 (1956) 数学公式 I — 微分積分・平面曲線 — (岩波全書), 岩波書店

4.3 2 次式の平方根を含む有理式の積分

$\varphi(x)$ が平方因子を含まない 2 次式の場合を考える。

4.3.1 三角関数を使った解法

Step 1 平方完成によって規格化する

$$\begin{aligned} Q &\equiv \sqrt{ax^2 + bx + c} \\ &= \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}} \\ &= \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

ここで、 $D = b^2 - 4ac$ である。ここで、3 つに場合分けする。

(1) $a > 0$ 、 $D < 0$ の場合

$$y = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \quad (4.48)$$

と置くと、

$$Q = \frac{\sqrt{-D}}{2\sqrt{a}} \sqrt{y^2 + 1} \quad (4.49)$$

となる。

(2) $a > 0$ 、 $D > 0$ の場合

$$y = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \quad (4.50)$$

と置くと、

$$Q = \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{a}} \sqrt{y^2 - 1} \quad (4.51)$$

となる。

(3) $a < 0$ 、 $D > 0$ の場合

$$y = \frac{2(-a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \quad (4.52)$$

と置くと、

$$Q = \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{-a}}\sqrt{1-y^2} \quad (4.53)$$

となる。

なお、 $a < 0$ 、 $D < 0$ では平方根の中が常に負になってしまうので考えなくてよい。

Step 2 規格化した変数 y を三角関数に置き換える 上の Step 1 の場合分けに対応して

(1) $\sqrt{y^2+1}$ が出てくる場合

$$y = \tan \theta \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (4.54)$$

と置く。すると、

$$dy = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (4.55)$$

$$\sqrt{y^2+1} = \frac{1}{\cos \theta} \quad (4.56)$$

(2) $\sqrt{y^2-1}$ が出てくる場合

$$y = \frac{1}{\cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (4.57)$$

と置く^{*2}。すると、

$$dy = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (4.58)$$

$$\sqrt{y^2-1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad (4.59)$$

(3) $\sqrt{1-y^2}$ が出てくる場合

$$y = \sin \theta \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (4.60)$$

と置く^{*3}。すると、

$$dy = \cos \theta d\theta \quad (4.61)$$

$$\sqrt{1-y^2} = \cos \theta \quad (4.62)$$

なので、積分 $\int R(x, \sqrt{\varphi(x)})dx$ は θ の三角関数の有理関数の積分となる。

Step 3 三角関数の有理関数の積分 三角関数の有理関数は 3 章で説明されている方法で積分できる。

^{*2} $y < 0$ のときは $y = -1/\cos \theta$ とするなど別に考えるとする。 $|y| > 1$ なので、 y が正の部分と負の部分をつなげることはできない。

^{*3} $y = \cos \theta$ でもよい。

4.3.2 双曲線関数を使った解法

4.3.1 節と似ているが、双曲線関数を使っても良い。

Step 1 平方完成によって規格化する ここは三角関数の場合と同じ。

Step 2 規格化した変数 y を三角関数に置き換える 上の Step 1 の場合分けに対応して

(1) $\sqrt{y^2 + 1}$ が出てくる場合

$$y = \sinh z \quad (4.63)$$

と置く。すると、

$$dy = \cosh z dz \quad (4.64)$$

$$\sqrt{y^2 + 1} = \cosh z \quad (4.65)$$

(2) $\sqrt{y^2 - 1}$ が出てくる場合

$$y = \cosh z \quad (z \geq 0) \quad (4.66)$$

と置く*4*5。すると、

$$dy = \sinh z dz \quad (4.67)$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = \sinh z \quad (4.68)$$

(3) $\sqrt{1 - y^2}$ が出てくる場合

$$y = \tanh z \quad (4.69)$$

と置く。すると、

$$dy = \frac{1}{\cosh^2 z} dz \quad (4.70)$$

$$\sqrt{1 - y^2} = \frac{1}{\cosh^2 z} \quad (4.71)$$

なので、積分 $\int R(x, \sqrt{\varphi(x)}) dx$ は θ の双曲線関数の有理関数の積分となる。

Step 3 双曲線関数の有理関数の積分 双曲線関数の有理関数は指数関数の有理関数ということでもあるから、

$$t = e^z \quad (4.72)$$

$$dz = \frac{dt}{t} \quad (4.73)$$

というおきかえによって t の有理関数に直すことができ、積分ができる。

*4 $y < 0$ のときは $y = -\cosh z$ とするなど別に考えるとする。 $|y| > 1$ なので、 y が正の部分と負の部分をつなげることはできない。

*5 $y = \coth z$ と置くというやり方もある。4.3.6 節参照。

4.3.3 規格化してからを 1 回の変数変換で済ませる解法

4.3.1 節と 4.3.2 節ではいったん規格化で $\sqrt{y^2 \pm 1}$ or $\sqrt{1 - y^2}$ の形にしてから

- $y \rightarrow$ 三角関数 $(\theta) \rightarrow t = \tan(\theta/2)$ or $t = \tan(\theta/2 + \pi/4)$
- $y \rightarrow$ 双曲線関数 $(z) \rightarrow t = e^z$

で置き換えるのであった。この二度の置き換えを一度で済ましてしまおうと考えるのも自然である。それをやってみよう。結果的に三角関数の方法で最後に $t = \tan(\theta/2 + \pi/4)$ の置き換えをすると、双曲線関数の方法と同じことになっていることがわかる。

ただし、二度の置き換えと一度だけの置き換えのどちらが簡単かは問題によるであろう。三角関数を使うのは二度手間のようにではあるが、三角関数の良い性質を使うと $t = \tan(\theta/2)$ or $t = \tan(\theta/2 + \pi/4)$ のような置き換えよりももっと簡単な置き換えで積分が解けてしまうこともあるからである。

(1) $\sqrt{y^2 + 1}$ が出てくる場合

- 三角関数で考える場合

$$y = \tan \theta \quad (4.74)$$

$$t = \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.75)$$

の組で考えると、 θ を消去して

$$y = \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.76)$$

$$t = \sqrt{y^2 + 1} + y \quad (> 0) \quad (4.77)$$

$$\sqrt{y^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (4.78)$$

$$dy = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \quad (4.79)$$

を得る。これで t の有理式が得られる。

- 双曲線関数で考える場合

$$y = \sinh z \quad (4.80)$$

$$t = e^z \quad (4.81)$$

の組で考えると、 z を消去して

$$y = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.82)$$

$$t = \sqrt{y^2 + 1} + y \quad (> 0) \quad (4.83)$$

$$\sqrt{y^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (4.84)$$

$$dy = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \quad (4.85)$$

という三角関数の場合と全く同じ式を得る。これで t の有理式が得られる。

(2) $\sqrt{y^2 - 1}$ が出てくる場合

- 三角関数で考える場合

$$y = \frac{1}{\cos \theta} \quad (> 0) \quad (4.86)$$

$$t = \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.87)$$

の組で考えると、 θ を消去して

$$y = \frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (4.88)$$

$$t = \sqrt{y^2 - 1} + y \quad (> 0) \quad (4.89)$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.90)$$

$$dy = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt \quad (4.91)$$

を得る。これで t の有理式が得られる。

- 双曲線関数で考える場合

$$y = \cosh z \quad (> 0) \quad (4.92)$$

$$t = e^z \quad (4.93)$$

の組で考えると、 z を消去して

$$y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (4.94)$$

$$t = \sqrt{y^2 - 1} + y \quad (> 0) \quad (4.95)$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.96)$$

$$dy = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt \quad (4.97)$$

という三角関数の場合と全く同じ式を得る。これで t の有理式が得られる。

(3) $\sqrt{1 - y^2}$ が出てくる場合

- 三角関数で考える場合

$$y = \sin \theta \quad (4.98)$$

$$t = \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.99)$$

の組で考えると、 θ を消去して

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad (4.100)$$

$$t = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad (4.101)$$

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad (4.102)$$

$$dy = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} dt \quad (4.103)$$

を得る。これで t の有理式が得られる。

- 双曲線関数で考える場合

$$y = \tanh z \quad (4.104)$$

$$t = e^z \quad (4.105)$$

の組で考えると、 z を消去して

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad (4.106)$$

$$t = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad (4.107)$$

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad (4.108)$$

$$dy = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} dt \quad (4.109)$$

という三角関数の場合と全く同じ式を得る。これで t の有理式が得られる。

4.3.4 $a > 0$ の場合、1 回の変数変換で済ませる解法

4.3.3 節では、規格化のあと 1 回の変数変換で済ませたが、次は規格化も含めて 1 回の変数変換でやったらどうなのかということになる。

$a > 0$ で、とりあえず $D < 0$ として考えてみる。変数変換として

$$y = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.110)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.111)$$

を考える。これらから、 y を消去する。まず、

$$\frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.112)$$

となり、次に

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-D}} Q = \sqrt{y^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (4.113)$$

という関係がある。この 2 つの式を足してみると、

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-D}} Q + \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = t \quad (4.114)$$

すなわち、

$$t = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.115)$$

という変換を施したことになっている。

ということは、定数係数や定数の部分を除くと

$$s = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x \quad (4.116)$$

と変数変換すればうまくいくのではないかと考えられる。このとき

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = s - \sqrt{a}x \quad (4.117)$$

ゆえ、両辺を自乗して

$$bx + c = s^2 - 2\sqrt{a}sx \quad (4.118)$$

すなわち

$$x = \frac{s^2 - c}{2\sqrt{a}s + b} \quad (4.119)$$

$$dx = \frac{2s(2\sqrt{a}s + b) - 2\sqrt{a}(s^2 - c)}{(2\sqrt{a}s + b)^2} ds = \frac{2(\sqrt{a}s^2 + bs + \sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}s + b)^2} ds \quad (4.120)$$

となる。この形にしてしまうと D の正負によらず使える。

念のため $D < 0$ でも三角関数を使った方法から (4.116) の変換が示唆されることを見てゆく。
今度使うのは

$$y = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.121)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (4.122)$$

とする。これらから、 y を消去する。まず、

$$\frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (4.123)$$

となり、次に

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}}Q = \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.124)$$

という関係がある。この 2 つの式を足してみると、

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}}Q + \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = t \quad (4.125)$$

すなわち、

$$t = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.126)$$

という変換を施したことになっている。というわけで、定数係数や定数の部分を除くとやはり (4.116) の変換になる。

まとめると、 $a > 0$ のときは、 D の正負によらず、

$$s = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x \quad (4.127)$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = s - \sqrt{a} \frac{s^2 - c}{2\sqrt{a}s + b} \quad (4.128)$$

$$x = \frac{s^2 - c}{2\sqrt{a}s + b} \quad (4.129)$$

$$dx = \frac{2(\sqrt{a}s^2 + bs + \sqrt{ac})}{(2\sqrt{a}s + b)^2} ds \quad (4.130)$$

によって x から s に変数変換すると、 s の有理関数の積分になる。

4.3.5 $a > 0$ 、 $D < 0$ の場合、1 回の変数変換で済ませる解法

4.3.3 節と 4.3.4 節とでは、三角関数の多項式にしたあと $t = \tan(\theta/2 + \pi/4)$ で変換するものを短縮したのだが、素直に Weierstrass 置換 $t = \tan(\theta/2)$ をしたものを 1 回の変換で済ますとどうということになるかを考えてみる。ここでは、 $a > 0$ 、 $D < 0$ の場合に限る。

ここで考える変換は、

$$y = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.131)$$

$$y = \tan \theta \quad (4.132)$$

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \quad (4.133)$$

の組である。まず、 θ を消去する。 $\tan$ の倍角公式などから

$$y = \frac{2t}{1 - t^2} \quad (4.134)$$

$$t = \frac{\sqrt{y^2 + 1} - 1}{y} \quad (4.135)$$

$$\sqrt{y^2 + 1} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \quad (4.136)$$

を考える。次に y を消去するのに

$$\frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = y = \frac{2t}{1-t^2} \quad (4.137)$$

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-D}} Q = \sqrt{y^2 + 1} = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (4.138)$$

を用いる。

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{y^2 + 1} - 1}{y} \\ &= \frac{Q - \sqrt{-D}/(2\sqrt{a})}{\sqrt{a}(x + b/2a)} \end{aligned} \quad (4.139)$$

なので、結局まとめると

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{4ac - b^2}/(2\sqrt{a})}{\sqrt{a}(x + b/2a)} \quad (4.140)$$

$$x = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{a} \frac{t}{1-t^2} - \frac{b}{2a} \quad (4.141)$$

$$Q = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad (4.142)$$

$$dx = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{a} \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} dt \quad (4.143)$$

ということになる。

4.3.6 $D > 0$ の場合、因数分解を使った解法 その 1

$D > 0$ の場合は、 $ax^2 + bx + c = 0$ に実数根があり、規格化して $\sqrt{1-y^2}$ もしくは $\sqrt{y^2-1}$ になるタイプの式である。 $\sqrt{1-y^2}$ の方は、4.3.3 節の説明では

$$y = \tanh z \quad (4.144)$$

$$t = e^z = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad (4.145)$$

と変数変換するのであった。 $\sqrt{y^2-1}$ もそれに似せて

$$y = \coth z \quad (4.146)$$

$$t = e^z \quad (4.147)$$

の変数変換をするとどうなるかを考えてみる。 z を消去すると

$$y = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \quad (4.148)$$

$$t = \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} \quad (4.149)$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = \frac{2t}{|t^2 - 1|} \quad (4.150)$$

$$dy = -\frac{4t}{(t^2 - 1)^2} dt \quad (4.151)$$

となって、似た形で t の有理関数にできることがわかる。

ここから類推すると、 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数を α, β ($\alpha > \beta$) とするとき、 $\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)}$ 、 $\sqrt{(\alpha - x)(x - \beta)}$ を含んだ式は、それぞれ、 $t = \sqrt{(x - \beta)/(x - \alpha)}$ 、 $t = \sqrt{(x - \beta)/(\alpha - x)}$ と置き換えると良いと考えられる。実際それで良いことを確認しよう。

(1) $\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)}$ を含む場合

$$t = \sqrt{\frac{x - \beta}{x - \alpha}} \quad (4.152)$$

$$x = \frac{\alpha t^2 - \beta}{t^2 - 1} \quad (4.153)$$

$$\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{(\alpha - \beta)t}{|t^2 - 1|} \quad (4.154)$$

$$dx = -\frac{2(\alpha - \beta)t}{(t^2 - 1)^2} dt \quad (4.155)$$

いう置き換えで t の有理式となる。絶対値記号があるのは $t > 1$ が $x > \alpha > \beta$ 、 $t < 1$ が $\alpha > \beta > x$ に対応している。2つの区間はつながっておらず、2つの区間をつなげて積分することはないので、絶対値のような関数が現れても問題はない。

