# 直交多項式

吉田茂生

2020 年 1 月 25 日

# 目次

# 第 1 章

# 準備

ここでは用語や公式の準備をしておく。

## 1.1 Goursat の公式

直交多項式の母関数を求めるときに、以下の Goursat の公式をしばしば用いることになる。

**定理** 正則函数 $f(z)$ の $n$ 階導関数に関して

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \tag{1.1}$$

ただし、$C$ は $t = z$ を正の向きに一周する任意の閉曲線である。

## 1.2 参考文献


- [ 本 ] 犬井鉄郎 (1962) 特殊関数 （岩波全書 252）, 岩波書店.

# 第 2 章

# Chebyshev 多項式

第 1 種チェビシェフ多項式[*1]は、三角関数の親戚で使いやすいし、有限区間の関数の近似としては Fourier 級数よりも性質が良いので、しばしば数値計算に利用される。

## 2.1 三角関数による定義

いろいろな定義があるが、三角関数による定義は、$-1 \leq x \leq 1$ において

$$T_m(x) = \cos[m \arccos(x)] \tag{2.1}$$

である。この定義が実用的には最も便利である。すぐにわかること：

- あとで具体的に示すが、$\cos m\theta$ は、倍角公式や 3 倍角公式等の作り方を考えると、$\cos\theta$ の $m$ 次多項式になることがわかるので、$T_m(x)$ は $m$ 次多項式である。
- 端点での値

$$T_m(1) = 1 \tag{2.2}$$
$$T_m(-1) = (-1)^m \tag{2.3}$$

- 値域

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |T_m(x)| = 1 \tag{2.4}$$

## 2.2 直交性

次の直交性がある。

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & (n = m = 0) \\ (\pi/2) & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{2.5}$$

[*1] 英語では Chebyshev と綴られることが多いが、Tschebyscheff などと綴ることもある。Wikipedia は Chebyshev。

これは左辺を具体的に計算することでわかる。$x = \cos\theta$ と置くと、

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^\pi \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \{\cos[(m+n)\theta] + \cos[(m-n)\theta]\}\, d\theta \\
&= \begin{cases} \pi & (n = m = 0) \\ \frac{\pi}{2} & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。

## 2.3 具体的な多項式による表現

まず、$m$ が小さいときの具体的な表式を求めてゆく。$x = \cos\theta$ とすると、

$$T_m = \cos(m\theta) \tag{2.7}$$

ゆえ、

$$\begin{aligned}
T_0 &= 1 \\
T_1 &= \cos\theta = x \\
T_2 &= \cos 2\theta = \Re e^{2i\theta} = \Re(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1 \\
T_3 &= \cos 3\theta = \Re e^{3i\theta} = \Re(\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x \\
T_4 &= \cos 4\theta = \Re e^{4i\theta} = \Re(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\
&= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\
&= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2 \\
&= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \\
&= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5 &= \cos 5\theta = \Re e^{5i\theta} = \Re(\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 \\
&= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \\
&= 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned} \tag{2.8}$$

が得られる。まとめると、

$$T_0(x) = 1 \tag{2.9}$$
$$T_1(x) = x \tag{2.10}$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \tag{2.11}$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \tag{2.12}$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \tag{2.13}$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \tag{2.14}$$

となる。グラフは Wikipedia ”Chebyshev polynomials” 参照。

以上の手順から、$m$ が一般の場合の具体的な表式を求めることもできる。

$$\begin{aligned}
T_m = \cos m\theta = \Re e^{im\theta} &= \Re(\cos\theta + i\sin\theta)^m \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor} \begin{pmatrix} m \\ 2k \end{pmatrix} (-1)^k \cos^{m-2k}\theta \sin^{2k}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor} \begin{pmatrix} m \\ 2k \end{pmatrix} (-1)^k \cos^{m-2k}\theta (1-\cos^2\theta)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor} \begin{pmatrix} m \\ 2k \end{pmatrix} (-1)^k \cos^{m-2k}\theta \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \cos^{2l}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor} \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} m \\ 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} (-1)^{k-l} \cos^{m-2(k-l)}\theta
\end{aligned} \tag{2.15}$$

ここで、$\lfloor \alpha \rfloor$ は $\alpha$ の整数部分である。$n = k - l$ として、$l$ の代わりに $n$ で和をとることにして、和を取る順序を入れ替えると、

$$T_m = \sum_{n=0}^{\lfloor m/2\rfloor} \sum_{k=n}^{\lfloor m/2\rfloor} \begin{pmatrix} m \\ 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \cos^{m-2n}\theta \tag{2.16}$$

となる。さらに二項係数の間に成り立つ等式（Gould, 2010)

$$\sum_{k=n}^{\lfloor m/2\rfloor} \begin{pmatrix} m \\ 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \frac{m2^{m-2n-1}}{m-n} \begin{pmatrix} m-n \\ n \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

（ここで、$n \leq \lfloor m/2 \rfloor$ で、$m \neq 0$ とする[*2]）を用いると、

$$\begin{aligned}
T_m &= \sum_{n=0}^{\lfloor m/2\rfloor} \frac{m2^{m-2n-1}}{m-2} \begin{pmatrix} m-n \\ n \end{pmatrix} \quad (-1)^n \cos^{m-2n}\theta \\
&= \frac{m}{2} \sum_{n=0}^{\lfloor m/2\rfloor} (-1)^n \frac{(m-n-1)!}{n!(m-2n)!} (-1)^n (2\cos\theta)^{m-2n} \\
&= \frac{m}{2} \sum_{n=0}^{\lfloor m/2\rfloor} (-1)^n \frac{(m-n-1)!}{n!(m-2n)!} (-1)^n (2x)^{m-2n}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

[*2] $m = 0$ だと右辺の分母にある $m - n$ が 0 になってしまう。

が得られる。ただし、$m \neq 0$ とする。

## 2.4 漸化式

### 2.4.1 基本漸化式

漸化式を導く。

$$T_{m+1}(x) = \cos[(m+1)\arccos(x)] \tag{2.19}$$
$$T_{m-1}(x) = \cos[(m-1)\arccos(x)] \tag{2.20}$$

ゆえ

$$T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x) = 2\cos[m\arccos(x)]\cos[\arccos(x)] = 2xT_m(x) \tag{2.21}$$

となるから、漸化式

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \tag{2.22}$$

が得られる。初項は上で見たように

$$T_0(x) = 1 \tag{2.23}$$
$$T_1(x) = x \tag{2.24}$$

である。

漸化式を利用しても $m$ が小さいときの具体的な表式として

$$T_0(x) = 1 \tag{2.25}$$
$$T_1(x) = x \tag{2.26}$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \tag{2.27}$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \tag{2.28}$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \tag{2.29}$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \tag{2.30}$$

が得られる。

漸化式 (2.22) をもう少し一般化してみよう。

$$T_{n+m}(x) = \cos[(n+m)\arccos(x)] \tag{2.31}$$
$$T_{n-m}(x) = \cos[(n-m)\arccos(x)] \tag{2.32}$$

ゆえ

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2\cos[n\arccos(x)]\cos[m\arccos(x)] = 2T_n(x)T_m(x) \tag{2.33}$$

となるから、漸化式

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x) \tag{2.34}$$

が得られる。

### 2.4.2 基本漸化式の微分

漸化式 (2.22) を微分してゆくと、微分に対する漸化式

$$\frac{dT_{m+1}}{dx} = 2T_m + 2x\frac{dT_m}{dx} - \frac{dT_{m-1}}{dx} \tag{2.35}$$

が得られる。初項は

$$\frac{dT_0}{dx} = 0 \tag{2.36}$$
$$\frac{dT_1}{dx} = 1 \tag{2.37}$$

である。

もう一度微分すると、

$$\frac{d^2T_{m+1}}{dx^2} = 4\frac{dT_m}{dx} + 2x\frac{d^2T_m}{dx^2} - \frac{d^2T_{m-1}}{dx^2} \tag{2.38}$$

が得られる。初項は

$$\frac{d^2T_0}{dx^2} = 0 \tag{2.39}$$
$$\frac{d^2T_1}{dx^2} = 0 \tag{2.40}$$

である。

### 2.4.3 微分漸化式その 1

$$T_m(x) = \cos[m \arccos(x)] \tag{2.41}$$

を $x$ で微分すると

$$\frac{d}{dx}T_m(x) = m\frac{\sin[m \arccos(x)]}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.42}$$

である。一方、

$$T_{m+1}(x) = \cos[(m+1)\arccos(x)] \tag{2.43}$$
$$T_{m-1}(x) = \cos[(m-1)\arccos(x)] \tag{2.44}$$