(2) $\sqrt{(\alpha - x)(x - \beta)}$ を含む場合

$$t = \sqrt{\frac{x - \beta}{\alpha - x}} \quad (4.156)$$

$$x = \frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2 + 1} \quad (4.157)$$

$$\sqrt{(\alpha - x)(x - \beta)} = \frac{(\alpha - \beta)t}{t^2 + 1} \quad (4.158)$$

$$dx = \frac{2(\alpha - \beta)t}{(t^2 + 1)^2} dt \quad (4.159)$$

いう置き換えで t の有理式となる。

4.3.7 $D > 0$ の場合、因数分解を使った解法 その2

$D > 0$ の場合は、 $ax^2 + bx + c = 0$ に実数根があり、規格化して $\sqrt{1-y^2}$ もしくは $\sqrt{y^2-1}$ になるタイプの式である。 $\sqrt{1-y^2}$ の方は

$$y = -\cos 2\theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \quad (4.160)$$

と変数変換し (Cf. 式 (4.60))。ここで $\cos 2\theta$ にマイナスを付けたのは、 y ($-1 < y < 1$) が増加するときに θ ($0 < 2\theta < \pi$) も増加するようにしたもの)、 $\sqrt{y^2-1}$ の方は

$$y = \cosh 2z = \sinh^2 z + \cosh^2 z \quad (4.161)$$

と変数変換する (Cf. 式 (4.66)) のを、以下のように拡張することができる。

(1) $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$ (ただし、 $\alpha > \beta$) を含む場合で $x > \alpha$ のとき

$$x = \alpha \cosh^2 z - \beta \sinh^2 z \quad (z > 0) \quad (4.162)$$

$$z = \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}} \quad (4.163)$$

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = (\alpha-\beta) \sinh z \cosh z \quad (4.164)$$

$$dx = 2(\alpha-\beta) \sinh z \cosh z dz \quad (4.165)$$

いう置き換えで双曲線関数の有理式となる。

この場合

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \cosh 2z \quad (z > 0) \quad (4.166)$$

$$2z = \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{2x-\alpha-\beta}{\alpha-\beta}} \quad (4.167)$$

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\alpha-\beta}{2} \sinh 2z \quad (4.168)$$

$$dx = \frac{\alpha-\beta}{2} \sinh 2z d(2z) \quad (4.169)$$

とも書けるから、 $2z$ に対して変換 $t = e^{2z}$ を施すことによって

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (t > 1) \quad (4.170)$$

$$t = \frac{(2x-\alpha-\beta) + 2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}{\alpha-\beta} \quad (4.171)$$

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\alpha-\beta}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.172)$$

$$dx = \frac{\alpha-\beta}{4t} \left(t - \frac{1}{t} \right) dt \quad (4.173)$$

という変換で t の有理式にもできることがわかる。

(2) $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$ (ただし, $\alpha > \beta$) を含む場合で $x < \beta$ のとき

$$x = \beta \cosh^2 z - \alpha \sinh^2 z \quad (z > 0) \quad (4.174)$$

$$z = \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha-\beta}} \quad (4.175)$$

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = (\alpha-\beta) \sinh z \cosh z \quad (4.176)$$

$$dx = -2(\alpha-\beta) \sinh z \cosh z dz \quad (4.177)$$

いう置き換えで双曲線関数の有理式となる。

この場合

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \cosh 2z \quad (z > 0) \quad (4.178)$$

$$2z = \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{\alpha+\beta-2x}{\alpha-\beta}} \quad (4.179)$$

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\alpha-\beta}{2} \sinh 2z \quad (4.180)$$

$$dx = -\frac{\alpha-\beta}{2} \sinh 2z d(2z) \quad (4.181)$$

とも書けるから、 $2z$ に対して変換 $t = e^{2z}$ を施すことによって

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad (t > 1) \quad (4.182)$$

$$t = \frac{(\alpha+\beta-2x) + 2\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)}}{\alpha-\beta} \quad (4.183)$$

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\alpha-\beta}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (4.184)$$

$$dx = -\frac{\alpha-\beta}{4t} \left(t - \frac{1}{t} \right) dt \quad (4.185)$$

という変換で t の有理式にもできることがわかる。

(3) $\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)}$ (ただし, $\alpha > \beta$) を含む場合

$$x = \beta \cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta \quad (0 < \theta < \pi/2) \quad (4.186)$$

$$\theta = \arcsin \sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}} \quad (4.187)$$

$$\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)} = (\alpha-\beta) \cos \theta \sin \theta \quad (4.188)$$

$$dx = 2(\alpha-\beta) \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (4.189)$$

いう置き換えで三角関数の有理式となる。

この場合、

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \cos 2\theta \quad (0 < 2\theta < \pi) \quad (4.190)$$

$$2\theta = \arccos \frac{\alpha + \beta - 2x}{\alpha - \beta} \quad (4.191)$$

$$\sqrt{(\alpha - x)(x - \beta)} = \frac{\alpha - \beta}{2} \sin 2\theta \quad (4.192)$$

$$dx = \frac{\alpha - \beta}{2} \sin 2\theta d(2\theta) \quad (4.193)$$

とも書けるから、 (2θ) に対して Weierstrass 変換 $t = \tan \theta$ を施すことによって

$$x = \frac{\alpha t^2 + \beta}{1 + t^2} \quad (4.194)$$

$$t = \sqrt{\frac{x - \beta}{\alpha - x}} \quad (4.195)$$

$$\sqrt{(\alpha - x)(x - \beta)} = \frac{(\alpha - \beta)t}{1 + t^2} \quad (4.196)$$

$$dx = \frac{2(\alpha - \beta)t}{(1 + t^2)^2} dt \quad (4.197)$$

という変換で t の有理式にもできることがわかる。これは 4.3.6 節の方法と同じになっている。

4.3.8 標準形に直して積分

4.1 節の考え方に従うと、

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (4.198)$$

の型の積分は、漸化式を使ってゆけば、結局

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (4.199)$$

$$J_1(\alpha) = \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (4.200)$$

の積分に帰着する。そこで具体的に漸化式と 2 つの積分さえ求めておけば良い。

4.3.8.1 漸化式

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (4.201)$$

とする。微分関係式

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}(x^n \sqrt{ax^2 + bx + c}) \\
&= nx^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{x^n(2ax + b)}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\
&= (n+1)a \frac{x^{n+1}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(n + \frac{1}{2}\right)b \frac{x^n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + nc \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}
\end{aligned} \tag{4.202}$$

を積分することで、漸化式

$$x^n \sqrt{ax^2 + bx + c} = (n+1)aI_{n+1} + \left(n + \frac{1}{2}\right)bI_n + ncI_{n-1} \quad (n \geq 1) \tag{4.203}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = aI_1 + \frac{b}{2}I_0 \tag{4.204}$$

すなわち

$$I_n = \frac{1}{na} \left[x^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \left(n - \frac{1}{2}\right)bI_{n-1} - (n-1)cI_{n-2} \right] \quad (n \geq 2) \tag{4.205}$$

$$I_1 = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a}I_0 \tag{4.206}$$

を得る。

$$J_n(\alpha) = \int \frac{1}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \tag{4.207}$$

とする。微分関係式

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x - \alpha)^n} \right) \\
&= -n \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x - \alpha)^{n+1}} + \frac{2ax + b}{2(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} \\
&= \frac{1}{(x - \alpha)^{n+1} \sqrt{ax^2 + bx + c}} \left(-n(ax^2 + bx + c) + \frac{(x - \alpha)(2ax + b)}{2} \right) \\
&= -(n-1)a \frac{1}{(x - \alpha)^{n-1} \sqrt{ax^2 + bx + c}} \\
&\quad - \left[(2n-1)a\alpha + \left(n - \frac{1}{2}\right)b \right] \frac{1}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} \\
&\quad - n(a\alpha^2 + b\alpha + c) \frac{1}{(x - \alpha)^{n+1} \sqrt{ax^2 + bx + c}}
\end{aligned} \tag{4.208}$$

を積分することで、漸化式

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x - \alpha)^n} &= -(n-1)aJ_{n-1}(\alpha) \\
&\quad - \left(n - \frac{1}{2}\right)(2a\alpha + b)J_n(\alpha) - n(a\alpha^2 + b\alpha + c)J_{n+1}(\alpha)
\end{aligned} \tag{4.209}$$

を得る。すなわち、 $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$ とすれば、

$$J_n(\alpha) = -\frac{1}{(n-1)(a\alpha^2 + b\alpha + c)} \left[\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x-\alpha)^{n-1}} + \left(n - \frac{3}{2}\right) (2a\alpha + b)J_{n-1}(\alpha) + (n-2)aJ_{n-2}(\alpha) \right] \quad (n \geq 3) \quad (4.210)$$

$$J_2(\alpha) = -\frac{1}{(a\alpha^2 + b\alpha + c)} \left[\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x-\alpha)} + \left(a\alpha + \frac{b}{2}\right) J_1(\alpha) \right]$$

$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ *6 とすれば、

$$J_n(\alpha) = -\frac{1}{(n-1/2)(2a\alpha + b)} \left[\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x-\alpha)^n} + (n-1)aJ_{n-1}(\alpha) \right] \quad (n \geq 2) \quad (4.211)$$

を得る。

4.3.8.2 I_0 の具体的な表式

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (4.212)$$

を 4.3.1 節の三角関数の方法で積分する。

(1) $a > 0$ 、 $D = b^2 - 4ac < 0$ の場合：まずは平方根の中身を平方完成する。

$$I_0 = \int \frac{1}{\sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-D)}{4a}}} dx \quad (4.213)$$

ここで、

$$y = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \quad (4.214)$$

と置くと、

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} dy \quad (4.215)$$

となる。そこでさらに

$$y = \tan \theta \quad (4.216)$$

$$dy = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (4.217)$$

*6 4.1 節で説明してあるとおり、 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ が平方因子を持たないことを前提としているので、このときは $2a\alpha + b \neq 0$ としてよい。

と置くと

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right| + C' \end{aligned} \quad (4.218)$$

となる。ここで、 $\sec \theta$ の積分には 3.2.1 節の結果を用いた。 C' は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.219)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = 2\sqrt{\frac{a}{-D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (4.220)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| + C \end{aligned} \quad (4.221)$$

となる (C は積分定数)。

(2) $a > 0$ 、 $D = b^2 - 4ac > 0$ の場合：まずは平方根の中身を平方完成する。

$$I_0 = \int \frac{1}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}}} dx \quad (4.222)$$

ここで、

$$y = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.223)$$

と置くと、

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} dy \quad (4.224)$$

となる。そこでさらに

$$y = \frac{1}{\cos \theta} \quad (4.225)$$

$$dy = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (4.226)$$

と置くと

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right| + C' \end{aligned} \quad (4.227)$$

となる。ここで、 $\sec \theta$ の積分には 3.2.1 節の結果を用いた。 C' は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = 2\sqrt{\frac{a}{D}}\sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (4.228)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.229)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{2a}{\sqrt{D}} \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| + C \end{aligned} \quad (4.230)$$

となる (C は積分定数)。

(3) $a < 0$ 、 $D = b^2 - 4ac > 0$ の場合：まずは平方根の中身を平方完成する。

$$I_0 = \int \frac{1}{\sqrt{-(-a) \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{(-4a)}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{(-4a)} - (-a) \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}} dx \quad (4.231)$$

ここで、

$$y = \frac{(-2a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.232)$$

と置くと、

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy \quad (4.233)$$

となる。そこでさらに

$$y = \sin \theta \quad (4.234)$$

$$dy = \cos \theta d\theta \quad (4.235)$$

と置くと

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \theta + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left[\frac{(-2a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right] + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left[\frac{(-2a)}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right] + C \end{aligned} \quad (4.236)$$

となる (C は積分定数)。

まとめると、

$$I_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c}} \right| + C & (a > 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left[\frac{(-2a)}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right] + C & (a < 0) \end{cases} \quad (4.237)$$

4.3.8.3 $J_1(\alpha)$ の具体的な表式

$$J_1(\alpha) = \int \frac{dx}{(x - \alpha) \sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (4.238)$$

を 4.3.1 節の三角関数の方法で積分する。

以下、

$$\varphi_2(x) = ax^2 + bx + c \quad (4.239)$$

と書くことにする。以下の関数や量が頻繁に出てくる。

$$\varphi_2'(x) = 2ax + b \quad (4.240)$$

$$\varphi_2(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c \quad (4.241)$$

$$\varphi_2'(\alpha) = 2a\alpha + b \quad (4.242)$$

$$D = b^2 - 4ac \quad (4.243)$$

以下の関係がある。

$$[\varphi_2'(\alpha)]^2 - D = 4(a^2\alpha + ab\alpha + ac) = 4a\varphi_2(\alpha) \quad (4.244)$$

$$\varphi_2'(x) - \varphi_2'(\alpha) = 2a(x - \alpha) \quad (4.245)$$

(1) $a > 0$ 、 $D = b^2 - 4ac < 0$ の場合：

まずは平方根の中身を平方完成する。

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \int \frac{1}{(x - \alpha) \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}}} dx \\ &= \int \frac{1}{(x - \alpha) \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{(-D)}{4a}}} dx \end{aligned} \quad (4.246)$$

ここで、

$$y = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.247)$$

と置くと、

$$J_1(\alpha) = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-D}} \int \frac{1}{\left(y - \frac{b+2a\alpha}{\sqrt{-D}} \right) \sqrt{y^2 + 1}} dy \quad (4.248)$$

となる。そこでさらに

$$y = \tan \theta \quad (4.249)$$

$$dy = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (4.250)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-D}} \int \frac{1}{\left(\tan \theta - \frac{\varphi'_2(\alpha)}{\sqrt{-D}}\right) \cos \theta} d\theta \\ &= 2\sqrt{a} \int \frac{1}{\sqrt{-D} \sin \theta - \varphi'_2(\alpha) \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{(-D) + (\varphi'_2(\alpha))^2}} \\ &\quad \times \log \left| \frac{\sqrt{(-D) + (\varphi'_2(\alpha))^2} - \sqrt{-D} \cos \theta - \varphi'_2(\alpha) \sin \theta}{\sqrt{-D} \sin \theta - \varphi'_2(\alpha) \cos \theta} \right| + C'' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{2\sqrt{a\varphi_2(\alpha)}/\cos \theta - \sqrt{-D} - \varphi'_2(\alpha) \tan \theta}{\sqrt{-D} \tan \theta - \varphi'_2(\alpha)} \right| + C'' \end{aligned} \quad (4.251)$$