ゆえ

$$T_{m+1}(x) - T_{m-1}(x) = -2\sin[m \arccos(x)]\sin[\arccos(x)] = -2\sin[m \arccos(x)]\sqrt{1-x^2} \tag{2.45}$$

となるから、

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}T_m(x) = \frac{m}{2}[T_{m-1}(x) - T_{m+1}(x)] \tag{2.46}$$

が得られる。ただし、これが使えるのは $m \geq 1$ のときで　$m = 0$ のときは

$$\frac{dT_0}{dx} = 0 \tag{2.47}$$

である。

2 階微分も見ておこう。式 (2.46) の両辺をもう一度微分すると

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}T_m(x) - 2x\frac{d}{dx}T_m(x) = \frac{m}{2}\left[\frac{d}{dx}T_{m-1}(x) - \frac{d}{dx}T_{m+1}(x)\right] \tag{2.48}$$

となる。これにもう一度式 (2.46) を適用すると、

$$\begin{aligned}&(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}T_m(x) - m\frac{x}{1-x^2}[T_{m-1}(x) - T_{m+1}(x)] \\ &\quad= \frac{m}{4(1-x^2)}\left[(m-1)\{T_{m-2}(x) - T_m(x)\} - (m+1)\{T_m(x) - T_{m+2}(x)\}\right]\end{aligned} \tag{2.49}$$

となり、整理すると

$$\begin{aligned}&4(1-x^2)^2\frac{d^2}{dx^2}T_m(x) \\ &\quad= m\left[(m-1)T_{m-2}(x) + 4xT_{m-1}(x) - 2mT_m(x) - 4xT_{m+1}(x) + (m+1)T_{m+2}(x)\right]\end{aligned} \tag{2.50}$$

が得られる。ただし、これが使えるのは $m \geq 2$ のときで　$m = 0, 1$ のときは

$$\frac{d^2T_0}{dx^2} = 0 \tag{2.51}$$

$$\frac{d^2T_1}{dx^2} = 0 \tag{2.52}$$

である。

### 2.4.4　微分漸化式その２

$$T_{m+1} = \cos[(m+1)\theta] \tag{2.53}$$

$$T_{m-1} = \cos[(m-1)\theta] \tag{2.54}$$

$$x = \cos(\theta) \tag{2.55}$$

ゆえ、

$$\begin{aligned}\frac{1}{m+1}\frac{dT_{m+1}}{dx} - \frac{1}{m-1}\frac{dT_{m-1}}{dx} &= \frac{1}{\sin\theta}\left\{\sin[(m+1)\theta] - \sin[(m-1)\theta]\right\} \\ &= 2\cos(m\theta) \\ &= 2T_m\end{aligned} \tag{2.56}$$

が成立する。$m = 0, 1$ の項とともに整理して書くと

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{dT_1}{dx} \\ 2T_1 &= \frac{1}{2}\frac{dT_2}{dx} \\ 2T_m &= \frac{1}{m+1}\frac{dT_{m+1}}{dx} - \frac{1}{m-1}\frac{dT_{m-1}}{dx} \qquad (m \geq 2) \end{aligned} \tag{2.57}$$

となる。

あるいは、番号を一つずつずらすと

$$\frac{dT_m}{dx} = 2mT_{m-1} + \frac{m}{m-2}\frac{dT_{m-2}}{dx} \tag{2.58}$$

となる。

### 2.4.5 昇降演算子

漸化式 (2.22) と (2.46) から

$$T_{m-1}(x) = S_m^- T_m(x) = \left[x + \frac{1}{m}(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] T_m(x) \tag{2.59}$$

$$T_{m+1}(x) = S_m^+ T_m(x) = \left[x - \frac{1}{m}(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] T_m(x) \tag{2.60}$$

が得られる。

### 2.4.6 積分漸化式

微分漸化式 (2.57) を一度不定積分すると

$$\int T_0(x)dx = T_1(x) + C \tag{2.61}$$

$$\int T_1(x) = \frac{1}{4}T_2(x) + C \tag{2.62}$$

$$\int T_m(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{T_{m+1}(x)}{m+1} - \frac{T_{m-1}(x)}{m-1}\right] + C \qquad (m \geq 2) \tag{2.63}$$

を得る。ただし、$C$ は積分定数である。漸化式 (2.22) を用いると、$m \geq 2$ として

$$\int T_m(x)dx = \frac{m}{m^2-1}T_{m+1}(x) - \frac{x}{m-1}T_m(x) + C \tag{2.64}$$

$$\int T_m(x)dx = \frac{x}{m+1}T_m(x) - \frac{m}{m^2-1}T_{m-1}(x) + C \tag{2.65}$$

とも書き直すことができる。

全領域での定積分は、$m = 0, 1$ のとき

$$\int T_0(x)dx = T_1(1) - T_1(-1) = 2 \tag{2.66}$$

$$\int T_1(x) = \frac{1}{4}(T_2(1) - T_2(-1)) = 0 \tag{2.67}$$

$m \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} T_m(x)dx &= \frac{1}{2}\left[\frac{T_{m+1}(1) - T_{m+1}(-1)}{m+1} - \frac{T_{m-1}(1) - T_{m-1}(-1)}{m-1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{1-(-1)^{m-1}}{m-1}\right] \\ &= -[1-(-1)^{m+1}]\frac{1}{m^2-1} \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{m^2-1} & (\text{even } m) \\ 0 & (\text{odd } m) \end{cases}\end{aligned} \tag{2.68}$$

となる。

## 2.5 チェビシェフ展開

### 2.5.1 チェビシェフ展開と展開係数

チェビシェフ多項式は直交多項式なので、$-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $F(x)$ を展開することができる[*3]。

$$F(x) = \frac{1}{2}\tilde{f}_0 T_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m T_m(x) \tag{2.69}$$

直交性を使うと、展開係数は

$$\tilde{f}_m = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} F(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.70}$$

と書くことができる。展開係数の積分で $x = \cos\theta$ により変数変換を行うと、

$$\tilde{f}_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(\cos\theta)T_m(\cos\theta)d\theta \tag{2.71}$$

と書くこともできる。

### 2.5.2 チェビシェフ多項式の微分のチェビシェフ展開

チェビシェフ展開もしくは補間を使った数値計算をするときには、チェビシェフ多項式の微分のチェビシェフ展開が必要になる。それを求めておく。

[*3] 厳密に言えば、完全性を示さないといけないが、省略する。

まずは 1 階微分から。

$$
\begin{aligned}
\frac{dT_n(x)}{dx} &= \frac{d\theta}{dx}\frac{dT_n(\cos\theta)}{d\theta} \\
&= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\cos(n\theta)}{d\theta} \\
&= \frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta} \\
&= n\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} \\
&= n\left[e^{i(n-1)\theta}+e^{i(n-3)\theta}+\cdots+e^{-i(n-3)\theta}+e^{-i(n-1)\theta}\right] \\
&= \begin{cases} 2n\left[\cos(n-1)\theta+\cos(n-3)\theta+\cdots+\cos\theta\right] & (\text{even } n) \\ 2n\left[\cos(n-1)\theta+\cos(n-3)\theta+\cdots+\cos\theta+\frac{1}{2}\right] & (\text{odd } n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2n\left[T_{n-1}(x)+T_{n-3}(x)+\cdots+T_1(x)\right] & (\text{even } n) \\ 2n\left[T_{n-1}(x)+T_{n-3}(x)+\cdots+T_1(x)+\frac{1}{2}T_0(x)\right] & (\text{odd } n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2n\sum_{j=1,\text{odd}}^{n-1}T_j(x) & (\text{even } n) \\ 2n\left[\sum_{j=2,\text{even}}^{n-1}T_j(x)+\frac{1}{2}T_0(x)\right] & (\text{odd } n) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

次に、2 階微分は以下のようになる。$T_0$ が定数であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2T_n}{dx^2} &= \begin{cases} 2n\sum_{j=1,\text{odd}}^{n-1}\frac{dT_j(x)}{dx} & (\text{even } n) \\ 2n\sum_{j=2,\text{even}}^{n-1}\frac{dT_j(x)}{dx} & (\text{odd } n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2n\sum_{j=1,\text{odd}}^{n-1}2j\left[\sum_{k=2,\text{even}}^{j-1}T_k(x)+\frac{1}{2}T_0(x)\right] & (\text{even } n) \\ 2n\sum_{j=2,\text{even}}^{n-1}2j\sum_{k=1,\text{odd}}^{j-1}T_k(x) & (\text{odd } n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 4n\left[\sum_{k=2,\text{even}}^{n-2}\sum_{j=k+1,\text{odd}}^{n-1}jT_k(x)+\sum_{j=1,\text{odd}}^{n-1}\frac{j}{2}T_0(x)\right] & (\text{even } n) \\ 4n\sum_{k=1,\text{odd}}^{n-2}\sum_{j=k+1,\text{even}}^{n-1}jT_k(x) & (\text{odd } n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 4n\left[\sum_{k=2,\text{even}}^{n-2}\frac{n^2-k^2}{4}T_k(x)+\frac{n^2}{8}T_0(x)\right] & (\text{even } n) \\ 4n\sum_{k=1,\text{odd}}^{n-2}\frac{n^2-k^2}{4}T_k(x) & (\text{odd } n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} n\left[\sum_{k=2,\text{even}}^{n-2}(n^2-k^2)T_k(x)+\frac{n^2}{2}T_0(x)\right] & (\text{even } n) \\ n\sum_{k=1,\text{odd}}^{n-2}(n^2-k^2)T_k(x) & (\text{odd } n) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

となる。

## 2.6 チェビシェフ補間

チェビシェフ多項式を使って補間を行うことを考える。多項式補間ということは Lagrange 補間の一種なのだが、とくにチェビシェフ補間というときは、標本点 sampling points（選点 collocation points）として、チェビシェフ多項式の零点 (Gauss 選点) もしくはチェビシェフ多項式の微分の零点 (Gauss-Lobatto 選点) を用いる。Gauss 選点と Gauss-Lobatto 選点を比べると、Gauss-Lobatto 選点は両端の点を含んでいるのが利点である。

チェビシェフ補間には、有限区間の関数の近似として以下の 2 つの優れた特徴がある。

- 両端付近で近似が悪くならない。近似誤差が区間全体で満遍なく同程度になるほぼ minimax 近似になっている。
  - 等間隔の標本点を使う Lagrange 補間では Runge の現象が起きて、端付近で補間関数が暴れてしまいがちだが、チェビシェフ補間では端の方が密な標本点を使うことによって、それが抑えられる。
  - フーリエ級数展開では両端で Gibbs の現象が起きて、端付近で級数が暴れてしまいがちである。たとえ両端で値が同じになるような関数をフーリエ級数展開しても、有限項だと自動的に両端で 2 階微分も 0 になってしまう。このため、両端で値は 0 だが 2 階微分が 0 でないような関数をフーリエ級数展開すると、やはり端付近で精度が悪くなる。チェビシェフ補間は多項式補間なので、このようなことはない。
- 選点上ではチェビシェフ多項式が位相が等間隔の三角関数になるので、展開係数を決めるのに FFT が使える。

### 2.6.1 Chebyshev-Gauss 補間

#### 2.6.1.1 Gauss 選点直交性

$N$ 次のチェビシェフ多項式

$$T_N = \cos(N\theta) \tag{2.74}$$
$$x = \cos\theta \tag{2.75}$$

の零点を Gauss 選点 (Chebyshev-Gauss grid points) という。それらは、$k = 1, \ldots, N$ として、

$$\theta_k = \frac{2N - 2k + 1}{2N}\pi \tag{2.76}$$
$$x_k = \cos\left(\frac{2N - 2k + 1}{2N}\pi\right) \tag{2.77}$$

の $N$ 個の点である。これらの点は $\theta \in [\pi, 0]$ について等間隔である。

$m$ 次のチェビシェフ多項式 $(0 \le m \le N - 1)$ においては、

$$T_m = \cos(m\theta) \tag{2.78}$$
$$x = \cos\theta \tag{2.79}$$

ゆえ、Gauss 選点で

$$T_m(x_k) = \cos\left(m\frac{2N - 2k + 1}{2N}\pi\right) \tag{2.80}$$

ということになる。

選点直交性とは、$0 \le n, m \le N - 1$ として、

$$\sum_{k=1}^{N} T_m(x_k)T_n(x_k) = \begin{cases} N & (n = m = 0) \\ (N/2) & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{2.81}$$

となる性質のことである。実際に左辺を計算することでこの性質を示す。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} T_m(x_k)T_n(x_k) &= \sum_{k=1}^{N} \cos\left(m\frac{2N-2k+1}{2N}\pi\right)\cos\left(n\frac{2N-2k+1}{2N}\pi\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\cos\left((m+n)\frac{2N-2k+1}{2N}\pi\right)\right. \\ &\quad \left. +\cos\left((m-n)\frac{2N-2k+1}{2N}\pi\right)\right]\end{aligned} \tag{2.82}$$

ここで、このような cosine の和がどうなるかを考える。$l$ を整数で $1 < l < 2N$ とすると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\cos\left(l\frac{2N-2k+1}{2N}\pi\right) &= \sum_{k=1}^{N}\cos\left(l\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N}\Re\exp\left(il\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \\ &= \Re\sum_{k=1}^{N}\exp\left(il\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \\ &= \Re e^{i(l/2N)\pi}\frac{1-e^{il\pi}}{1-e^{i(l/N)\pi}} \\ &= -\Re\frac{1-(-1)^l}{e^{i(l/2N)\pi}-e^{-i(l/2N)\pi}} \\ &= [1-(-1)^l]\Re\frac{i}{2}\frac{1}{\sin((l/2N)\pi)} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.83}$$

となるので、cosine の和は、$l = 0$ すなわち $n = m$ のところ以外では 0 となることがわかる。そこで、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} T_m(x_k)T_n(x_k) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\cos\left((m+n)\frac{2N-2k+1}{2N}\pi\right)\right. \\ &\quad \left. +\cos\left((m-n)\frac{2N-2k+1}{2N}\pi\right)\right] \\ &= \begin{cases} N & (n=m=0) \\ (N/2) & (n=m\neq 0) \\ 0 & (n\neq m)\end{cases}\end{aligned} \tag{2.84}$$

となる。

#### 2.6.1.2 Chebyshev-Gauss 補間公式

$-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $F(x)$ をチェビシェフ多項式で補間することを考える。補間多項式を

$$F_N(x) = \frac{1}{2}f_0T_0(x) + \sum_{m=1}^{N-1} f_mT_m(x) \tag{2.85}$$

とし、Gauss 選点 $x_k$ $(k=1,\ldots,N)$ で

$$F_N(x_k)=F(x_k) \tag{2.86}$$

となることを要請する。すなわち、

$$F(x_k)=\frac{1}{2}f_0T_0(x_k)+\sum_{m=1}^{N-1}f_mT_m(x_k) \tag{2.87}$$

とする。選点直交性を用いて $f_m$ を決めると

$$f_m=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}F(x_k)T_m(x_k) \tag{2.88}$$

となる。これは FFT を用いて計算できる。

#### 2.6.1.3 Chebyshev 展開との関係

チェビシェフ展開の展開係数

$$\tilde{f}_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(\cos\theta)T_m(\cos\theta)d\theta \tag{2.89}$$

を Gauss 選点で短冊公式を使って数値計算することを考える。

$$\tilde{f}_m\approx\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}F(\cos\theta_k)T_m(\cos\theta_k)\Delta\theta \tag{2.90}$$

Gauss 選点は $\theta$ について等間隔で

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{N} \tag{2.91}$$

ゆえ、

$$\tilde{f}_m\approx\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}F(x_k)T_m(x_k) \tag{2.92}$$

となり、上のチェビシェフ補間の公式と一致する。

### 2.6.2 Chebyshev-Gauss-Lobatto 補間

#### 2.6.2.1 Gauss-Lobatto 選点直交性

$N-1$ 次のチェビシェフ多項式

$$T_{N-1}=\cos[(N-1)\theta] \tag{2.93}$$
$$x=\cos\theta \tag{2.94}$$

が極値を取る点、もしくはその 1 階微分

$$\sqrt{1-x^2}\frac{dT_{N-1}}{dx}=\sqrt{1-x^2}\frac{d\theta}{dx}\frac{dT_{N-1}}{d\theta}=(N-1)\sin[(N-1)\theta] \tag{2.95}$$

の零点を Gauss-Lobatto 選点 (Chebyshev-Gauss-Lobatto grid points) という。それらは、$k = 1, \ldots, N$ として、

$$\theta_k = \frac{N-k}{N-1}\pi \tag{2.96}$$

$$x_k = \cos\left(\frac{N-k}{N-1}\pi\right) \tag{2.97}$$

の $N$ 個の点である。これらの点は $\theta \in [\pi, 0]$ について等間隔であり、このとき

$$T_{N-1}(x_k) = \cos[(N-k)\pi] = (-1)^{N-k} \tag{2.98}$$

である。

$m$ 次のチェビシェフ多項式 $(0 \leq m \leq N-1)$ においては、

$$T_m = \cos(m\theta) \tag{2.99}$$

$$x = \cos\theta \tag{2.100}$$

ゆえ、Gauss-Lobatto 選点で

$$T_m(x_k) = \cos\left(m\frac{N-k}{N-1}\pi\right) \tag{2.101}$$

ということになる。

選点直交性とは、$0 \leq n, m \leq N-1$ として、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}T_m(x_1)T_n(x_1) + \sum_{k=2}^{N-1} T_m(x_k)T_n(x_k) + \frac{1}{2}T_m(x_N)T_n(x_N) \\
&= \begin{cases} N-1 & (n = m = 0, N-1) \\ (N-1)/2 & (n = m \neq 0, N-1) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.102}$$