となる。ここで、積分には 3.2.3 節の結果を用いた。 C'' は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{\sqrt{-D}} \varphi'_2(x) \quad (4.252)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = 2\sqrt{\frac{a}{-D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{a}{-D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.253)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)/(-D)} - \sqrt{-D} - \varphi'_2(\alpha)\varphi'_2(x)/\sqrt{-D}}{\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)} \right| + C'' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} + D - \varphi'_2(\alpha)\varphi'_2(x)}{(x - \alpha)} \right| + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} - 4a\varphi_2(\alpha) - \varphi'_2(\alpha)[\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)]}{(x - \alpha)} \right| + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{2\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} - 2\varphi_2(\alpha) - \varphi'_2(\alpha)(x - \alpha)}{(x - \alpha)} \right| + C \end{aligned} \quad (4.254)$$

となる (C は積分定数)。

(2) $a > 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$ の場合 :

まずは平方根の中身を平方完成する。

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \int \frac{1}{(x - \alpha) \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}}} dx \\ &= \int \frac{1}{(x - \alpha) \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}}} dx \end{aligned} \quad (4.255)$$

ここで、

$$y = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \quad (4.256)$$

と置くと、

$$J_1(\alpha) = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}} \int \frac{1}{\left(y - \frac{b+2a\alpha}{\sqrt{D}}\right) \sqrt{y^2 - 1}} dy \quad (4.257)$$

となる。そこでさらに

$$y = \frac{1}{\cos \theta} \quad (4.258)$$

$$dy = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (4.259)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\varphi'_2(\alpha)}{\sqrt{D}}\right) \cos \theta} d\theta \\ &= 2\sqrt{a} \int \frac{1}{\sqrt{D} - \varphi'_2(\alpha) \cos \theta} d\theta \end{aligned} \quad (4.260)$$

ここで、3.2.4 節の結果を用いて積分を実行する。その結果によると、4つの場合に分けて考えないといけない。

(a) $[\varphi'_2(\alpha)]^2 > D$ 、すなわち $\varphi_2(\alpha) > 0$ の場合：

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{(\varphi'_2(\alpha))^2 - D}} \\ &\quad \times \log \left| \frac{\sqrt{D} \cos \theta - \varphi'_2(\alpha) + \sqrt{(\varphi'_2(\alpha))^2 - D} \sin \theta}{\sqrt{D} - \varphi'_2(\alpha) \cos \theta} \right| + C'' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{\sqrt{D} - \varphi'_2(\alpha) / \cos \theta + 2\sqrt{a\varphi_2(\alpha)} \tan \theta}{\sqrt{D} / \cos \theta - \varphi'_2(\alpha)} \right| + C'' \end{aligned} \quad (4.261)$$

となる。 C'' は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.262)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \varphi'_2(x) \quad (4.263)$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
 J_1(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{\sqrt{D} - \varphi'_2(\alpha)\varphi'_2(x)/\sqrt{D} + 4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)/D}}{\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)} \right| + C'' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} + D - \varphi'_2(\alpha)\varphi'_2(x)}{(x - \alpha)} \right| + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} - 4a\varphi_2(\alpha) - \varphi'_2(\alpha)[\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)]}{(x - \alpha)} \right| + C' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{2\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} - 2\varphi_2(\alpha) - \varphi'_2(\alpha)(x - \alpha)}{(x - \alpha)} \right| + C
 \end{aligned} \tag{4.264}$$

となる (C は積分定数)。

(b) $[\varphi'_2(\alpha)]^2 = D$ 、すなわち $\varphi_2(\alpha) = 0$ 、かつ $\varphi'_2(\alpha) = \sqrt{D} > 0$ の場合：

$$J_1(\alpha) = -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + C = -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}} \frac{\tan \theta}{1/\cos \theta - 1} + C \tag{4.265}$$

となる。 C は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \tag{4.266}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \varphi'_2(x) \tag{4.267}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
 J_1(\alpha) &= -\frac{4a\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{D}(\varphi'_2(x) - \sqrt{D})} + C \\
 &= -\frac{2\sqrt{\varphi_2(x)}}{\varphi'_2(\alpha)(x - \alpha)} + C
 \end{aligned} \tag{4.268}$$

となる (C は積分定数)。

(c) $[\varphi'_2(\alpha)]^2 = D$ 、すなわち $\varphi_2(\alpha) = 0$ 、かつ $\varphi'_2(\alpha) = -\sqrt{D} < 0$ の場合：

$$J_1(\alpha) = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + C = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D}} \frac{\tan \theta}{1/\cos \theta + 1} + C \tag{4.269}$$

となる。 C は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \tag{4.270}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \varphi'_2(x) \tag{4.271}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{4a\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{D}(\varphi_2'(x) + \sqrt{D})} + C \\ &= -\frac{2\sqrt{\varphi_2(x)}}{\varphi_2'(\alpha)(x - \alpha)} + C \end{aligned} \quad (4.272)$$

となる (C は積分定数)。

(d) $[\varphi_2'(\alpha)]^2 < D$ 、すなわち $\varphi_2(\alpha) < 0$ の場合：

3.2.4 節にあった積分の表式のうちの2種類を使って、2種類の表式を求めておく。まず一つ目では

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D - (\varphi_2'(\alpha))^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{D - (\varphi_2'(\alpha))^2} \sin \theta}{\sqrt{D} - \varphi_2'(\alpha) \cos \theta} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{2\sqrt{a}\sqrt{-\varphi_2(\alpha)} \tan \theta}{\sqrt{D}/\cos \theta - \varphi_2'(\alpha)} \right) + C \end{aligned} \quad (4.273)$$

となる。 C は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.274)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \varphi_2'(x) \quad (4.275)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{4a\sqrt{-\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)}}{\sqrt{D}[\varphi_2'(x) - \varphi_2'(\alpha)]} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{2\sqrt{-\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)}}{\sqrt{D}(x - \alpha)} \right) + C \end{aligned} \quad (4.276)$$

を得る。

二つ目では

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{D - (\varphi_2'(\alpha))^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{D} \cos \theta - \varphi_2'(\alpha)}{\sqrt{D} - \varphi_2'(\alpha) \cos \theta} \right) + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{D} - \varphi_2'(\alpha)/\cos \theta}{\sqrt{D}/\cos \theta - \varphi_2'(\alpha)} \right) + C \end{aligned} \quad (4.277)$$

となる。 C は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.278)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2a}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \varphi_2'(x) \quad (4.279)$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
 J_1(\alpha) &= -\frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{D} - \varphi'_2(\alpha)\varphi'_2(x)/\sqrt{D}}{\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\varphi'_2(\alpha)\varphi'_2(x) - D}{\sqrt{D}[\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)]} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\varphi'_2(\alpha)[\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)] + 4a\varphi_2(\alpha)}{\sqrt{D}[\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)]} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\varphi'_2(\alpha)(x - \alpha) + 2\varphi_2(\alpha)}{\sqrt{D}(x - \alpha)} \right) + C
 \end{aligned} \tag{4.280}$$

を得る。

(3) $a < 0$ 、 $D = b^2 - 4ac > 0$ の場合：

まずは平方根の中身を平方完成する。

$$\begin{aligned}
 J_1(\alpha) &= \int \frac{1}{(x - \alpha)\sqrt{-(-a)\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{(-4a)}}} dx \\
 &= \int \frac{1}{(x - \alpha)\sqrt{\frac{D}{(-4a)} - (-a)\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}} dx
 \end{aligned} \tag{4.281}$$

ここで、

$$y = \frac{(-2a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \tag{4.282}$$

と置くと、

$$J_1(\alpha) = \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{D}} \int \frac{1}{\left(y + \frac{b+2a\alpha}{\sqrt{D}}\right)\sqrt{1-y^2}} dy \tag{4.283}$$

となる。そこでさらに

$$y = \sin \theta \tag{4.284}$$

$$dy = \cos \theta d\theta \tag{4.285}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
 J_1(\alpha) &= \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{D}} \int \frac{1}{\left(\sin \theta + \frac{\varphi'_2(\alpha)}{\sqrt{D}}\right)} d\theta \\
 &= 2\sqrt{-a} \int \frac{1}{\sqrt{D} \sin \theta + \varphi'_2(\alpha)} d\theta
 \end{aligned} \tag{4.286}$$

ここで、3.2.5 節の結果を用いて積分を実行する。その結果によると、4つの場合に分けて考えないといけない。

(a) $[\varphi_2'(\alpha)]^2 < D$ 、すなわち $\varphi_2(\alpha) > 0$ の場合：

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{D - (\varphi_2'(\alpha))^2}} \\ &\quad \times \log \left| \frac{\sqrt{D} + \varphi_2'(\alpha) \sin \theta - \sqrt{D - (\varphi_2'(\alpha))^2} \cos \theta}{\sqrt{D} \sin \theta + \varphi_2'(\alpha)} \right| + C'' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{\sqrt{D} + \varphi_2'(\alpha) \sin \theta - 2\sqrt{(-a)\varphi_2(\alpha)} \cos \theta}{\sqrt{D} \sin \theta + \varphi_2'(\alpha)} \right| + C'' \end{aligned} \quad (4.287)$$

となる。 C'' は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\cos \theta = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.288)$$

$$\sin \theta = \frac{(-2a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = -\frac{1}{\sqrt{D}} \varphi_2'(x) \quad (4.289)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{\sqrt{D} - \varphi_2'(\alpha) \varphi_2'(x) / \sqrt{D} + 4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} / D}{-[\varphi_2'(x) - \varphi_2'(\alpha)]} \right| + C'' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} + D - \varphi_2'(\alpha) \varphi_2'(x)}{(x - \alpha)} \right| + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{4a\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} - 4a\varphi_2(\alpha) - \varphi_2'(\alpha)[\varphi_2'(x) - \varphi_2'(\alpha)]}{(x - \alpha)} \right| + C' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{2\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} - 2\varphi_2(\alpha) - \varphi_2'(\alpha)(x - \alpha)}{(x - \alpha)} \right| + C \end{aligned} \quad (4.290)$$

となる (C は積分定数)。

(b) $[\varphi_2'(\alpha)]^2 = D$ 、すなわち $\varphi_2(\alpha) = 0$ 、かつ $\varphi_2'(\alpha) = \sqrt{D} > 0$ の場合：

$$J_1(\alpha) = -\frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{D}} \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + C \quad (4.291)$$

となる。 C は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\cos \theta = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.292)$$

$$\sin \theta = \frac{(-2a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = -\frac{1}{\sqrt{D}} \varphi_2'(x) \quad (4.293)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= -\frac{4a\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{D}(\varphi_2'(x) - \sqrt{D})} + C \\ &= -\frac{2\sqrt{\varphi_2(x)}}{\varphi_2'(\alpha)(x - \alpha)} + C \end{aligned} \quad (4.294)$$

となる (C は積分定数)。

(c) $[\varphi'_2(\alpha)]^2 = D$ 、すなわち $\varphi_2(\alpha) = 0$ 、かつ $\varphi'_2(\alpha) = -\sqrt{D} < 0$ の場合：

$$J_1(\alpha) = -\frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{D}} \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + C \quad (4.295)$$

となる。 C は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\cos \theta = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.296)$$

$$\sin \theta = \frac{(-2a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = -\frac{1}{\sqrt{D}} \varphi'_2(x) \quad (4.297)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{4a\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{D}(\varphi'_2(x) + \sqrt{D})} + C \\ &= -\frac{2\sqrt{\varphi_2(x)}}{\varphi'_2(\alpha)(x - \alpha)} + C \end{aligned} \quad (4.298)$$

となる (C は積分定数)。

(d) $[\varphi'_2(\alpha)]^2 > D$ 、すなわち $\varphi_2(\alpha) < 0$ の場合：

3.2.5 節にあった積分の表式のうちの 2 種類を使って、2 種類の表式を求めておく。まず一つ目では

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \pm \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{(\varphi'_2(\alpha))^2 - D}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{(\varphi'_2(\alpha))^2 - D} \cos \theta}{\sqrt{D} \sin \theta + \varphi'_2(\alpha)} \right) + C \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{2\sqrt{-a}\sqrt{-\varphi_2(\alpha)} \cos \theta}{\sqrt{D} \sin \theta + \varphi'_2(\alpha)} \right) + C \end{aligned} \quad (4.299)$$

となる^{*7}。 C は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\cos \theta = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.300)$$

$$\sin \theta = \frac{(-2a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = -\frac{1}{\sqrt{D}} \varphi'_2(x) \quad (4.301)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \pm \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{4a\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}\varphi_2(x)}{\sqrt{D}[\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)]} \right) + C \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{2\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}\varphi_2(x)}{\sqrt{D}(x - \alpha)} \right) + C \end{aligned} \quad (4.302)$$

^{*7} 符号は $\arcsin$ の分枝の取り方とからんでいて微妙である。いちいち考えるのが面倒なので、最後の結果で都合が良いように選ぶことにする。

を得る。

二つ目では

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{(\varphi'_2(\alpha))^2 - D}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{D} + \varphi'_2(\alpha) \sin \theta}{\sqrt{D} \sin \theta + \varphi'_2(\alpha)} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{D} + \varphi'_2(\alpha) \sin \theta}{\sqrt{D} \sin \theta + \varphi'_2(\alpha)} \right) + C \end{aligned} \quad (4.303)$$

となる。 C は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\cos \theta = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2\sqrt{\frac{-a}{D}} \sqrt{\varphi_2(x)} \quad (4.304)$$

$$\sin \theta = \frac{(-2a)}{\sqrt{D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = -\frac{1}{\sqrt{D}} \varphi'_2(x) \quad (4.305)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{D} - \varphi'_2(\alpha) \varphi'_2(x) / \sqrt{D}}{-\varphi'_2(x) + \varphi'_2(\alpha)} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\varphi'_2(\alpha) \varphi'_2(x) - D}{\sqrt{D} [\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)]} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\varphi'_2(\alpha) [\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)] + 4a\varphi_2(\alpha)}{\sqrt{D} [\varphi'_2(x) - \varphi'_2(\alpha)]} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\varphi'_2(\alpha)(x - \alpha) + 2\varphi_2(\alpha)}{\sqrt{D}(x - \alpha)} \right) + C \end{aligned} \quad (4.306)$$

を得る。

長々と計算してきたが、まとめると短い*⁸。

$$J_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \log \left| \frac{2\sqrt{\varphi_2(\alpha)\varphi_2(x)} - 2\varphi_2(\alpha) - \varphi'_2(\alpha)(x - \alpha)}{(x - \alpha)} \right| + C & (\varphi_2(\alpha) > 0) \\ -\frac{2\sqrt{\varphi_2(x)}}{\varphi'_2(\alpha)(x - \alpha)} & (\varphi_2(\alpha) = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-\varphi_2(\alpha)}} \arcsin \left(\frac{\varphi'_2(\alpha)(x - \alpha) + 2\varphi_2(\alpha)}{\sqrt{D}(x - \alpha)} \right) + C & (\varphi_2(\alpha) < 0) \end{cases} \quad (4.307)$$

*⁸ $\varphi_2(\alpha) < 0$ の式の前には $\pm$ を付けておいたほうが良いかもしれない。 $\arcsin$ はどの分枝をとるかで微分が正になったり負になったりするるので、結果的に良い符号を取る。

where

$$\varphi_2(x) = ax^2 + bx + c \quad (4.308)$$

$$\varphi_2'(x) = 2ax + b \quad (4.309)$$

$$\varphi_2(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c \quad (4.310)$$

$$\varphi_2'(\alpha) = 2a\alpha + b \quad (4.311)$$

$$D = b^2 - 4ac \quad (4.312)$$

4.3.9 例 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) の積分

以上で説明してきた解法を用いて

$$I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad (4.313)$$

($a > 0$) を解く。以下、3つの方法で解いてみる。

(1) 4.3.4 節の方法で積分する。

$$s = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x \quad (4.314)$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = s - \sqrt{a} \frac{s^2 - c}{2\sqrt{a}s + b} \quad (4.315)$$

$$dx = \frac{2(\sqrt{a}s^2 + bs + \sqrt{ac})}{(2\sqrt{a}s + b)^2} ds \quad (4.316)$$

と置く。あとで計算に使うので、以下の量も計算しておく。

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - 4ac}{2\sqrt{a}s + b} &= \frac{b^2 - 4ac}{(2ax + b) + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ &= \frac{(b^2 - 4ac)[(2ax + b) - 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}]}{(2ax + b)^2 - 4a(ax^2 + bx + c)} \\ &= (2ax + b) - 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \end{aligned} \quad (4.317)$$

以上の準備の下で

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \\
&= \int \left(s - \sqrt{a} \frac{s^2 - c}{2\sqrt{as} + b} \right) \frac{2(\sqrt{as}^2 + bs + \sqrt{ac})}{(2\sqrt{as} + b)^2} ds \\
&= \frac{1}{8a} \int \left[(2\sqrt{as} + b) + \frac{4ac - b^2}{2\sqrt{as} + b} \right] \left[1 + \frac{4ac - b^2}{(2\sqrt{as} + b)^2} \right] ds \\
&= \frac{1}{8a} \int \left[(2\sqrt{as} + b) + 2\frac{4ac - b^2}{2\sqrt{as} + b} + \frac{(4ac - b^2)^2}{(2\sqrt{as} + b)^3} \right] ds \\
&= \frac{1}{8a} \left[\sqrt{as}^2 + bs + \frac{4ac - b^2}{\sqrt{a}} \log |2\sqrt{as} + b| - \frac{(4ac - b^2)^2}{4\sqrt{a}(2\sqrt{as} + b)^2} \right] + C' \\
&= \frac{1}{8a} \left[\sqrt{a}(2ax^2 + bx + c + 2\sqrt{ax}\sqrt{ax^2 + bx + c}) + b\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ab}x \right. \\
&\quad \left. + \frac{4ac - b^2}{\sqrt{a}} \log |(2ax + b) + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4\sqrt{a}} [(8a^2x^2 + 8abx + b^2 + 4ac) - 4\sqrt{a}(2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c}] \right] + C' \\
&= \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} \\
&\quad + \frac{4ac - b^2}{8a^{3/2}} \log |(2ax + b) + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C
\end{aligned} \tag{4.318}$$

となる。ただし、 C, C' は積分定数で、

$$C = C' - \frac{b^2}{32a^{2/3}} \tag{4.319}$$

である。

(2) 4.3.8 節の標準形に還元して積分する。4.3.8 節の I_n を用いると

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \\
&= \int \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \\
&= a \int \frac{x^2}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + b \int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + c \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \\
&= aI_2 + bI_1 + cI_0 \\
&= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{3}{2}bI_1 - cI_0 \right] + bI_1 + cI_0 \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{1}{4}bI_1 + \frac{1}{2}cI_0 \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{1}{4}b \left[\frac{1}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a}I_0 \right] + \frac{1}{2}cI_0 \\
&= \frac{1}{2} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} I_0 \\
&= \frac{1}{2} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{ax^2 + bx + c} \\
&\quad + \frac{4ac - b^2}{8a^{3/2}} \log \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| + C
\end{aligned} \tag{4.320}$$

となる (C は積分定数)。

(3) 4.3.1 節の三角関数の方法で積分する。ただし、 $D = b^2 - 4ac < 0$ に話を限ろう。まずは平方根の中身を平方完成する。

$$I = \int \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}} dx = \int \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{(-D)}{4a}} dx \tag{4.321}$$

ここで、

$$y = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \tag{4.322}$$

と置くと、

$$I = \frac{-D}{4a^{3/2}} \int \sqrt{y^2 + 1} dy \tag{4.323}$$

となる。そこでさらに

$$y = \tan \theta \tag{4.324}$$

$$dy = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \tag{4.325}$$

と置くと

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-D}{4a^{3/2}} \int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta \\
&= \frac{-D}{8a^{3/2}} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \log \left| \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right| \right] + C'
\end{aligned} \tag{4.326}$$

となる。ここで、 $\sec^3 \theta$ の積分には 3.2.7 節の結果を用いた。 C' は積分定数である。変数を元の x に戻す。

$$\tan \theta = \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \quad (4.327)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = 2\sqrt{\frac{a}{-D}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (4.328)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} I &= \frac{-D}{8a^{3/2}} \left[\frac{4a^{3/2}}{-D} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{ax^2 + bx + c} \right. \\ &\quad \left. + \log \frac{2a}{\sqrt{-D}} \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| \right] + C' \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{ax^2 + bx + c} \\ &\quad + \frac{4ac - b^2}{8a^{3/2}} \log \left| \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| + C \end{aligned} \quad (4.329)$$

となる (C は積分定数)。

4.3.10 参考文献

- [雑誌記事] 武部尚志 (2017) 楕円積分の分類—道案内版 (連載: 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方 第3回), 数学セミナー 2017 年 6 月号, 73–79.
- [本] 森口繁一、宇田川 (金へんに圭) 久、一松信 (1956) 数学公式 I — 微分積分・平面曲線 — (岩波全書), 岩波書店
- [web page] 特殊な置換をする不定積分: $\sqrt{x^2+a^2}$ を含む不定積分 (高難度) と特殊な置換の根拠 in 受験の月
<http://examist.jp/mathematics/math-3/integration/tokusyu-tikan3/>
- [web page] 近藤弘一 (2010/06/17) 解析学 I, 6.13 2 次式の根号を含む関数の積分 ~ その 1
<http://tau.doshisha.ac.jp/lectures/2009.calculus-I/html.dir/node136.html>
- [web page] 近藤弘一 (2010/06/17) 解析学 I, 6.13 2 次式の根号を含む関数の積分 ~ その 2
<http://tau.doshisha.ac.jp/lectures/2009.calculus-I/html.dir/node137.html>
- [YouTube] Flammable Maths (2018/08/17) "Integrating a Quadratic boi - Papa's Improvised Session #2 [integral sqrt(ax^2+bx+c)]"
<https://www.youtube.com/watch?v=cfE5ZPnp-Qg>

4.4 楕円積分

楕円積分になると、もはや初等関数では表現できなくなる。

4.4.1 楕円積分の標準化

4.1 節の考え方に従うと、楕円積分は 3 種類の楕円積分に還元されることがわかっている。

定理 (Legendre-Jacobi の標準形) 任意の楕円積分

$$\int R(x, \sqrt{\varphi(x)}) dx \quad (4.330)$$

($\varphi(x)$ は 3 次か 4 次の多項式で平方因子を持たない) は次の関数の一次結合である。

- x の有理関数と二次無理関数の積分（これはこれまで見てきたとおり初等関数で積分できる）
- 有理関数に $\sqrt{\varphi(x)}$ をかけたもの
- 第 1 種楕円積分

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (4.331)$$

- 第 2 種楕円積分

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} dz = \int \frac{1-k^2z^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} dz \quad (4.332)$$

- 第 3 種楕円積分

$$\int \frac{dz}{(z^2 - \alpha^2) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} dz \quad (4.333)$$

ここで k, α は定数である。 k は modulus と呼ばれる。なお、この分類定理では、有理関数や $\varphi(x)$ の係数に複素数を許すことにする。

以下、この定理が成り立つことを示してゆく。

4.4.1.1 Step 1 $\varphi(x)$ の標準化

$\varphi(x)$ を標準形 $\varphi_k(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2)$ に持ってゆくことを考える。

まず、 $\varphi(x)$ は 4 次式とする。 $\varphi(x)$ は平方因子を持たないので^{*9}、

$$\varphi(x) = a(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \quad (4.334)$$

と書ける。一次分数変換

$$T(z) = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad (4.335)$$

^{*9} 持っていれば、2 次関数の平方根が入った積分ということになるので、楕円積分ではない。

を考える。このとき係数 A, B, C, D, k をうまく選ぶと

$$T(1) = \alpha_0 \quad (4.336)$$

$$T(-1) = \alpha_1 \quad (4.337)$$

$$T(k^{-1}) = \alpha_2 \quad (4.338)$$

$$T(-k^{-1}) = \alpha_3 \quad (4.339)$$

とすることができる（証明後述）。この T を用いて $x = T(z)$ という変数変換をする。すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi(x)} &= \sqrt{a(T(z) - \alpha_0)(T(z) - \alpha_1)(T(z) - \alpha_2)(T(z) - \alpha_3)} \\ &= \left[a \left(\frac{Az + B}{Cz + D} - \frac{A + B}{C + D} \right) \left(\frac{Az + B}{Cz + D} - \frac{-A + B}{-C + D} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{Az + B}{Cz + D} - \frac{Ak^{-1} + B}{Ck^{-1} + D} \right) \left(\frac{Az + B}{Cz + D} - \frac{-Ak^{-1} + B}{-Ck^{-1} + D} \right) \right]^{1/2} \\ &= \left[a \frac{(AD - BC)(z - 1)}{(C + D)(Cz + D)} \frac{(AD - BC)(z + 1)}{(D - C)(Cz + D)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{(AD - BC)(z - k^{-1})}{(Ck^{-1} + D)(Cz + D)} \frac{(AD - BC)(z + k^{-1})}{(D - Ck^{-1})(Cz + D)} \right]^{1/2} \\ &= (AD - BC)^2 \sqrt{\frac{a}{(C^2 - D^2)(C^2 - k^2 D^2)}} \frac{\sqrt{\varphi_k(z)}}{(Cz + D)^2} \end{aligned} \quad (4.340)$$

さらに

$$dx = \frac{AD - BC}{(Cz + D)^2} dz \quad (4.341)$$

となるから、積分は、適当な有理関数 $\tilde{R}(z, t)$ によって

$$\int R(x, \sqrt{\varphi(x)}) dx = \int \tilde{R}(z, \sqrt{\varphi_k(z)}) dz \quad (4.342)$$

と書きなおせることになる。

次に、 $\varphi(x)$ が 3 次式

$$\varphi(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \quad (4.343)$$

のときも、一次分数変換

$$T(z) = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad (4.344)$$

を考える。このとき係数 A, B, C, D, k をうまく選ぶと

$$T(1) = \infty \quad (4.345)$$

$$T(-1) = \alpha_1 \quad (4.346)$$

$$T(k^{-1}) = \alpha_2 \quad (4.347)$$

$$T(-k^{-1}) = \alpha_3 \quad (4.348)$$

とすることができる（証明後述）。最初の式から $D = -C$ である。この T を用いて $x = T(z)$ という変数変換をする。すると、

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\varphi(x)} &= \sqrt{a(T(z) - \alpha_1)(T(z) - \alpha_2)(T(z) - \alpha_3)} \\
 &= \left[a \left(\frac{Az + B}{C(z-1)} - \frac{-A+B}{-2C} \right) \right. \\
 &\quad \times \left(\frac{Az + B}{C(z-1)} - \frac{Ak^{-1} + B}{C(k^{-1}-1)} \right) \left(\frac{Az + B}{C(z-1)} - \frac{-Ak^{-1} + B}{-C(k^{-1}+1)} \right) \left. \right]^{1/2} \\
 &= \left[a \frac{(A+B)(z+1)}{2C(z-1)} \frac{(A+B)(z-k^{-1})}{C(1-k^{-1})(z-1)} \frac{(A+B)(z+k^{-1})}{C(1+k^{-1})(z-1)} \right]^{1/2} \\
 &= \sqrt{\frac{a(A+B)^3}{2C^3(k^2-1)}} \frac{\sqrt{\varphi_k(z)}}{(z-1)^2}
 \end{aligned} \tag{4.349}$$

さらに

$$dx = \frac{AD - BC}{(Cz + D)^2} dz \tag{4.350}$$

となるから、積分は、適当な有理関数 $\tilde{R}(z, t)$ によって

$$\int R(x, \sqrt{\varphi(x)}) dx = \int \tilde{R}(z, \sqrt{\varphi_k(z)}) dz \tag{4.351}$$

と書きなおせることになる。

最後に、先ほど証明を省略したことを証明する。すなわち、一次分数変換の係数 A, B, C, D, k をうまく選ぶと

$$T(1) = \alpha_0 \tag{4.352}$$

$$T(-1) = \alpha_1 \tag{4.353}$$

$$T(k^{-1}) = \alpha_2 \tag{4.354}$$

$$T(-k^{-1}) = \alpha_3 \tag{4.355}$$

とすることができることを示す。まず、一次分数変換が非調和比

$$\lambda = \frac{(\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{(\alpha_0 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)} \tag{4.356}$$

を変えないことを示す。実際計算してみると

$$\begin{aligned}
 &\frac{(T(\alpha_0) - T(\alpha_2))(T(\alpha_1) - T(\alpha_3))}{(T(\alpha_0) - T(\alpha_3))(T(\alpha_1) - T(\alpha_2))} \\
 &= \frac{\left(\frac{A\alpha_0+B}{C\alpha_0+D} - \frac{A\alpha_2+B}{C\alpha_2+D} \right) \left(\frac{A\alpha_1+B}{C\alpha_1+D} - \frac{A\alpha_3+B}{C\alpha_3+D} \right)}{\left(\frac{A\alpha_0+B}{C\alpha_0+D} - \frac{A\alpha_3+B}{C\alpha_3+D} \right) \left(\frac{A\alpha_1+B}{C\alpha_1+D} - \frac{A\alpha_2+B}{C\alpha_2+D} \right)} \\
 &= \frac{\left(\frac{(AD-BC)(\alpha_0-\alpha_2)}{(C\alpha_0+D)(C\alpha_2+D)} \right) \left(\frac{(AD-BC)(\alpha_1-\alpha_3)}{(C\alpha_1+D)(C\alpha_3+D)} \right)}{\left(\frac{(AD-BC)(\alpha_0-\alpha_3)}{(C\alpha_0+D)(C\alpha_3+D)} \right) \left(\frac{(AD-BC)(\alpha_1-\alpha_2)}{(C\alpha_1+D)(C\alpha_2+D)} \right)} \\
 &= \frac{(\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{(\alpha_0 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}
 \end{aligned} \tag{4.357}$$