となる性質のことである。実際に左辺を計算することでこの性質を示す。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}T_m(x_1)T_n(x_1) + \sum_{k=2}^{N-1} T_m(x_k)T_n(x_k) + \frac{1}{2}T_m(x_N)T_n(x_N) \\
&= \frac{1}{2}T_m(-1)T_n(-1) + \sum_{k=2}^{N-1} \cos\left(m\frac{N-k}{N-1}\pi\right)\cos\left(n\frac{N-k}{N-1}\pi\right) + \frac{1}{2}T_m(1)T_n(1)
\end{aligned} \tag{2.103}$$

ここで、$(m+n)$ が偶数の場合と奇数の場合に分けて考える必要がある。$(m+n)$ が奇数の時は

$T_m(-1)T_n(-1) = -1$、$T_m(1)T_n(1) = 1$ となるので、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}T_m(x_1)T_n(x_1) + \sum_{k=2}^{N-1} T_m(x_k)T_n(x_k) + \frac{1}{2}T_m(x_N)T_n(x_N) \\
&\quad= \sum_{k=2}^{N-1} \cos\left(m\frac{N-k}{N-1}\pi\right)\cos\left(n\frac{N-k}{N-1}\pi\right) \\
&\quad= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N-1}\left[\cos\left((m+n)\frac{N-k}{N-1}\pi\right) + \cos\left((m-n)\frac{N-k}{N-1}\pi\right)\right] \\
&\quad= 0
\end{aligned} \tag{2.104}$$

となる。最後が 0 となるのは、正負打ち消しあう数のペアがでてくるためである。それは、$l$ を奇数とすると、$k$ と $N-k+1$ のところを足し合わせたとき

$$\begin{aligned}
&\cos\left(l\frac{N-k}{N-1}\pi\right) + \cos\left(l\frac{N-(N-k+1)}{N-1}\pi\right) \\
&\quad= \cos\left(l\pi - l\frac{k-1}{N-1}\pi\right) + \cos\left(l\frac{k-1}{N-1}\pi\right) \\
&\quad= [\cos(l\pi)+1]\cos\left(l\frac{k-1}{N-1}\pi\right) \\
&\quad= [(-1)^l+1]\cos\left(l\frac{k-1}{N-1}\pi\right) \\
&\quad= 0
\end{aligned} \tag{2.105}$$

となることからわかる。$N$ が奇数の時はペアにならない項 $k = (N+1)/2$ が出てくるが、この項も

$$\cos\left(l\frac{N-(N+1)/2}{N-1}\pi\right) = \cos\left(\frac{l}{2}\pi\right) = 0 \tag{2.106}$$

となる ($l$ は奇数)。$(m+n)$ が偶数の時は $T_m(-1)T_n(-1) = T_m(1)T_n(1) = 1$ となるので、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}T_m(x_1)T_n(x_1) + \sum_{k=2}^{N-1} T_m(x_k)T_n(x_k) + \frac{1}{2}T_m(x_N)T_n(x_N) \\
&\quad= \sum_{k=2}^{N} \cos\left(m\frac{N-k}{N-1}\pi\right)\cos\left(n\frac{N-k}{N-1}\pi\right) \\
&\quad= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N}\left[\cos\left((m+n)\frac{N-k}{N-1}\pi\right) + \cos\left((m-n)\frac{N-k}{N-1}\pi\right)\right] \\
&\quad= \begin{cases} N-1 & (n=m=0, N-1) \\ (N-1)/2 & (n=m\neq 0, N-1) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.107}$$

となる。cosine の和が 0 になる理由は $l$ を偶数で $1 < l < 2(N-1)$ とすると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} \cos\left(l\frac{N-k}{N-1}\pi\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(l\frac{k}{N-1}\pi\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \Re\exp\left(il\frac{k}{N-1}\pi\right) \\ &= \Re\sum_{k=0}^{N-2} \exp\left(il\frac{k}{N-1}\pi\right) \\ &= \Re\frac{1-e^{il\pi}}{1-e^{i[l/(N-1)]\pi}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.108}$$

となるからである。こうしてみると、$k=1$ と $k=N$ のところの和に最初から 1/2 をかけておいてある理由がわかる。それは、$l$ が偶数の時、$e^{il\theta_1}$ と $e^{il\theta_N}$ がどちらも 1 になるために、1/2 をかけておかないと 2 重に足してしまうからである。 2 重に足すのを避けて、たとえば最初から $k=2$ から $k=N$ までの和を取ることにすると、今度は $(m+n)$ が奇数の時が困ってしまう。ということで、$(m+n)$ が偶数の時と奇数の時の両方が都合が良いように $k=1$ と $k=N$ のところの和に最初から 1/2 をかけておいたのである。

#### 2.6.2.2 Chebyshev-Gauss-Lobatto 補間公式

$-1 \le x \le 1$ で定義された関数 $F(x)$ をチェビシェフ多項式で補間することを考える。補間多項式を

$$F_N(x) = \frac{1}{2}f_0T_0(x) + \sum_{m=1}^{N-2} f_mT_m(x) + \frac{1}{2}f_{N-1}T_{N-1}(x) \tag{2.109}$$

とし、Gauss-Lobatto 選点 $x_k$ $(k=1,\dots,N)$ で

$$F_N(x_k) = F(x_k) \tag{2.110}$$

となることを要請する。すなわち、

$$F(x_k) = \frac{1}{2}f_0T_0(x_k) + \sum_{m=1}^{N-2} f_mT_m(x_k) + \frac{1}{2}f_{N-1}T_{N-1}(x_k) \tag{2.111}$$

とする。選点直交性を用いて $f_m$ を決めると

$$f_m = \frac{2}{N-1}\left[\frac{1}{2}F(x_1)T_m(x_1) + \sum_{k=2}^{N-1} F(x_k)T_m(x_k) + \frac{1}{2}F(x_N)T_m(x_N)\right] \tag{2.112}$$

となる。これは FFT を用いて計算できる。

#### 2.6.2.3 Chebyshev 展開との関係

チェビシェフ展開の展開係数

$$\tilde{f}_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(\cos\theta)T_m(\cos\theta)d\theta \tag{2.113}$$

を Gauss-Lobatto 選点で台形公式を使って数値計算することを考える。Gauss 選点は両端を含まないので、短冊公式が相応しいが、Gauss-Lobatto 選点は両端を含むので台形公式が相応しい。

$$\tilde{f}_m \approx \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} F(\cos\theta_k)T_m(\cos\theta_k)\Delta\theta \tag{2.114}$$

Gauss-Lobatto 選点は $\theta$ について等間隔で

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{N-1} \tag{2.115}$$

ゆえ、

$$\tilde{f}_m \approx \frac{2}{N-1}\left[\frac{1}{2}F(-1)T_m(-1) + \sum_{k=2}^{N-1} F(x_k)T_m(x_k) + \frac{1}{2}F(1)T_m(1)\right] \tag{2.116}$$

となり、上のチェビシェフ補間の公式と一致する。ただし、チェビシェフ展開をある次数で打ち切りにするときは、ふつうは

$$F(x) \approx \frac{1}{2}\tilde{f}_0 T_0(x) + \sum_{m=1}^{N-1}\tilde{f}_m T_m(x) \tag{2.117}$$

とするので、チェビシェフ補間の式と最後の項 $(m = N-1)$ が $(1/2)$ 倍の分だけちがってくる。

## 2.7 チェビシェフ展開もしくはチェビシェフ補間に対する操作

### 2.7.1 一般の区間 $[z_b, z_t]$ での展開や補間

関数 $F(z)$ の定義域が $[z_b, z_t]$ であるとする。このときは、

$$z = z_b + \frac{z_t - z_b}{2}(1+x) \tag{2.118}$$

$$x = 2\frac{z - z_b}{z_t - z_b} - 1 \tag{2.119}$$

で $z$ から $x$ に変数変換すれば、$x$ は $[-1, 1]$ の区間の変数になっているから、$F(x)$ に対して上で求めたチェビシェフ展開やチェビシェフ補間の式を使うことができる。