となり、確かに変わらない。そこで、係数がうまく選んでいるとするなら、非調和比は

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{(\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{(\alpha_0 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)} \\
 &= \frac{(T(1) - T(k^{-1}))(T(-1) - T(-k^{-1}))}{(T(1) - T(-k^{-1}))(T(-1) - T(k^{-1}))} \\
 &= \frac{(1 - k^{-1})(-1 - (-k^{-1}))}{(1 - (-k^{-1}))(-1 - k^{-1})} \\
 &= \frac{(1 - k^{-1})^2}{(1 + k^{-1})^2} \\
 &= \frac{(k - 1)^2}{(k + 1)^2}
 \end{aligned} \tag{4.358}$$

となっているはずである。これを解けば、非調和比を用いて k を

$$k = \frac{-(\lambda + 1) \pm 2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \tag{4.359}$$

と表すことができる。ここで求めた k を用いると、求める一次分数変換 $x = T(z)$ は

$$\frac{(x - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{(x - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{(z - k^{-1})(-1 + k^{-1})}{(z + k^{-1})(-1 - k^{-1})} \tag{4.360}$$

を解いて得られる。なぜなら、これは一次分数変換であり、 $z = 1$ のとき、 $x = \alpha_0$ （このとき両辺が非調和比 λ になる）、 $z = -1$ のとき $x = \alpha_1$ （このとき両辺が 1 になる）、 $z = k^{-1}$ のとき $x = \alpha_2$ （このとき両辺が 0 になる）、 $z = -k^{-1}$ のとき $x = \alpha_3$ （このとき両辺が ∞ になる）となるからである。

4.4.1.2 Step 2 楕円積分の標準化

4.1 節で説明した処方箋に従えば、任意の楕円積分は、有理関数の積分、(有理関数) $\times \sqrt{\varphi(x)}$ 、ならびに次の積分の一次結合になる。

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \tag{4.361}$$

$$I_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \tag{4.362}$$

$$I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \tag{4.363}$$

$$J_1(\alpha) = \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \tag{4.364}$$

ここで $\varphi(x)$ は 4.4.1.1 節に従って、標準形 $\varphi_k(x) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$ の形になっているものとする。

- I_0 は第一種楕円積分そのものである。
- I_1 は $t = x^2$ と置き換えることで、二次無理関数の積分になる。

- I_2 は次のようにまとめなおすと

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\varphi_k(x)}} \\
 &= \frac{1}{k^2} \int \frac{1 - (1 - k^2 x^2)}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx \\
 &= \frac{1}{k^2} \left[\int \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx - \int \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx \right]
 \end{aligned} \tag{4.365}$$

のように、第一種楕円積分と第二種楕円積分の線型結合になる。

- $J_1(\alpha)$ は次のようにまとめなおすと

$$\begin{aligned}
 J_1(\alpha) &= \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi_k(x)}} \\
 &= \int \frac{(x + \alpha)dx}{(x^2 - \alpha^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2 - \alpha^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \\
 &\quad + \alpha \int \frac{dx}{(x^2 - \alpha^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}
 \end{aligned} \tag{4.366}$$

のように、二次無理関数の積分と第三種楕円積分の線型結合になる。

というわけで、楕円積分は3つの標準形に還元されることが示された。

4.4.2 参考文献

- [雑誌記事] 武部尚志 (2017) 楕円積分の分類―道案内版 (連載: 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方 第3回), 数学セミナー 2017 年 6 月号, 73–79.

第 5 章

Dirichlet 積分

5.1 Dirichlet 積分の定義

非正規化 sinc 関数 (cardinal sine 関数) とは

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x} \quad (5.1)$$

で定義される関数である。

正弦積分はその不定積分で

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \text{sinc } t \, dt = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (5.2)$$

と定義され、これは初等関数では表されない一種の特殊関数である。

Dirichlet 積分とは

$$I_D = \text{Si}(\infty) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.3)$$

のことである。これは $\pi/2$ になることが知られている。以下、この積分法を見てゆく。この積分は収束性が微妙なので、微妙なテクニックを必要とする。ラプラス変換やフーリエ積分とも関わりがあっていろいろな積分法が知られている。

5.1.1 参考文献

- [web page] Wikipedia ”sinc 関数”
[https://ja.wikipedia.org/wiki/Sinc 関数](https://ja.wikipedia.org/wiki/Sinc_関数)

5.2 複素積分

複素積分で計算するのがよく知られている。複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \quad (5.4)$$

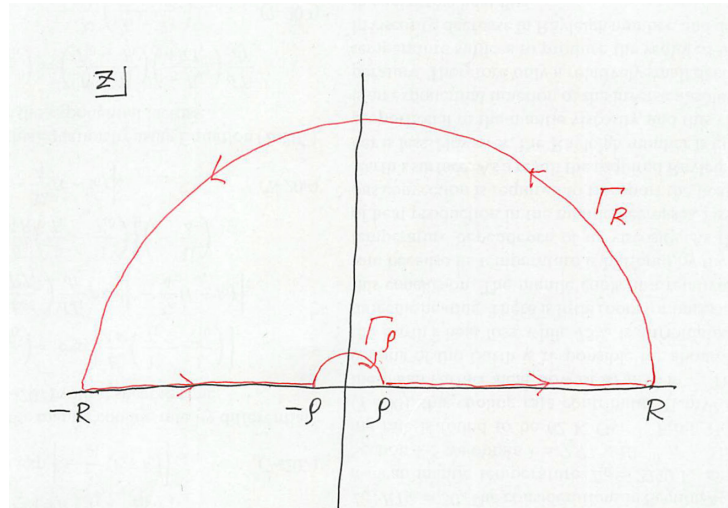


図 5.1 複素積分の経路。

を図 5.1 の経路で積分する。この経路の内側には特異点がないから、

$$\int f(z)dz = 0 \quad (5.5)$$

である。円弧の部分と直線の部分に分割すると

$$0 = \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\rho}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (5.6)$$

となる。第 1 項と第 3 項は

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \\ &= - \int_{\rho}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \\ &= \int_{\rho}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= 2i \int_{\rho}^R \frac{\sin x}{x} dx \\ &\xrightarrow{\rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} 2iI_D \end{aligned} \quad (5.7)$$

である。式 (5.6) の第 2 項は $z = \rho e^{i\theta}$ として

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} i \int_{\pi}^0 e^{i\rho e^{i\theta}} d\theta = -i \int_0^{\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{i\rho e^{i\theta}} d\theta = -i \int_0^{\pi} d\theta = -i\pi \quad (5.8)$$

となる（より詳細な評価は、5.2.1 節を見よ。）。残る式 (5.6) の第 4 項は、 $z = Re^{i\theta}$ として、

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| i \int_0^\pi e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta \right| \\
 &\leq \int_0^\pi \left| e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)} \right| d\theta \\
 &= \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

となるが、ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ では $(2/\pi)\theta \leq \sin \theta$ であることを用いると

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-(2R\theta)/\pi} d\theta \\
 &= \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \\
 &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

となる。ここまで出てきた式 (5.6) の評価をまとめると、 $\rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ において

$$2iI_D - i\pi = 0 \tag{5.11}$$

となる。したがって、

$$I_D = \frac{\pi}{2} \tag{5.12}$$

となることがわかる。

5.2.1 式 (5.6) の第 2 項の評価

先ほどは式 (5.6) の第 2 項の評価を簡単に済ませてしまったが、もう少し真面目にやると以下のようなになる

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i + B(z) \tag{5.13}$$

とすると、

$$B(z) \equiv \frac{e^{iz} - (1 + iz)}{z} \tag{5.14}$$

である。 $B(z)$ は連続関数で、 $z \rightarrow 0$ のとき $B(z) \rightarrow 0$ となるから、 Γ_ρ 上では ρ を十分小さく取れば $|B(z)| \leq M$ とできる。そこで、 Γ_ρ 上では $z = \rho e^{i\theta}$ として、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{\Gamma_\rho} \left[\frac{1}{z} + i + i\rho e^{i\theta} B(z) \right] dz \\ &= \int_{\pi}^0 [i - \rho e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta} B(\rho e^{i\theta})] d\theta \\ &= - \int_0^\pi [i - \rho e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta} B(\rho e^{i\theta})] d\theta \\ &= -i\pi + 2i\rho - i\rho \int_0^\pi e^{i\theta} B(\rho e^{i\theta}) d\theta \end{aligned} \quad (5.15)$$

ここで、第3項は

$$\left| i\rho \int_0^\pi e^{i\theta} B(\rho e^{i\theta}) d\theta \right| \leq \rho \int_0^\pi |B(\rho e^{i\theta})| d\theta \leq \pi\rho M \quad (5.16)$$

そこで、

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} -i\pi \quad (5.17)$$

となる。

5.2.2 参考文献

- [YouTube] Flammable Maths (2018/01/25) "A COMPLEX BOI! Integral $\sin(e^x)$ from $-\infty$ to ∞ using complex analysis"
<https://www.youtube.com/watch?v=ggFYBssFTkU>
- [web page] Wikipedia "ディリクレ積分"
<https://ja.wikipedia.org/wiki/ディリクレ積分>
- [本] 難波誠 (1990) 複素関数三幕劇 (すうがくぶっくす 10), 朝倉書店

5.3 Laplace 変換を用いる方法

本質的には同じ方法のいくつかのバリエーションがある。実関数だけで積分できる。

5.3.1 ここで使う Laplace 変換の性質

これらの方法ではラプラス変換の性質をいくつか使うのでまずそれを求めておく。関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (5.18)$$

と書いておく。

5.3.1.1 Laplace 変換の像の微分法則

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad (5.19)$$

と書くと、

$$\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) \quad (5.20)$$

となる。これを証明しよう。

$$\begin{aligned} \frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial e^{-st}}{\partial s} \right) f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \{-tf(t)\} dt \\ &= \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.3.1.2 Laplace 変換の像の積分法則

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad (5.22)$$

と書くと、

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma \quad (5.23)$$

となる。これを証明しよう。

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t) dt \right) d\sigma \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(\int_s^\infty e^{-\sigma t} d\sigma \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.3.1.3 sine 関数の Laplace 変換

sine 関数のラプラス変換は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sin t\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t dt \\
 &= -[e^{-st} \cos t]_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} e^{-st} \cos t dt \\
 &= 1 - s \left\{ [e^{-st} \sin t]_0^{\infty} dx + s \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t dt \right\} \\
 &= 1 - s^2 \mathcal{L}\{\sin t\}(s)
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

となるので、

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2} \tag{5.26}$$

が得られる。

5.3.2 Laplace 変換の像の微分法則の利用 ～ Feynmann's technique

パラメタ $s(>0)$ による $\sin x/x$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(s) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-sx} dx \tag{5.27}$$

を考える。これが求められれば

$$I_D = \lim_{s \rightarrow +0} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(s) \tag{5.28}$$

ということになる。ラプラス変換は I_D よりも難しそうなので、一見わざわざ問題を難しくしているようだが、ぎりぎり収束する積分に e^{-sx} をかけて、はっきり収束する形の積分にしたという意味がある。そして、ラプラス変換の像の微分法則 (5.20) を使えば sine 関数のラプラス変換に帰着できる。するとラプラス変換のパラメタ s に関する微分方程式を作ることが出来て、それを解くことで $\mathcal{L}\{\sin x/x\}(s)$ を求めることができるのである (Feynmann's technique)。

$\mathcal{L}\{\sin x/x\}(s)$ に微分法則 (5.20) を使って、sine 関数のラプラス変換 (5.26) を使うと

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(s) = -\mathcal{L}\{\sin x\}(s) = -\frac{1}{1+s^2} \tag{5.29}$$

となる。これを s で積分すると

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(s) = -\arctan s + C \tag{5.30}$$

(C は積分定数) となる。元の $\mathcal{L}\{\sin x/x\}(s)$ の定義から考えると^{*1}

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(s) = 0 \tag{5.31}$$

^{*1} ラプラス変換の初期値定理 $\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ からと言っても良い。

になるはずである。したがって、

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(\infty) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C \quad (5.32)$$

である。ゆえに

$$C = \frac{\pi}{2} \quad (5.33)$$

となり、

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(s) = -\arctan s + \frac{\pi}{2} \quad (5.34)$$

である。なお、この積分の微妙さはこの表式からもわかる。 $\mathcal{L}\{\sin x/x\}(s)$ は定義からすると $s < 0$ では発散するはずである。しかし、この右辺は $s < 0$ であってもちゃんと値がある。

それはともかくとして、 $\mathcal{L}\{\sin x/x\}(s)$ がわかったので、

$$I_D = \lim_{s \rightarrow +0} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(s) = \frac{\pi}{2} \quad (5.35)$$

となることがわかる。この方法では、 $s \rightarrow \infty$ で積分定数 C を決めておいて、それを $s \rightarrow +0$ の計算に用いるというところが巧妙なところである。

5.3.3 Laplace 変換の像の積分法則の利用

上の 5.3.2 節では、Laplace 変換の像の微分法則を使って一度微分してから積分しているのだが、それなら微分法則を積分した形の積分法則 (5.23) を最初から使うのがよりすっきりする。すると、

$$\begin{aligned} I_D &= \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin x\}(\sigma) d\sigma \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^\infty \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma \\ &= [\arctan \sigma]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

となる。

ここでやったことは 5.3.2 節よりすっきりしたが、具体的な $\mathcal{L}\{\sin x/x\}(s)$ の形は表に出てこない。それが表に出てきた方がわかりやすいと思えば、5.3.2 節に従うと良い。

5.3.4 2重積分法

上の 5.3.3 節で行ったことを良く見ると、 $\sin x/x$ のラプラス変換と書かずに最初から $s = 0$ と書いてしまっても良いということがわかる。

$$\frac{\sin x}{x} = \sin x \int_0^\infty e^{-\sigma x} d\sigma = \int_0^\infty e^{-\sigma x} \sin x d\sigma \quad (5.37)$$

であることを用いると

$$\begin{aligned} I_D &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\sigma x} \sin x d\sigma \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\sigma x} \sin x dx \right) d\sigma \\ &= \int_0^\infty \mathcal{L}\{\sin x\}(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma \\ &= [\arctan \sigma]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