### 2.7.2 チェビシェフ展開の微分のチェビシェフ展開

微分方程式をチェビシェフ展開で数値的に解こうとすると、チェビシェフ展開の微分をチェビシェフ展開する必要がある。

#### 2.7.2.1 チェビシェフ多項式の微分のチェビシェフ展開を利用する方法

2.5.2 節で求めたチェビシェフ多項式の微分のチェビシェフ展開を利用する。関数 $F(x)$ が

$$F(x) = \frac{1}{2}\tilde{f}_0 T_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m T_m(x) \tag{2.120}$$

と展開されているものとする。

まずは 1 階微分から。チェビシェフ多項式の一階微分のチェビシェフ展開 (2.72)

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = \begin{cases} 2n \sum_{j=1,\mathrm{odd}}^{n-1} T_j(x) & (\text{even } n) \\ 2n \left[\sum_{j=2,\mathrm{even}}^{n-1} T_j(x) + \frac{1}{2}T_0(x)\right] & (\text{odd } n) \end{cases} \tag{2.121}$$

を利用すると、$F(x)$ の 1 階微分は以下のようになる。$T_0$ は定数なので、

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dx} &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m \frac{dT_m(x)}{dx} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n-1} \frac{dT_{2n-1}(x)}{dx} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n} \frac{dT_{2n}(x)}{dx} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n-1} 2(2n-1) \left[\sum_{j=1}^{n-1} T_{2j}(x) + \frac{1}{2}T_0(x)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n} 4n \sum_{j=1}^{n} T_{2j-1}(x) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\tilde{f}_{2n-1}\right) T_0(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=j}^{\infty} 4n\tilde{f}_{2n}\right) T_{2j-1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=j+1}^{\infty} 2(2n-1)\tilde{f}_{2n-1}\right) T_{2j}(x) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\tilde{f}_{2n-1}\right) T_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2(j+2n-1)\tilde{f}_{j+2n-1}\right) T_j(x)
\end{aligned} \tag{2.122}$$

となる。そこで、今改めて

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{1}{2}\widetilde{(df)}_0 T_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{(df)}_m T_m(x) \tag{2.123}$$

と置けば、

$$\widetilde{(df)}_m = 2\sum_{n=1}^{\infty} (m+2n-1)\tilde{f}_{m+2n-1} \tag{2.124}$$

となる。

ついでに、これから

$$\begin{aligned}\widetilde{(df)}_m &= \sum_{n=2}^{\infty} 2(m+2n-1)\tilde{f}_{m+2n-1} + 2(m+1)\tilde{f}_{m+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2(m+2+2n-1)\tilde{f}_{m+2+2n-1} + 2(m+1)\tilde{f}_{m+1} \\ &= \widetilde{(df)}_{m+2} + 2(m+1)\tilde{f}_{m+1}\end{aligned} \tag{2.125}$$

という漸化式ができることもわかる。この漸化式は展開が有限項で打ち切られている数値計算で有用である。というのも、$m$ が大きい方から小さい方へと順繰りに求めていけば良いからである。この漸化式は、次の 2.7.2.2 節では別の方法で導く。

次に、2 階微分は以下のようになる。チェビシェフ多項式の 2 階微分のチェビシェフ展開 (2.73)

$$\frac{d^2T_n}{dx^2} = \begin{cases} n\left[\sum_{k=2,\mathrm{even}}^{n-2}(n^2-k^2)T_k(x) + \frac{n^2}{2}T_0(x)\right] & (\text{even } n) \\ n\sum_{k=1,\mathrm{odd}}^{n-2}(n^2-k^2)T_k(x) & (\text{odd } n) \end{cases} \tag{2.126}$$

を利用すると、$F(x)$ の 2 階微分は以下のようになる。$T_0$ は定数なので、

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2F}{dx^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m \frac{d^2T_m(x)}{dx^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n-1} \frac{d^2T_{2n-1}(x)}{dx^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n} \frac{dT^2_{2n}(x)}{dx^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n-1}(2n-1) \sum_{j=1}^{n-1} \{(2n-1)^2 - (2j-1)^2\} T_{2j-1}(x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n} 2n \left[ \sum_{j=1}^{n-1} \{(2n)^2 - (2j)^2\} T_{2j}(x) + 2n^2 T_0(x) \right] \\
&= \left( \sum_{n=1}^{\infty} 4n^3 \tilde{f}_{2n} \right) T_0(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=j+1}^{\infty} (2n-1)\{(2n-1)^2 - (2j-1)^2\} \tilde{f}_{2n-1} \right] T_{2j-1}(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=j+1}^{\infty} 2n\{(2n)^2 - (2j)^2\} \tilde{f}_{2n} \right] T_{2j}(x) \\
&= \left( \sum_{n=1}^{\infty} 4n^3 \tilde{f}_{2n} \right) T_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{n=j+2, n-j \text{ even}}^{\infty} n(n^2 - j^2) \tilde{f}_n \right) T_j(x) \\
&= \left( \sum_{n=1}^{\infty} 4n^3 \tilde{f}_{2n} \right) T_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (j+2n)[(j+2n)^2 - j^2] \tilde{f}_{j+2n} \right) T_j(x) \\
&= \left( 4\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \tilde{f}_{2n} \right) T_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( 4\sum_{n=1}^{\infty} n(j+n)(j+2n) \tilde{f}_{j+2n} \right) T_j(x)
\end{aligned}
\tag{2.127}
$$

となる。そこで、今改めて

$$
\frac{d^2F}{dx^2}(x) = \frac{1}{2}\widetilde{(ddf)}_0 T_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{(ddf)}_m T_m(x) \tag{2.128}
$$

と置けば、

$$
\widetilde{(ddf)}_m = 4\sum_{n=1}^{\infty} n(m+n)(m+2n) \tilde{f}_{m+2n} \tag{2.129}
$$

となる。

#### 2.7.2.2　漸化式を用いる方法

以前に得られた漸化式 (2.57)

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \frac{dT_1}{dx} \\
2T_1 &= \frac{1}{2}\frac{dT_2}{dx} \\
2T_m &= \frac{1}{m+1}\frac{dT_{m+1}}{dx} - \frac{1}{m-1}\frac{dT_{m-1}}{dx} \qquad (m \geq 2)
\end{aligned} \tag{2.130}
$$

を用いることを考えよう。

任意の関数 $F(x)$（ただし、$-1 \leq x \leq 1$）とその微分が

$$
F(x) = \frac{1}{2}\tilde{f}_0 T_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m T_m(x) \tag{2.131}
$$

$$
\frac{dF}{dx}(x) = \frac{1}{2}\widetilde{(df)}_0 T_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{(df)}_m T_m(x) \tag{2.132}
$$

と展開されているものする。$T_0$ は定数なので、式 (2.131) を微分すると

$$
\frac{dF(x)}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m \frac{dT_m}{dx} \tag{2.133}
$$

となる一方、式 (2.132) に上の漸化式を適用すると

$$
\begin{aligned}
\frac{dF}{dx}(x) &= \frac{1}{2}\left[\widetilde{(df)}_0\frac{dT_1}{dx} + \frac{1}{2}\widetilde{(df)}_1\frac{dT_2}{dx} + \sum_{m=2}^{\infty}\widetilde{(df)}_m\left\{\frac{1}{m+1}\frac{dT_{m+1}}{dx} - \frac{1}{m-1}\frac{dT_{m-1}}{dx}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\widetilde{(df)}_0\frac{dT_1}{dx} + \frac{1}{2}\widetilde{(df)}_1\frac{dT_2}{dx} + \sum_{m=3}^{\infty}\widetilde{(df)}_{m-1}\frac{1}{m}\frac{dT_m}{dx} - \sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{(df)}_{m+1}\frac{1}{m}\frac{dT_m}{dx}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\widetilde{(df)}_{m-1} - \widetilde{(df)}_{m+1}\right]\frac{dT_m}{dx}
\end{aligned} \tag{2.134}
$$

となる。式 (2.133) と (2.134) により、

$$
\tilde{f}_m = \frac{1}{2m}\left[\widetilde{(df)}_{m-1} - \widetilde{(df)}_{m+1}\right] \tag{2.135}
$$

を得る。$m$ を一つずらして漸化式の形にすれば、

$$
\widetilde{(df)}_m = \widetilde{(df)}_{m+2} + 2(m+1)\tilde{f}_{m+1} \tag{2.136}
$$

と書き直すこともできる。これが先に得られた漸化式である。

## 2.8 線型偏微分方程式の解き方〜ディリクレ境界条件拡散方程式の例

チェビシェフ多項式を用いて線型偏微分方程式を解くやり方を見てゆく。例として拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.137}$$

を考える。$x$ の範囲は $[-1, 1]$ で、境界条件はディリクレ型で

$$u(-1, t) = u_b \tag{2.138}$$

$$u(1, t) = u_t \tag{2.139}$$

とする。

大きく分けると、チェビシェフ展開に基づくものと、選点法（チェビシェフ補間に基づく）に分けられる。

### 2.8.1 Chebyshev 展開に基づく方法〜タウ法

$u$ をチェビシェフ展開しておいて、拡散方程式 (2.137) に代入する。チェビシェフ関数の直交性から、両辺の展開係数が等しくなければならないので、２階微分の展開係数の表式 (2.129) を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}_m}{dt} &= \widetilde{ddu}_m \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty} n(m+n)(m+2n)\tilde{u}_{m+2n}\end{aligned} \tag{2.140}$$

となる。ただし、境界条件から

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tilde{u}_n = u_b \tag{2.141}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{u}_n = u_t \tag{2.142}$$

という制約が付く。

数値計算をするときは $n$ は有限の範囲にとどめないといけない。打ち切り次数を $N$ とすると $(0 \le n \le N)$、拡散方程式は $0 \le m \le N-2$ で

$$\frac{d\tilde{u}_m}{dt} = 4\sum_{n=1}^{\lfloor (N-m)/2 \rfloor} n(m+n)(m+2n)\tilde{u}_{m+2n} \tag{2.143}$$

と満たしておき（ただし、$\lfloor \alpha \rfloor$ は $\alpha$ の整数部分)、残りの 2 つの式で境界条件を満たすようにする。

$$\tilde{u}_N - \tilde{u}_{N-1} = (-1)^N \left[ u_b - \sum_{n=0}^{N-2} (-1)^n \tilde{u}_n \right] \tag{2.144}$$

$$\tilde{u}_N + \tilde{u}_{N-1} = u_t - \sum_{n=0}^{N-2} \tilde{u}_n \tag{2.145}$$

これがタウ法の考え方である。なお、境界条件は $N$ の偶奇に応じて以下のように書き換えることができる。$N$ が偶数の時は

$$\tilde{u}_{N-1} = \frac{u_t - u_b}{2} - \sum_{n=1,\mathrm{odd}}^{N-3} \tilde{u}_n \tag{2.146}$$

$$\tilde{u}_N = \frac{u_t + u_b}{2} + \sum_{n=0,\mathrm{even}}^{N-2} \tilde{u}_n \tag{2.147}$$

$N$ が奇数の時は

$$\tilde{u}_{N-1} = \frac{u_t + u_b}{2} - \sum_{n=1,\mathrm{even}}^{N-3} \tilde{u}_n \tag{2.148}$$

$$\tilde{u}_N = \frac{u_t - u_b}{2} + \sum_{n=0,\mathrm{odd}}^{N-2} \tilde{u}_n \tag{2.149}$$

となる。

### 2.8.2 Chebyshev-Gauss-Lobatto 選点法

選点法では、選点上でのみ方程式が成り立つことを要請する。この場合は、常に実空間でものごとを考える。ここではディリクレ条件と調和するように Gauss-Lobatto 選点

$$\theta_k = \frac{N-k}{N-1}\pi \tag{2.150}$$

$$x_k = \cos\left(\frac{N-k}{N-1}\pi\right) \tag{2.151}$$

$(k = 1, \ldots, N)$ を用いる。選点でのチェビシェフ多項式やその微分の値

$$T_{m;k} \equiv T_m(x_k) \tag{2.152}$$

$$T''_{m;k} \equiv \frac{d^2 T_m}{dx^2}(x_k) \tag{2.153}$$

は予め計算してあるものとする。選点における求める補間関数 $u_N$ の値とその微分は

$$u_N(x_k,t) = \frac{1}{2}T_{0;k}u_0(t) + \sum_{m=1}^{N-2} T_{m;k}u_m(t) + \frac{1}{2}T_{N-1;k}u_{N-1}(t) \tag{2.154}$$

$$\frac{d^2u_N}{dx^2}(x_k,t) = \frac{1}{2}T''_{0;k}u_0(t) + \sum_{m=1}^{N-2} T''_{m;k}u_m(t) + \frac{1}{2}T''_{N-1;k}u_{N-1}(t) \tag{2.155}$$

であるから、これを拡散方程式 (2.137) に代入する。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}T_{0;k}\frac{du_0}{dt}(t) + \sum_{m=1}^{N-2} T_{m;k}\frac{du_m}{dt}(t) + \frac{1}{2}T_{N-1;k}\frac{du_{N-1}}{dt}(t) \\
&= \frac{1}{2}T''_{0;k}u_0(t) + \sum_{m=1}^{N-2} T''_{m;k}u_m(t) + \frac{1}{2}T''_{N-1;k}u_{N-1}(t)
\end{aligned} \tag{2.156}$$

これが $k = 2,\dots,N-1$ について成り立っているものとして解く。$k = 1, N$ に関しては境界条件より、

$$\frac{1}{2}T_{0;1}u_0(t) + \sum_{m=1}^{N-2} T_{m;1}u_m(t) + \frac{1}{2}T_{N-1;1}u_{N-1}(t) = u_b \tag{2.157}$$

$$\frac{1}{2}T_{0;N}u_0(t) + \sum_{m=1}^{N-2} T_{m;N}u_m(t) + \frac{1}{2}T_{N-1;N}u_{N-1}(t) = u_t \tag{2.158}$$

が成り立つようにする。時間積分の時には左辺を行列かける未知ベクトル $(u_m(t+\Delta t))$ の形に書いて、その行列の逆行列をかけて解けばよい。逆行列は予め計算しておけばよい。

たとえば、一番単純に Euler 陽解法で解くならば、方程式の形は

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
\frac{1}{2}T_{0;1} & T_{1;1} & \dots & T_{N-2;1} & \frac{1}{2}T_{N-1;1} \\
\frac{1}{2}T_{0;2} & T_{1;2} & \dots & T_{N-2;2} & \frac{1}{2}T_{N-1;2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2}T_{0;N-1} & T_{1;N-1} & \dots & T_{N-2;N-1} & \frac{1}{2}T_{N-1;N-1} \\
\frac{1}{2}T_{0;N} & T_{1;N} & \dots & T_{N-2;N} & \frac{1}{2}T_{N-1;N}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_0(t+\Delta t) \\ u_1(t+\Delta t) \\ \vdots \\ u_{N-2}(t+\Delta t) \\ u_{N-1}(t+\Delta t)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
u_b \\ \mathrm{rhs}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{rhs}_{N-2} \\ u_t
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.159}$$

の形をしている。右辺の $\mathrm{rhs}_m$ は現在の時刻 $t$ での計算値 $(u_m(t))$ から計算できる値である。この場合は選点直交性から左辺の行列の逆行列は

$$\frac{2}{N-1}\begin{pmatrix}
\frac{1}{2}T_{0;1} & T_{0;2} & \dots & T_{0;N-1} & \frac{1}{2}T_{0;N} \\
\frac{1}{2}T_{1;1} & T_{1;2} & \dots & T_{1;N-1} & \frac{1}{2}T_{1;N} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2}T_{N-2;1} & T_{N-2;2} & \dots & T_{N-2;N-1} & \frac{1}{2}T_{N-2;N} \\
\frac{1}{2}T_{N-1;1} & T_{N-1;2} & \dots & T_{N-1;N-1} & \frac{1}{2}T_{N-1;N}
\end{pmatrix} \tag{2.160}$$

であることがわかるので、次の時間ステップは

$$
\begin{pmatrix} u_0(t+\Delta t) \\ u_1(t+\Delta t) \\ \vdots \\ u_{N-2}(t+\Delta t) \\ u_{N-1}(t+\Delta t) \end{pmatrix}
= \frac{2}{N-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T_{0;1} & T_{0;2} & \dots & T_{0;N-1} & \frac{1}{2}T_{0;N} \\ \frac{1}{2}T_{1;1} & T_{1;2} & \dots & T_{1;N-1} & \frac{1}{2}T_{1;N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}T_{N-2;1} & T_{N-2;2} & \dots & T_{N-2;N-1} & \frac{1}{2}T_{N-2;N} \\ \frac{1}{2}T_{N-1;1} & T_{N-1;2} & \dots & T_{N-1;N-1} & \frac{1}{2}T_{N-1;N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_b \\ \mathrm{rhs}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{rhs}_{N-2} \\ u_t \end{pmatrix} \tag{2.161}
$$

であるとわかる。陰解法で解く場合は、逆行列は数値計算で求めることになるが、いずれにせよ逆行列は予め計算しておけば良い。

## 2.9 参考文献


- Doman, Brian George Spencer (2016) *The Classical Orthogonal Polynomials*, World Scientific の 5 章
- Glatzmaier, Gary A. (2014) *Introduction to Modeling Convection in Planets and Stars*, Prenceton University Press の 9.4 節
- Gould, H.W. (2010) *Combinatorial Identities: Table III: Binomial Identities Derived from Trigonometric and Exponential Series* (ed., Jocelyn Quaintance), `https://www.math.wvu.edu/~gould/Vol.6.PDF`
- 石岡 圭一 (2004) スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版会 の第 5 章
- 森 正武 (1986) 講義「数値計算 I」のノート
- Protas, Bartosz (2004) *Topics in Numerical Analysis — Spectral Methods (III) — Chebyshev Spectral Methods*, `http://ms.mcmaster.ca/~bprotas/MATH745a/spectr_03.pdf`