ここでやったことは、もちろん 5.3.3 節で行ったことよりすっきりしているが、発想がどこから来るかは 5.3.3 節からわかる。

5.3.5 参考文献

- [YouTube] blackpenredpen (2017/08/20) "The main dish, integral of $\sin(x)/x$ from 0 to inf, via Feynman's Technique"
<https://www.youtube.com/watch?v=s1zhYD4x6mY>
- [YouTube] Flammable Maths (2018/02/12) "DESTROYING THE DIRICHLET INTEGRAL ($\sin(x)/x$) AND LETTING IT BURN IN THE 7th CIRCLE OF HELL"
<https://www.youtube.com/watch?v=xWlchgxbQwk>
- [blog] Philosophical Math (2017/09/04) "A Dirichlet Integral"
<https://philosophicalmath.wordpress.com/2017/09/04/a-dirichlet-integral/>

5.4 方形パルスの Fourier 変換を用いる方法

5.4.1 Fourier 変換による二重積分法

もともと sinc 関数は、方形パルス（有限区間で 1 となる関数）のフーリエ変換から現れるものであった*2。すなわち、

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ixy} dy = \left[\frac{e^{ixy}}{2ix} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} = \frac{\sin x}{x} = \text{sinc } x \quad (5.39)$$

である。これを積分すれば Dirichlet 積分になるということだから

$$I_D = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\int_{-1}^1 e^{ixy} dy \right) dx \quad (5.40)$$

となる。積分の順序を入れ替えてみると

$$I_D = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_0^\infty e^{ixy} dx \right) dy \quad (5.41)$$

となる。いま

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{ixy} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{ix(y+i\epsilon)} dx \\ &= i \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{y + i\epsilon} \\ &= \pi \delta(y) + iP \frac{1}{y} \end{aligned} \quad (5.42)$$

なので (7.3.1 節参照)、

$$I_D = \frac{\pi}{2} \quad (5.43)$$

である。このやり方では、微小パラメタ $\epsilon (> 0)$ を持ち出しているところが、この積分の微妙さを如実に表現している。

5.4.2 短冊近似

5.4.1 節のやり方はデルタ関数や微小パラメタ ϵ などちょっと危うい感じのするものが出てくるので、極限の取り方を微妙に変えてそれを回避する。

積分 (5.39) を $(2n+1)$ 個の区間に分割して短冊近似することを考える。すると、等比級数の

*2 物理的にはスリットからのフラウンホーファー回折。

和の公式を用いて

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ixy} dy &\approx S_n(x) \equiv \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \exp\left(ix \frac{k}{n+(1/2)}\right) \\
 &= \frac{1}{2n+1} e^{ixn/(n+(1/2))} \frac{1 - e^{-ix(2n+1)/(n+(1/2))}}{1 - e^{-ix/(n+(1/2))}} \\
 &= \frac{\sin x}{(2n+1) \sin \frac{x}{2n+1}} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \text{sinc } x
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

ということになる。したがって、

$$\int_0^\infty S_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I_D \tag{5.45}$$

となるはずなので、

$$\begin{aligned}
 I_D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty S_n(x) dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{(m+(1/2))\pi} S_n(x) dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(n+(1/2))\pi} S_n(x) dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{(n+(1/2))\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos\left(x \frac{k}{n+(1/2)}\right) \right] dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \int_0^{(n+(1/2))\pi} \cos\left(x \frac{k}{n+(1/2)}\right) dx \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} \sin\left(x \frac{k}{n+(1/2)}\right) \right]_0^{(n+(1/2))\pi} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

が得られる。3 番目の等式で $m \rightarrow \infty$ の極限を取ってから $n \rightarrow \infty$ の極限を取るのを、 $m = n$ として $n \rightarrow \infty$ の極限を取ることに変えているのが工夫である。ただ、極限の取り方がやや甘いので、それを修正したものを次に取り上げる。

5.4.3 Dirichlet kernel の利用

5.4.2 節のやり方を Fourier 変換をそれほど意識しない形で整理してみよう。

まず、先の $S_n(x)$ の代わりに Dirichlet kernel なるものを定義する。

$$D_n(t) \equiv (2n+1)S_n((2n+1)\pi t) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k t} = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin \pi t} \tag{5.47}$$

この関数には

$$\begin{aligned}
 \int_0^{1/2} D_n(t) dt &= \int_0^{1/2} \left(\sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k t} \right) dt \\
 &= \int_0^{1/2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2\pi k t) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} + \left[\sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi k t)}{\pi k} \right]_0^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

という性質がある。

ところで、

$$D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin \pi t} \tag{5.49}$$

であるのに対し、Dirichlet 積分の被積分関数である sinc 関数は

$$\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\pi t} \tag{5.50}$$

のような形をしているのだから ($x = (2n+1)\pi t$)、その差の部分を表す関数として

$$f(t) \equiv \frac{1}{\pi t} - \frac{1}{\sin(\pi t)} \tag{5.51}$$

を定義すると、 $[0, 1/2]$ で $f(t)$ は有界であり Riemann-Lebesgue の補題により

$$\int_0^{1/2} f(t) \sin((2n+1)\pi t) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \tag{5.52}$$

となることがわかる。つまりは、Dirichlet 積分を $D_n(t)$ の積分で近似できそうだということがわかる。

以上の準備の下、Dirichlet 積分を計算してゆく。まず、

$$\begin{aligned}
 I_D &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(n+(1/2))\pi} \frac{\sin x}{x} dx
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

としておいて、 $x = (2n+1)\pi t$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
 I_D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/2} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{t} dt \\
 &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/2} \sin((2n+1)\pi t) \left(f(t) + \frac{1}{\sin(\pi t)} \right) dt \\
 &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{1/2} f(t) \sin((2n+1)\pi t) dt + \int_0^{1/2} D_n(t) dt \right) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

となる。

このやり方は 5.4.2 節のやり方を整理しただけなのだが、 n と m を最初から同じにしてあるので極限の取り方を変えた感じになっていないこととか、短冊近似の誤差がちゃんと 0 になることを Riemann-Lebesgue の補題によって示してあるところが洗練されている。

5.4.4 参考文献

- [web page] Wikipedia "Dirichlet integral"
https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_integral

5.5 方形パルスの Fourier 変換を用いる方法 $\sim (-\infty, \infty)$ の積分

5.4 節の式変形を良く見ると、微小パラメタ ϵ のような気持ち悪いことは、sinc 関数が偶関数であることを利用して、最初から

$$I_D = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx \tag{5.55}$$

として $(-\infty, \infty)$ の積分にしておけば回避できることがわかる。これを用いて 5.4 節の積分をやり直す。

5.5.1 Fourier 変換による二重積分法

もともと sinc 関数は、方形パルス（有限区間で 1 となる関数）のフーリエ変換から現れるものであった*3。すなわち、

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ixy} dy = \left[\frac{e^{ixy}}{2ix} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} = \frac{\sin x}{x} = \text{sinc } x \tag{5.56}$$

である。これを積分すれば Dirichlet 積分になるということだから

$$I_D = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-1}^1 e^{ixy} dy \right) dx \tag{5.57}$$

*3 物理的にはスリットからのフラウンホーファー回折。

となる。積分の順序を入れ替えてみると

$$I_D = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx \right) dy \quad (5.58)$$

となる。ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx = 2\pi\delta(y) \quad (5.59)$$

だから

$$I_D = \frac{\pi}{2} \quad (5.60)$$

である。

5.5.2 短冊近似

5.5.1 節のやり方はデルタ関数がちょっと危うい感じのするので、極限の取り方を微妙に変えてそれを回避する。

積分 (5.56) を $(2n+1)$ 個の区間に分割して短冊近似することを考える。すると、等比級数の和の公式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ixy} dy &\approx S_n(x) \equiv \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \exp\left(ix \frac{k}{n+(1/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} e^{ixn/(n+(1/2))} \frac{1 - e^{-ix(2n+1)/(n+(1/2))}}{1 - e^{-ix/(n+(1/2))}} \\ &= \frac{\sin x}{(2n+1) \sin \frac{x}{2n+1}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \text{sinc } x \end{aligned} \quad (5.61)$$

ということになる。したがって、

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I_D \quad (5.62)$$

となるはずなので、

$$\begin{aligned}
I_D &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x) dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-(m+(1/2))\pi}^{(m+(1/2))\pi} S_n(x) dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-(n+(1/2))\pi}^{(n+(1/2))\pi} S_n(x) dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \int_{-(n+(1/2))\pi}^{(n+(1/2))\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \left(x \frac{k}{n+(1/2)} \right) \right] dx \quad (5.63) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \int_{-(n+(1/2))\pi}^{(n+(1/2))\pi} \cos \left(x \frac{k}{n+(1/2)} \right) dx \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} \sin \left(x \frac{k}{n+(1/2)} \right) \right]_{-(n+(1/2))\pi}^{(n+(1/2))\pi} \right] \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

が得られる。3 番目の等式で $m \rightarrow \infty$ の極限を取ってから $n \rightarrow \infty$ の極限を取るのを、 $m = n$ として $n \rightarrow \infty$ の極限を取ることに変えているのが工夫である。ただ、極限の取り方がやや甘いので、それを修正したものを次に取り上げる。

5.5.3 Dirichlet kernel の利用

5.5.2 節のやり方を Fourier 変換をそれほど意識しない形で整理してみよう。

まず、先の $S_n(x)$ の代わりに Dirichlet kernel なるものを定義する。

$$D_n(t) \equiv (2n+1)S_n((2n+1)\pi t) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k t} = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin \pi t} \quad (5.64)$$

この関数には

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} D_n(t) dt &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k t} \right) dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2\pi k t) \right) dt \\
&= 1 + \left[\sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi k t)}{\pi k} \right]_{-1/2}^{1/2} \quad (5.65) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\pi k) + \sin(\pi k)}{\pi k} \\
&= 1
\end{aligned}$$

という性質がある。

ところで、

$$D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin \pi t} \quad (5.66)$$

であるのに対し、Dirichlet 積分の被積分関数である sinc 関数は

$$\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\pi t} \quad (5.67)$$

のような形をしているのだから $(x = (2n+1)\pi t)$ 、その差の部分を表す関数として

$$f(t) \equiv \frac{1}{\pi t} - \frac{1}{\sin(\pi t)} \quad (5.68)$$

を定義すると、 $[-1/2, 1/2]$ で $f(t)$ は有界であり Riemann-Lebesgue の補題により

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(t) \sin((2n+1)\pi t) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (5.69)$$

となることがわかる。つまりは、Dirichlet 積分を $D_n(t)$ の積分で近似できそうだということがわかる。

以上の準備の下、Dirichlet 積分を計算してゆく。まず、

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-(n+(1/2))\pi}^{(n+(1/2))\pi} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \quad (5.70)$$

としておいて、 $x = (2n+1)\pi t$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{t} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \sin((2n+1)\pi t) \left(f(t) + \frac{1}{\sin(\pi t)} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-1/2}^{1/2} f(t) \sin((2n+1)\pi t) dt + \int_{-1/2}^{1/2} D_n(t) dt \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.71)$$

となる。

このやり方は 5.5.2 節のやり方を整理しただけなのだが、 n と m を最初から同じにしてあるので極限の取り方を変えた感じになっていないこととか、短冊近似の誤差がちゃんと 0 になることを Riemann-Lebesgue の補題によって示してあるところが洗練されている。

5.5.4 参考文献

- [web page] Wikipedia "Dirichlet integral"
https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_integral

5.6 Fourier 級数を用いる方法

5.5.3 節まで来ると、Fourier 変換というよりは Fourier 級数っぽさが強い。そこで、5.5.3 節の内容を Fourier 級数という点から整理しよう。この方法は、実数のみの範囲で書くことが出来る。

まず、最初に確認することは、Dirichlet 積分が有限区間の積分として表現できることである。

$$I_D = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.72)$$

において、

$$x = \lambda t \quad (5.73)$$

($\lambda > 0$) と置いて x 軸を λ 倍に引き伸ばすと

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{1}{2} \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X/\lambda}^{X/\lambda} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \end{aligned} \quad (5.74)$$

となる。とくに $\lambda = 2X$ とすれば

$$I_D = \frac{1}{2} \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin 2Xt}{t} dt \quad (5.75)$$

となり、 $(-1/2, 1/2)$ の範囲の有限領域の積分に還元できた。積分の中身を周期関数的にするためにとくに $X = (n + 1/2)\pi$ としてみると

$$I_D = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin(2n + 1)\pi t}{t} dt \quad (5.76)$$

となる。この節では、この積分の値を求めるということにする。

5.6.1 Fourier 級数を用いる方法における前提

この方法では、2 つ大きな前提がある。Fourier 級数と Riemann-Lebesgue の補題である。証明抜きで結果だけ書いておく。

5.6.1.1 Fourier 級数

$[-1/2, 1/2]$ の範囲が繰り返すような周期関数 $f(x)$ は、以下のように Fourier 級数展開できる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx) \quad (5.77)$$

$$a_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \cos 2\pi kx dx \quad (5.78)$$

$$b_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \sin 2\pi kx dx \quad (5.79)$$

5.6.1.2 Riemann-Lebesgue の補題

$f(x)$ が $[-1/2, 1/2]$ の範囲で可積分なら

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \cos 2\pi nx dx = 0 \quad (5.80)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \sin 2\pi nx dx = 0 \quad (5.81)$$

5.6.2 デルタ関数の Fourier 級数展開と Dirichlet 積分

周期 1 でデルタ関数が立つような関数を考える。

$$D(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \quad (5.82)$$

これは周期関数なので、Fourier 展開できる。

$$D(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kt = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(t) \quad (5.83)$$

ここで $D_n(t)$ は Dirichlet kernel と呼ばれる関数で^{*4}、

$$D_n(t) \equiv 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2\pi kt \quad (5.84)$$

で定義される。三角関数の和と積の公式より

$$\sin[(2k+1)\pi t] - \sin[(2k-1)\pi t] = 2 \cos[2\pi kt] \sin[\pi t] \quad (5.85)$$

^{*4} 5.5.3 節で定義したのと同じもの。

であるから

$$\begin{aligned}
 D_n(t) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2\pi kt \\
 &= 1 + \frac{1}{\sin(\pi t)} \sum_{k=1}^n \{\sin[(2k+1)\pi t] - \sin[(2k-1)\pi t]\} \\
 &= \frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

となることがわかる。そこで、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{\sin(\pi t)} \tag{5.87}$$

となることが導かれた。両辺を $[-1/2, 1/2]$ の範囲で積分すると

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{\sin(\pi t)} dt \tag{5.88}$$