# 第 3 章

# Gegenbauer 多項式

後述のように、Gegenbauer 多項式は Legendre 多項式と Chebyshev 多項式を一般化した多項式である。Gegenbauer 多項式は、Chandrasekhar (1981) の回転球内の熱対流の線形安定論 (§61) に出てくる。

## 3.1 直交多項式の Rodrigues 表示

２次式

$$X(\mu) = 1 - \mu^2 = (1-\mu)(1+\mu) \tag{3.1}$$

と重み函数

$$\rho_\alpha(\mu) = (1-\mu^2)^\alpha \tag{3.2}$$

に対して、$n$ 次多項式

$$F_n^\alpha(\mu) = \frac{1}{\rho_\alpha(\mu)} \frac{d^n}{d\mu^n}[\rho_\alpha(\mu) X(\mu)^n] \tag{3.3}$$

を考える（これが多項式であることの証明は略。形式的に素直に計算すればよい）。この形の表式を Rodrigues 表示という。

とくにすぐわかることは $n=0$ のとき

$$F_0^\alpha(\mu) = 1 \tag{3.4}$$

である。

まず、この多項式 $F_n^\alpha(\mu)$ が $[-1,1]$ で定義された任意の $n-1$ 次多項式 $\Pi_{n-1}(\mu)$ と直交することを示す。

$$\begin{aligned}
(F_n^\alpha, \Pi_{n-1}) &\equiv \int_{-1}^{1} \rho_\alpha(\mu) F_n^\alpha(\mu) \Pi_{n-1}(\mu) d\mu \\
&= \int_{-1}^{1} \Pi_{n-1}(\mu) \frac{d^n}{d\mu^n}[\rho_\alpha(\mu) X(\mu)^n] d\mu \\
&= \left[ \Pi_{n-1}(\mu) \frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}[\rho_\alpha(\mu) X(\mu)^n] \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \Pi'_{n-1}(\mu) \frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}[\rho_\alpha(\mu) X(\mu)^n] d\mu
\end{aligned} \tag{3.5}$$

第一項には $(1-\mu)(1+\mu)$ の因子が少なくとも一つはあるから、0 になる。このような部分積分を繰り返してゆくと、同様にして第一項に相当する項はいつも 0 になる。そこで、$n$ 回部分積分を繰り返すと、

$$(F_n^\alpha, \Pi_{n-1}) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \Pi_{n-1}^{(n)}(\mu)[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n]d\mu \tag{3.6}$$

が得られる。$n-1$ 次多項式 $\Pi_{n-1}(\mu)$ を $n$ 回微分すると 0 になるので、これは 0 になる。

$$(F_n^\alpha, \Pi_{n-1}) = 0 \tag{3.7}$$

$F_0^\alpha, F_1^\alpha, \ldots, F_{n-1}^\alpha$ はたかだか $n-1$ 次の多項式だから、

$$(F_n^\alpha, F_l^\alpha) = 0 \qquad l = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.8}$$

となり、したがって、

$$(F_l^\alpha, F_k^\alpha) \equiv \int_{-1}^{1} \rho_\alpha(\mu)F_l^\alpha(\mu)F_k^\alpha(\mu)d\mu = 0 \qquad l \neq k \tag{3.9}$$

となる。

逆に言えば、$F_n^\alpha$ は、$[-1,1]$ で以下のようにして作られた函数系である。$F_0^\alpha(\equiv 1)$ は定数。$F_1^\alpha$ は $F_0^\alpha$ と重み $\rho_\alpha$ に関して直交する 1 次式。以下、$F_n^\alpha$ は $F_0^\alpha, F_1^\alpha, \ldots, F_{n-1}^\alpha$ と重み $\rho_\alpha$ に関して直交する $n$ 次多項式。このようにすれば、定数倍を除いて $F_n^\alpha$ を $n$ が小さい方から順繰りに構成してゆくことができる。

後で使うので、$F_n^\alpha(1)$ の値を求めておく。

$$F_n^\alpha(1) = \lim_{\mu\to 1} \frac{1}{(1-\mu^2)^\alpha} \frac{d^n}{d\mu^n}[(1-\mu)^{n+\alpha}(1+\mu)^{n+\alpha}] \tag{3.10}$$

$\mu \to 1$ としたとき、微分のところで残る項は $(1-\mu)^{n+\alpha}$ を $n$ 回微分して $(1+\mu)^{n+\alpha}$ を掛けたものだから、

$$F_n^\alpha(1) = (-1)^n(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(\alpha+1)2^n = (-1)^n 2^n(\alpha+1)_n \tag{3.11}$$

となることがわかる。ここで Pochhammer 記号 $(\beta)_n$ は以下のように定義される。

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \tag{3.12}$$

## 3.2 Gegenbauer 多項式

Gegenbauer 多項式は上の $F_n^\alpha(\mu)$ と定数倍だけ異なり、以下のように定義される。

$$C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu) \equiv (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} F_n^\alpha(\mu) \tag{3.13}$$

書き換えると

$$C_n^\alpha(\mu) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(n+\alpha+1/2)} F_n^{\alpha-\frac{1}{2}}(\mu) \tag{3.14}$$

とも書ける。なぜこんな係数が付いたり $\alpha+1/2$ という添え字になったりするかは、後の節 3.6「母関数その 1 」を見るとわかる。

とくに $n=0$ とすると

$$C_0^\alpha(\mu)=1 \tag{3.15}$$

$\mu=1$ とすると、

$$C_n^\alpha(1)=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}=\frac{(2\alpha)_n}{n!} \tag{3.16}$$

となる。

また、とくに、上の添え字が正の整数 $(m)+1/2$ の時、

$$C_n^{m+\frac{1}{2}}(\mu)=(-1)^n\frac{1}{2^n n!}\frac{m!(n+2m)!}{(2m)!(n+m)!}\frac{1}{(1-\mu^2)^m}\frac{d^n}{d\mu^n}[(1-\mu^2)^{n+m}] \tag{3.17}$$

となる。$m=0$ ならば、これは Legendre 多項式である。

$$P_n(x)=C_n^{\frac{1}{2}}(\mu)=(-1)^n\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}[(1-\mu^2)^n] \tag{3.18}$$

Chandrasekhar (1981) §61 に出てくるのは $m=1$ の場合で、

$$C_n^{\frac{3}{2}}(\mu)=(-1)^n\frac{n+2}{2^{n+1}n!}\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{d^n}{d\mu^n}[(1-\mu^2)^{n+1}] \tag{3.19}$$

である。

また、第 1 種 Chebyshev 多項式は上の添え字が 0 の時の Gegenbauer 多項式に近いが、このときは $\Gamma(0)$ が定義できないので、代わりに

$$\begin{aligned}
T_n(\mu)(\sim C_n^0(\mu)) &\equiv (-1)^n\frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)\Gamma(n+1/2)}F_n^{-\frac{1}{2}}(\mu)\\
&=(-1)^n\frac{1}{2^n n!}\frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)}F_n^{-\frac{1}{2}}(\mu)\\
&=(-1)^n\frac{1}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)}F_n^{-\frac{1}{2}}(\mu)\\
&=(-1)^n\frac{1}{2^n(1/2)_n}F_n^{-\frac{1}{2}}(\mu)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

と定義したものである。第 2 種 Chebyshev 多項式は、上の添え字が 1 の時の Gegenbauer 多項式である。

$$U_n(\mu)=C_n^1(\mu) \tag{3.21}$$

## 3.3 規格化積分

Gegenbauer 多項式の規格化積分を調べる。

$$\begin{aligned}
I_n^{\alpha+\frac{1}{2}} &\equiv \int_{-1}^{1}\rho_\alpha(\mu)\left[C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu)\right]^2 d\mu\\
&=(-1)^n\frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\int_{-1}^{1}\left[C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu)\right]\frac{d^n}{d\mu^n}[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n]d\mu
\end{aligned} \tag{3.22}$$

直交性の証明を行ったときと同様にして部分積分を $n$ 回繰り返すと、

$$I_n^{\alpha+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu)\right][\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n]d\mu \tag{3.23}$$

となる。ここで、$C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu)$ は $n$ 次多項式なので $n$ 回微分すると出てくるのは、$\mu^n$ の係数 $k_n$ である。これを求めておく。