となる。 $g(t) = \frac{1}{\pi t} - \frac{1}{\sin(\pi t)}$ は有界だから Riemann-Lebesgue の定理によって、右辺は

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{\pi t} dt \tag{5.89}$$

と書いてしまってもよく、したがって、(5.76) 式により

$$1 = \frac{2I_D}{\pi} \tag{5.90}$$

となる。ゆえに

$$I_D = \frac{\pi}{2} \tag{5.91}$$

を得る。

5.6.3 Fourier 級数展開を使った Dirichlet 積分の一般化

ここまで来ると、Dirichlet 積分をもう少し一般化できることもわかる。 $[-1/2, 1/2]$ の範囲を単位として周期的な関数 $f(x)$ をフーリエ展開する。

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx) \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\cos 2\pi kt \cos 2\pi kx + \sin 2\pi kt \sin 2\pi kx) \right] dt \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi k(t-x) \right] dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

ここで

$$f_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2\pi k(t-x) \right] dt \quad (5.93)$$

と定義した。ここで、三角関数の和と積の公式より

$$\sin[(2k+1)\pi(t-x)] - \sin[(2k-1)\pi(t-x)] = 2 \cos[2\pi k(t-x)] \sin[\pi(t-x)] \quad (5.94)$$

であるから

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \left[1 + \frac{1}{\sin \pi(t-x)} \sum_{k=1}^n \{ \sin[(2k+1)\pi(t-x)] - \sin[(2k-1)\pi(t-x)] \} \right] dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \frac{\sin[(2n+1)\pi(t-x)]}{\sin[\pi(t-x)]} dt \end{aligned} \quad (5.95)$$

$u = t - x$ と置き、被積分関数の周期性を用いると

$$f_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(u+x) \frac{\sin[(2n+1)\pi u]}{\sin[\pi u]} du \quad (5.96)$$

である。 $n \rightarrow \infty$ とすれば、以下の定理とその特殊な場合として Dirichlet 積分を得る。

定理 周期 1 の周期関数 $f(x)$ に対して

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(u+x) \frac{\sin[(2n+1)\pi u]}{\sin[\pi u]} du \quad (5.97)$$

系

$$I_D = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad (5.98)$$

系の証明 定理において

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (5.99)$$

$$x = 0 \quad (5.100)$$

と置く。ただし、 $f(x)$ はもともと周期的ではないが、 $[-1/2, 1/2]$ の範囲外では周期的になるようにつなげるものとする。すると、

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin[(2n+1)\pi u]}{\pi u} du = \frac{2I_D}{\pi} \quad (5.101)$$

したがって、

$$I_D = \frac{\pi}{2} \quad (5.102)$$

を得る。

5.6.4 参考文献

- [ネット上文書] Guo Chen (2009) A treatment of the Dirichlet integral via the methods of real analysis
<http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/ChenGuo.pdf>

5.7 Dirichlet 積分から比較的簡単に導かれる積分

5.7.1 $\sin(cx)/x$ の積分と超関数

まず、簡単に Dirichlet 積分

$$I_D = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.103)$$

において、 $x = cy$ と変数変換すれば、

$$I_D(c) \equiv \int_0^\infty \frac{\sin cy}{y} dy = \begin{cases} I_D & (c > 0) \\ -I_D & (c < 0) \end{cases} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(c) \quad (5.104)$$

となる。これから

$$\frac{d}{dc} \int_0^\infty \frac{\sin cx}{x} dx = \pi \delta(c) \quad (5.105)$$

というデルタ関数の表式が得られる。

5.5.1 節でやったような計算から以上のことを逆にたどることもできる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \cos(\alpha x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} dx \\ &= 2\pi \delta(\alpha) \end{aligned} \quad (5.106)$$

両辺を α で $-c$ から c まで積分すれば、

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin cx}{x} dx = \pi \operatorname{sgn}(c) \quad (5.107)$$

を得る。

5.7.2 $\sin(x^n)/x$ の積分

Dirichlet 積分

$$I_D = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.108)$$

において、 $x = y^n$ と変数変換すれば、

$$\frac{dx}{x} = n \frac{dy}{y} \quad (5.109)$$

となるので、

$$I_D = n \int_0^\infty \frac{\sin y^n}{y} dy \quad (5.110)$$

となる。すなわち、

$$\int_0^\infty \frac{\sin y^n}{y} dy = \frac{\pi}{2n} \quad (5.111)$$

を導くことができた。

5.7.3 $\sin(e^x)$ の積分

Dirichlet 積分

$$I_D = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.112)$$

において、 $x = e^y$ と変数変換すれば、 $dx = e^y dy$ なので、

$$I_D = \int_{-\infty}^\infty \sin(e^y) dy = \frac{\pi}{2} \quad (5.113)$$

5.7.4 $\sin^2 x/x^2$ の積分

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (5.114)$$

を考える。これには Feynmann's technique を用いる。パラメタ t を導入して

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^2(tx)}{x^2} dx \quad (5.115)$$

という積分を考える。 $I_2 = I(t=1)$ である。これを t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{\sin^2(tx)}{x^2} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin^2(tx)}{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{2 \sin(tx) \cos(tx)}{x} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(2tx)}{x} dx \end{aligned} \quad (5.116)$$

ところが、これは (5.104) により

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad (5.117)$$

なので、積分すると

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}t + C & (t > 0) \\ -\frac{\pi}{2}t + C & (t < 0) \end{cases} \quad (5.118)$$

となる。ところが、明らかに $I(0) = 0$ なので、 $C = 0$ であり、

$$I(t) = \frac{\pi}{2}t \operatorname{sgn}(t) \quad (5.119)$$

である。したがって、

$$I_2 = I(t=1) = \frac{\pi}{2} \quad (5.120)$$

となる。

5.7.5 参考文献

- [ネット上文書] Guo Chen (2009) A treatment of the Dirichlet integral via the methods of real analysis
<http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/ChenGuo.pdf>
- [YouTube] Flammable Maths (2018/01/25) "A COMPLEX BOI! Integral $\sin(e^x)$ from -infinity to infinity using complex analysis"
<https://www.youtube.com/watch?v=ggFYBssFTkU>
- [YouTube] Flammable Maths (2018/03/11) "Doing double Feynman Integration on this hidden Dirichlet Integral ($\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$)"
<https://www.youtube.com/watch?v=YhPHe5222Fo>
- [blog] Philosophical Math (2017/09/04) "A Dirichlet Integral"
<https://philosophicalmath.wordpress.com/2017/09/04/a-dirichlet-integral/>

第 6 章

Lorentz 関数の逆 Fourier 変換

6.1 Lorentz 関数の逆 Fourier 変換の定義とその簡単な性質

Lorentz 関数（あるいは Cauchy 分布、Breit-Wigner 分布）とは次の形の関数である。

$$f_L(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2} \quad (6.1)$$

$\gamma > 0$ とする。これは次のように規格化されている。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_L(x; x_0, \gamma) dx = 1 \quad (6.2)$$

Lorentz 関数の逆 Fourier 変換は次のように定義しておく。

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; \omega_0, \gamma) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_L(\omega; \omega_0, \gamma) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.3)$$

ω_0 の役割について考える。逆 Fourier 変換は

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; \omega_0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega \quad (6.4)$$

と書ける。ここで、 $\omega' = \omega - \omega_0$ として積分変数を ω' に変更すると

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; \omega_0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega' t} e^{i\omega_0 t}}{\omega'^2 + \gamma^2} d\omega' = \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) e^{i\omega_0 t} \quad (6.5)$$

となる。したがって、 $\omega_0 = 0$ の結果さえわかっていれば、 $\omega_0 \neq 0$ の結果はそれに $e^{i\omega_0 t}$ を掛けるだけでよいことがわかる。

それで、 $\omega_0 = 0$ としてみると、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_L(\omega; 0, \gamma) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \\
 &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \\
 &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

となる。このような積分がわかれば良いということになる。最後の等号は、被積分関数が奇関数の部分が 0 になることから、偶関数の部分だけを残したものである。

また、

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \tag{6.7}$$

において、 $\omega' = \omega/\gamma$ として積分変数を ω' に変更すると

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega'(\gamma t)}}{\omega'^2 + 1} d\omega' \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega'(\gamma t))}{\omega'^2 + 1} d\omega' \\
 &= \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(\gamma t; 0, 1)
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

となるので、本質的には $\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, 1)$ の計算さえ出来ていればよい。

以下、求めることの結果を書いておけば

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; \omega_0, \gamma) &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega = e^{i\omega_0 t} e^{-\gamma|t|} \\
 \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega = e^{-\gamma|t|} \\
 \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, 1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + 1} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + 1} d\omega = e^{-|t|}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

とくに最後の行で $t = 1$ としてみると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega)}{\omega^2 + 1} d\omega = \frac{\pi}{e} \tag{6.10}$$

となり、 π と e が現れる美しい積分となる。

6.2 複素積分

Lorentz 関数の逆 Fourier 変換は、複素積分で計算するのがよく知られている。複素関数

$$f(z; t, \omega_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma e^{izt}}{(z - \omega_0)^2 + \gamma^2} \tag{6.11}$$

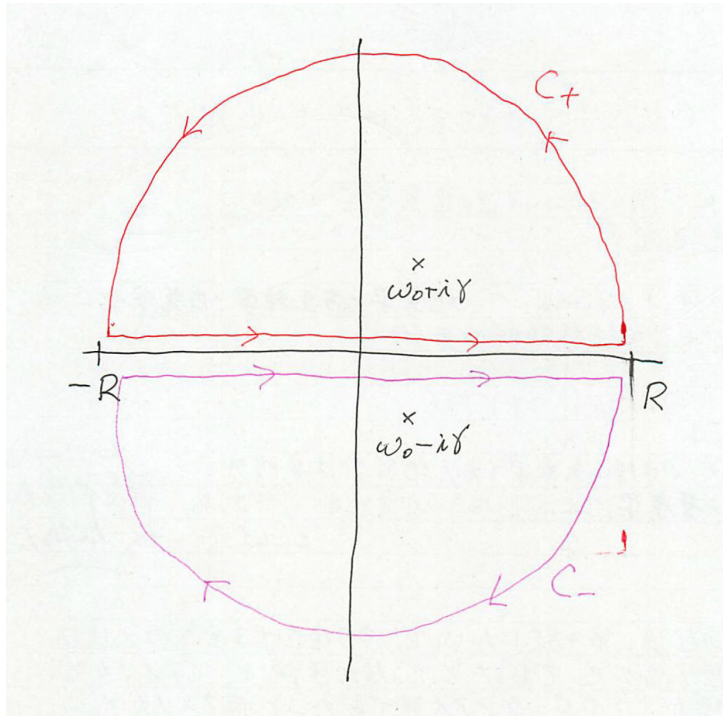


図 6.1 複素積分の経路。

を t の正負に応じて、図 6.1 の経路で積分する。

- $t > 0$ の場合：経路 C_+ で積分する。 R を十分に大きく取れば、この経路の内側には特異点 $z = \omega_0 + i\gamma$ が存在する。これは一位の極だから、留数定理により

$$\int_{C_+} f(z) dz = 2\pi i \frac{1}{\pi} \frac{\gamma e^{i(\omega_0 + i\gamma)t}}{2i\gamma} = e^{i(\omega_0 + i\gamma)t} \quad (6.12)$$

となる。経路を円弧の部分と直線の部分に分割したとき、円弧の部分は $R \rightarrow \infty$ としたとき 0 になることが容易にわかる。直線部分は逆 Fourier 変換になるから、

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; \omega_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega_0 t} e^{-\gamma t} \quad (6.13)$$

となる。

- $t < 0$ の場合：経路 C_- で積分する。 R を十分に大きく取れば、この経路の内側には特異点 $z = \omega_0 - i\gamma$ が存在する。これは一位の極だから、経路が時計回りであることに注意すると、留数定理により

$$\int_{C_-} f(z) dz = -2\pi i \frac{1}{\pi} \frac{\gamma e^{i(\omega_0 - i\gamma)t}}{-2i\gamma} = e^{i(\omega_0 - i\gamma)t} \quad (6.14)$$

となる。経路を円弧の部分と直線の部分に分割したとき、円弧の部分は $R \rightarrow \infty$ としたとき 0 になることが容易にわかる。直線部分は逆 Fourier 変換になるから、

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; \omega_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega_0 t} e^{\gamma t} \quad (6.15)$$

となる。

以上の計算をまとめると、

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; \omega_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega_0 t} e^{-\gamma|t|} \quad (6.16)$$

となる。

6.3 Laplace 変換を用いる方法

Fourier 変換の上に Laplace 変換をするのは屋上屋を重ねるようにも見えるが、有効である。三角関数や指数関数の Laplace 変換が簡単にできることを利用する。

ここでは、 $\omega_0 = 0$ の

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \quad (6.17)$$

を求めてゆくことにする。この Laplace 変換を考える。ただし、Laplace 変換なので考えている範囲は $t > 0$ に限る。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma)\}(s) &= \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \right] e^{-st} dt \\ &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \left[\int_0^{\infty} \cos(\omega t) e^{-st} dt \right] d\omega \\ &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) d\omega \\ &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \frac{s}{\omega^2 + s^2} d\omega \\ &= \frac{\gamma s}{\pi(s^2 - \gamma^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} - \frac{1}{\omega^2 + s^2} \right] d\omega \\ &= \frac{\gamma s}{\pi(s^2 - \gamma^2)} \left[\frac{1}{\gamma} \arctan \frac{x}{\gamma} - \frac{1}{s} \arctan \frac{x}{s} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\gamma s}{(s^2 - \gamma^2)} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s + \gamma} \end{aligned} \quad (6.18)$$

これを逆 Laplace 変換すると

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) = e^{-\gamma t} \quad (6.19)$$

となる。ただし、 $\gamma > 0$ （最初からしている仮定）、 $t > 0$ （Laplace 変換の仮定）とする。

6.3.1 参考文献

- [YouTube] Flammable Maths (2018/03/30) "A beautiful result in Calculus: Solution using Laplace transforms (Integral $\cos(x)/(x^2+1)$)"

<https://www.youtube.com/watch?v=inwVOQr-kwg>

6.4 Feynmann's technique

Feynmann's technique では積分に含まれるパラメタに関する微分方程式を求めて、それを積分することで求める積分を求める。ここでは、 $\omega_0 = 0$ の

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \quad (6.20)$$

を求めてゆくことにする。パラメタとしては t を使うことと γ を使うことが考えられる。一見すると γ を使う方はうまく行きそうにないが、実はできる。

6.4.1 t をパラメタとした場合 その1

パラメタとして t を使うことにして、簡単のため

$$I(t) = \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \quad (6.21)$$

と書くことにする。

$I(t)$ を t で2階微分してみると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dt^2} &= -\frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 e^{i\omega t}}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \\ &= -\frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(\omega^2 + \gamma^2) - \gamma^2] e^{i\omega t}}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \\ &= -\frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega + \frac{\gamma^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \\ &= -2\gamma\delta(t) + \gamma^2 I \end{aligned} \quad (6.22)$$

となる。これを解くと $t \neq 0$ では

$$I(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} \quad (6.23)$$

であり、

$$\frac{dI}{dt}(t = +0) - \frac{dI}{dt}(t = -0) = -2\gamma \quad (6.24)$$

ということになる。境界条件としては、一つには

$$I(t = 0) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\omega}{\gamma} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \quad (6.25)$$

がある。もう一つは Riemann-Lebesgue の補題 (5.6.1.2 節) により

$$I(t \rightarrow \pm\infty) = 0 \quad (6.26)$$

となる。以上のことから

$$\begin{aligned} I(t) &= \begin{cases} e^{-\gamma t} & (t \geq 0) \\ e^{\gamma t} & (t < 0) \end{cases} \\ &= e^{-\gamma|t|} \end{aligned} \quad (6.27)$$

が得られる。

6.4.2 t をパラメタとした場合 その2

その1とほぼ同じだが、微分の計算法が少し異なるもの
パラメタとして t を使うことにして、簡単のため

$$I(t) = \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \quad (6.28)$$

と書くことにする。

$I(t)$ をまず t で1階微分する。

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \sin(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + \gamma^2) - \gamma^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} \sin(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega + \frac{\gamma^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} d\omega \\ &= -\gamma \operatorname{sgn}(t) + \frac{\gamma^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} d\omega \end{aligned} \quad (6.29)$$

最後の等号には Dirichlet 積分 (5.104) を用いた。これをもう一度微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dt^2} &= -2\gamma \delta(t) + \frac{\gamma^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega \\ &= -2\gamma \delta(t) + \gamma^2 I \end{aligned} \quad (6.30)$$

となり、以下は「その1」と同じでも良いが、別の境界条件もありうるのをそれを書いておく。

上の微分方程式を解くと $t \neq 0$ では

$$I(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} \quad (6.31)$$

であり、

$$\frac{dI}{dt}(t = +0) - \frac{dI}{dt}(t = -0) = -2\gamma \quad (6.32)$$

ということになる。境界条件としては、一つには

$$I(t = 0) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\omega}{\gamma} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \quad (6.33)$$

がある。もう一つは (6.29) より

$$\frac{dI}{dt}(t = +0) = -\gamma \quad (6.34)$$

$$\frac{dI}{dt}(t = -0) = \gamma \quad (6.35)$$

となる。以上のことから

$$\begin{aligned} I(t) &= \begin{cases} e^{-\gamma t} & (t \geq 0) \\ e^{\gamma t} & (t < 0) \end{cases} \\ &= e^{-\gamma|t|} \end{aligned} \quad (6.36)$$

が得られる。

6.4.3 γ をパラメタとした場合

パラメタとして γ を使うことにして、簡単のため

$$I(\gamma; t) = \mathcal{F}^{-1}\{f_L\}(t; 0, \gamma) \quad (6.37)$$

と書くことにする。被積分関数を γ で微分すると複雑になってしまうため、一見するとうまくいきそうにないのだが、次の事実があつてうまくいく。それは

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f_L(\omega; 0, \gamma) = -\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} f_L(\omega; 0, \gamma) \quad (6.38)$$

となることである。実際微分を計算してゆくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} f_L(\omega; 0, \gamma) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} - \frac{2\gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f_L(\omega; 0, \gamma) &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\gamma}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} - 2 \frac{2\gamma(\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 + \gamma^2)^3} \right] \\ &= -\frac{2\gamma}{\pi} \frac{3\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^3} \end{aligned} \quad (6.39)$$

ならびに

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} f_L(\omega; 0, \gamma) &= \frac{\gamma}{\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \\ &= -\frac{\gamma}{\pi} \frac{2\omega}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} f_L(\omega; 0, \gamma) &= -\frac{2\gamma}{\pi} \left[\frac{1}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} - 2 \frac{2\omega^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^3} \right] \\ &= \frac{2\gamma}{\pi} \frac{3\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^3} \end{aligned} \quad (6.40)$$

となるので、

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f_L(\omega; 0, \gamma) = -\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} f_L(\omega; 0, \gamma) = -\frac{2\gamma}{\pi} \frac{3\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^3} \quad (6.41)$$

である。

このことを利用して $I(\gamma; t)$ の微分の計算を行う。 γ で 2 回微分すると

$$\frac{d^2}{d\gamma^2} I(\gamma; t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f_L(\omega; 0, \gamma) d\omega \quad (6.42)$$

である。次に (6.41) と (6.40) を利用してこれを部分積分してゆく。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\gamma^2} I(\gamma; t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} f_L(\omega; 0, \gamma) d\omega \\ &= - e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial \omega} f_L(\omega; 0, \gamma) \Big|_{-\infty}^{\infty} + it \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial \omega} f_L(\omega; 0, \gamma) d\omega \\ &= - e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial \omega} f_L(\omega; 0, \gamma) \Big|_{-\infty}^{\infty} + it e^{i\omega t} f_L(\omega; 0, \gamma) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + t^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f_L(\omega; 0, \gamma) d\omega \\ &= e^{i\omega t} \frac{\gamma}{\pi} \frac{2\omega}{(\omega^2 + \gamma^2)^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + it e^{i\omega t} \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + t^2 I(\gamma; t) \\ &= t^2 I(\gamma; t) \end{aligned} \quad (6.43)$$

すなわち、

$$\frac{d^2}{d\gamma^2} I(\gamma; t) = t^2 I(\gamma; t) \quad (6.44)$$

という微分方程式が得られた。これを解くと

$$I(\gamma; t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} \quad (6.45)$$

である。境界条件を直接求めるのは難しいので (6.8) の結果、すなわち

$$I(\gamma; t) = I(1; \gamma t) \quad (6.46)$$

を利用して (6.25) と (6.25) の結果を用いれば、

$$I(0; t) = I(1; 0) = 1 \quad (6.47)$$

$$I(\infty; t) = \begin{cases} I(1; \infty) = 0 & (t > 0) \\ I(1; -\infty) = 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (6.48)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} I(\gamma; t) &= \begin{cases} e^{-\gamma t} & (t \geq 0) \\ e^{\gamma t} & (t < 0) \end{cases} \\ &= e^{-\gamma |t|} \end{aligned} \quad (6.49)$$

が得られる。

6.4.4 参考文献

- [本] Paul J. Nahin (2015) *Inside Interesting Integrals (Undergraduate Lecture Note in Physics)*, Springer
- [YouTube] Flammable Maths (2018/04/04) "A beautiful result in calculus: Solution using Feynman integration (Integral $\cos(x)/(x^2+1)$)"
 https://www.youtube.com/watch?v=S9LttmTD_14

6.5 Parseval の等式の利用

Fourier 変換に対して一般に成り立つ Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{f\}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.50)$$

を利用する。

ここは天下りの的に以下の関数を考える。

$$f(\tau) = \begin{cases} e^{-\gamma\tau} & (0 \leq \tau < t) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6.51)$$

このとき

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-\gamma\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-(\gamma+i\omega)t}}{\gamma + i\omega} \end{aligned} \quad (6.52)$$

である。

これらを Parseval の等式の両辺に代入する。左辺は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(\tau)]^2 d\tau = \int_0^t e^{-2\gamma\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \quad (6.53)$$

右辺は

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{f\}(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1 - e^{-(\gamma+i\omega)t}][1 - e^{-(\gamma-i\omega)t}]}{[\gamma + i\omega][\gamma - i\omega]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + e^{-2\gamma t} - 2e^{-\gamma t} \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{1 + e^{-2\gamma t}}{2\gamma} - \frac{e^{-\gamma t}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega \end{aligned} \quad (6.54)$$

となる。これらを (6.50) に代入すると、

$$\frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} d\omega = e^{-\gamma t} \quad (6.55)$$

を得る。

この方法のミソは、有限区間で切れる関数を使うことから、積分の t 依存性を出してくるところである。

6.5.1 参考文献

- [本] Paul J. Nahin (2015) *Inside Interesting Integrals (Undergraduate Lecture Note in Physics)*, Springer

第 7 章

Delta 関数や Heaviside 関数の Fourier 変換

delta 関数や Heaviside 関数の Fourier 変換や逆 Fourier 変換の問題は第 5 章の Dirichlet 積分や第 6 章の Lorentz 関数の問題と関係が深いので、ここでまとめておく。

7.1 Fourier 変換の定義

Fourier 変換と逆 Fourier 変換の定義には係数の付け方とか波数（周波数）の符号の取り方でいくつかの流儀があるが、ここでは第 6 章の定義と整合的に以下のように定義しておく。

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}\{f\}(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (7.1a)$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}\}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (7.1b)$$

7.2 delta 関数

7.2.1 delta 関数の Fourier 変換と佐藤超関数

delta 関数の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}\{\delta\}(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \quad (7.2)$$

と書ける。だから、逆変換は

$$\delta(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (7.3)$$

となっているはずである。ところが、右辺の積分は真面目に言えば収束しない。これを形式的に以下のように解釈する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^0 e^{ikx+\epsilon k} dk + \int_0^{\infty} e^{ikx-\epsilon k} dk \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{1}{ix+\epsilon} - \frac{1}{ix-\epsilon} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{1}{x-i\epsilon} - \frac{1}{x+i\epsilon} \right]\end{aligned}\tag{7.4}$$

そこで、delta 関数を

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{1}{x-i\epsilon} - \frac{1}{x+i\epsilon} \right]\tag{7.5}$$

と書くことができる。これを delta 関数の定義だとしたのが、佐藤幹夫の超関数である。

(7.5) が delta 関数の定義だとする。すると、任意の関数 $f(z)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-i\epsilon} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x+i\epsilon} dx \right]\tag{7.6}$$

となる。ここで、 ϵ が正の方からゼロに近づくことを考えると、第一の積分では原点の周りでは複素平面上小さな半径 $\rho(>\epsilon)$ の下半円 $z = \rho e^{i\phi}$ を ϕ が π から 2π に増えていくように積分しないといけない。第二の積分では原点の周りでは複素平面上小さな半径 $\rho(>\epsilon)$ の上半円 $z = \rho e^{i\phi}$ を ϕ が π から 0 に減っていくように積分しないといけない。すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\phi})}{\rho e^{i\phi}} i \rho e^{i\phi} d\phi + \int_{\rho}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\pi}^0 \frac{f(\rho e^{i\phi})}{\rho e^{i\phi}} i \rho e^{i\phi} d\phi - \int_{\rho}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\phi}) d\phi \\ &= f(0)\end{aligned}\tag{7.7}$$

となり、確かに delta 関数を持つべき性質を持っていることが分かる。

7.2.2 delta 関数と Lorentz 関数

(7.5) が delta 関数の定義だとする。すると、実部と虚部に分けて

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{1}{x-i\epsilon} - \frac{1}{x+i\epsilon} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}\end{aligned}\tag{7.8}$$

となる。すなわち、原点を中心として幅 ϵ の Lorentz 関数の幅を 0 にした極限が delta 関数なのである。Lorentz 関数が規格化されているから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1\tag{7.9}$$

は満たされている。

式 (6.9) で、 ω を $-\omega$ と置き換えることから

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \right\} = \frac{1}{2\pi} e^{-\epsilon|t|} \quad (7.10)$$

なので、

$$\mathcal{F} \{ \delta \} (k) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{-\epsilon|t|} = \frac{1}{2\pi} \quad (7.11)$$

となる。

7.3 Heaviside 関数

7.3.1 Heaviside 関数の Fourier 変換

Heaviside 関数を Fourier 変換してみる。

$$\mathcal{F} \{ H \} (k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikx} dx \quad (7.12)$$

この積分は真面目に言えば収束しないので、式 (7.4) の計算と同様の仕掛けを施してみる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ H \} (k) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-ikx - \epsilon x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{ik + \epsilon} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{k - i\epsilon} \end{aligned} \quad (7.13)$$

これに任意の関数 $f(k)$ を掛けて積分することを考えると、原点の周りでは複素平面上小さな半径 $\rho (> \epsilon)$ の下半円 $z = \rho e^{i\phi}$ を ϕ が π から 2π に増えていくように積分しないといけない。すなわち、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) \mathcal{F} \{ H \} (k) dk &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{k - i\epsilon} dk \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{f(k)}{k} dk + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\phi})}{\rho e^{i\phi}} i \rho e^{i\phi} d\phi + \int_{\rho}^{\infty} \frac{f(k)}{k} dk \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{f(k)}{k} dk + \pi i f(0) + \int_{\rho}^{\infty} \frac{f(k)}{k} dk \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) \left[P \frac{1}{k} + \pi i \delta(k) \right] dk \end{aligned} \quad (7.14)$$

となる。すなわち、

$$\mathcal{F} \{ H \} (k) = \frac{1}{2} \delta(k) + P \frac{1}{2\pi i k} \quad (7.15)$$

となる。

7.3.2 Heaviside 関数と Dirichlet 積分

式 (7.15) の逆変換を考えることから

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \text{P} \frac{e^{ikx}}{k} dk \quad (7.16)$$

となる。このことは、右辺の積分を直接複素積分を用いて評価することからも確認できる。右辺の積分は $x > 0$ のときは図 5.1 の経路での積分を考えることから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{P} \frac{e^{ikx}}{k} dk = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\rho e^{i\phi}}}{\rho e^{i\phi}} i\rho e^{i\phi} d\phi = i \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{i\rho e^{i\phi}} d\phi = i \int_0^{\pi} d\phi = i\pi \quad (7.17)$$

$x < 0$ のときは図 5.1 のと実軸に関して対称的な経路での積分を考えることから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{P} \frac{e^{ikx}}{k} dk = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\rho e^{i\phi}}}{\rho e^{i\phi}} i\rho e^{i\phi} d\phi = -i \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\rho e^{i\phi}} d\phi = -i \int_{\pi}^{2\pi} d\phi = -i\pi \quad (7.18)$$

となる。このようにして (7.16) が確認できた。

式 (7.16) の右辺を Euler の公式を用いて書き替えると、

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \text{P} \frac{\cos(kx) + i \sin(kx)}{k} dk \quad (7.19)$$

となる。cosine の積分は対称性から 0 になり、

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} dk \quad (7.20)$$

が得られる。すなわち Dirichlet 積分 (5.107)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} dk = 2\pi \left[H(x) - \frac{1}{2} \right] = \pi \text{sgn}(x) \quad (7.21)$$

が再現される。