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\mu^{-(n+2\alpha)}\frac{d^n}{d\mu^n}\left(\mu^{2n+2\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{\Gamma(2n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

そこで、積分は

$$\begin{aligned} I_n^{\alpha+\frac{1}{2}} &= \frac{k_n}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{d\mu^n}\left(x^n\right)[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n]d\mu \\ &= \frac{k_n}{2^n}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\int_{-1}^{1}[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n]d\mu \\ &= \frac{k_n}{2^n}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\alpha}d\mu \end{aligned} \tag{3.25}$$

となる。ここで、変数

$$\xi = \frac{1+\mu}{2} \tag{3.26}$$

を導入すると、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\alpha}d\mu &= 2^{2(n+\alpha)+1}\int_{0}^{1}\xi^{n+\alpha}(1-\xi)^{n+\alpha}d\xi \\ &= 2^{2(n+\alpha)+1}B(n+\alpha+1,n+\alpha+1) \\ &= 2^{2(n+\alpha)+1}\frac{[\Gamma(n+\alpha+1)]^2}{\Gamma(2n+2\alpha+2)} \end{aligned} \tag{3.27}$$

となる。そこで、まとめると

$$\begin{aligned} I_n^{\alpha+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\times\frac{1}{2^n}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \\ &\quad\times 2^{2(n+\alpha)+1}\frac{[\Gamma(n+\alpha+1)]^2}{\Gamma(2n+2\alpha+2)} \\ &= \frac{2^{2\alpha+1}}{n!(2n+2\alpha+1)}\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(n+2\alpha+1)}{[\Gamma(2\alpha+1)]^2} \end{aligned} \tag{3.28}$$

とくに、$\alpha=0$ のときが Legendre 多項式で、

$$I_n^{\frac{1}{2}} = \int_{-1}^{1}\left[P_n(\mu)\right]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \tag{3.29}$$

となる。$\alpha=1$ のときは

$$I_n^{\frac{3}{2}}=\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)\left[C_n^{\frac{3}{2}}(\mu)\right]^2 d\mu=\frac{2^3}{n!(2n+3)}\frac{(n+2)!}{2^2}=\frac{2(n+2)(n+1)}{2n+3} \tag{3.30}$$

となる。

## 3.4 満たすべき微分方程式その 1

先に定義した $F_n^\alpha(\mu)$ は次の微分方程式を満たす。

$$(1-\mu^2)\frac{d^2F_n^\alpha}{d\mu^2}-2(\alpha+1)\mu\frac{dF_n^\alpha}{d\mu}+n\left(n+2\alpha+1\right)F_n^\alpha=0 \tag{3.31}$$

$n$ 次の Gegenbauer 多項式 $C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ も $F_n^\alpha$ と定数倍違うだけだから同じ微分方程式を満たす。$C_n^\alpha$ は

$$(1-\mu^2)\frac{d^2C_n^\alpha}{d\mu^2}-(2\alpha+1)\mu\frac{dC_n^\alpha}{d\mu}+n\left(n+2\alpha\right)C_n^\alpha=0 \tag{3.32}$$

を満たす。とくに $\alpha=1/2$ のときは Legendre 多項式で

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P_n}{d\mu^2}-2\mu\frac{dP_n}{d\mu}+n(n+1)P_n(\mu)=0 \tag{3.33}$$

を満たす。$\alpha=3/2$ とした Gegenbauer 多項式は

$$(1-\mu^2)\frac{d^2C_n^{\frac{3}{2}}}{d\mu^2}-4\mu\frac{dC_n^{\frac{3}{2}}}{d\mu}+n(n+3)C_n^{\frac{3}{2}}(\mu)=0 \tag{3.34}$$

を満たす。

以下、式 (3.31) が成立することを示す。まず、$X(\mu)$ は 2 次の多項式だから

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}}\left[X(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right]\right] \\
&= X(\mu)\frac{d^{n+2}}{d\mu^{n+2}}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] + (n+1)X'(\mu)\frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&\quad + \frac{n(n+1)}{2}X''(\mu)\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&= X(\mu)\frac{d^2}{d\mu^2}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] + (n+1)X'(\mu)\frac{d}{d\mu}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&\quad + \frac{n(n+1)}{2}X''(\mu)\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&= X(\mu)\frac{d^2}{d\mu^2}\left[\rho_\alpha(\mu)F_n^\alpha(\mu)\right] + (n+1)X'(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\rho_\alpha(\mu)F_n^\alpha(\mu)\right] \\
&\quad + \frac{n(n+1)}{2}X''(\mu)\left[\rho_\alpha(\mu)F_n^\alpha(\mu)\right] \\
&= (1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2}\left[(1-\mu^2)^\alpha F_n^\alpha(\mu)\right] - 2(n+1)\mu\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^\alpha F_n^\alpha(\mu)\right] \\
&\quad - n(n+1)\left[(1-\mu^2)^\alpha F_n^\alpha(\mu)\right] \\
&= (1-\mu^2)^\alpha\left\{(1-\mu^2)\frac{d^2F_n^\alpha}{d\mu^2} - 2(n+2\alpha+1)\mu\frac{dF_n^\alpha}{d\mu}\right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{4\alpha(\alpha+n)\mu^2}{1-\mu^2} - n(n+1) - 2\alpha\right]F_n^\alpha(\mu)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

となる。一方、同じ式を別のやり方で計算して

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}}\left[X(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right]\right] \\
&= \frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}}\left[X(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)\cdot X(\mu)^{n-1}\right]\right] \\
&= \frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}}\left[X(\mu)^n\frac{d}{d\mu}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)\right]+(n-1)X(\mu)^n\rho_\alpha(\mu)X'(\mu)\right] \\
&= \frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}}\left[X(\mu)^n\rho_\alpha(\mu)F_1^\alpha(\mu)+(n-1)X(\mu)^n\rho_\alpha(\mu)X'(\mu)\right] \\
&= \frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}}\left[\left\{F_1^\alpha(\mu)+(n-1)X'(\mu)\right\}\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&= \left\{F_1^\alpha(\mu)+(n-1)X'(\mu)\right\}\frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+1}}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&\quad +(n+1)\left\{F_1^{\alpha\prime}(\mu)+(n-1)X''(\mu)\right\}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&= \left\{F_1^\alpha(\mu)+(n-1)X'(\mu)\right\}\frac{d}{d\mu}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&\quad +(n+1)\left\{F_1^{\alpha\prime}(\mu)+(n-1)X''(\mu)\right\}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[\rho_\alpha(\mu)X(\mu)^n\right] \\
&= \left\{F_1^\alpha(\mu)+(n-1)X'(\mu)\right\}\frac{d}{d\mu}\left[\rho_\alpha(\mu)F_n^\alpha(\mu)\right] \\
&\quad +(n+1)\left\{F_1^{\alpha\prime}(\mu)+(n-1)X''(\mu)\right\}\left[\rho_\alpha(\mu)F_n^\alpha(\mu)\right] \\
&= -2\mu(\alpha+n)\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^\alpha F_n^\alpha(\mu)\right]-2(n+1)(\alpha+n)\left[(1-\mu^2)^\alpha F_n^\alpha(\mu)\right] \\
&= -2(\alpha+n)(1-\mu^2)^\alpha\left\{\mu\frac{dF_n^\alpha}{d\mu}+\left[(n+1)-\frac{2\alpha\mu^2}{1-\mu^2}\right]F_n^\alpha\right\}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

となる。式 (3.35) と (3.36) は同じ式を 2 つのやり方で計算したものなので等しいと置いて

$$
(1-\mu^2)\frac{d^2F_n^\alpha}{d\mu^2}-2(\alpha+1)\mu\frac{dF_n^\alpha}{d\mu}+n(n+2\alpha+1)F_n^\alpha(\mu)=0 \tag{3.37}
$$

を得る。

## 3.5 満たすべき微分方程式その 2 Laplace 方程式

ここでは、Gegenbauer 多項式 $C_n^{N/2-1}$ が $N$ 次元球面調和関数の一種（帯状 zonal 球面調和関数）となることを示す。

$N$ 次元のラプラシアンを

$$
\triangle_N=\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{3.38}
$$

と定義する。$N$ 次元極座標を

$$x_1 = r\cos\theta_1 \tag{3.39}$$
$$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \tag{3.40}$$
$$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \tag{3.41}$$
$$\vdots \tag{3.42}$$
$$x_{N-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin_{N-2}\cos\theta_{N-1} \tag{3.43}$$
$$x_N = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin_{N-2}\sin\theta_{N-1} \tag{3.44}$$

とする。ただし、$0 \le \theta_i \le \pi$ for $i = 1, 2, \dots, N-2$、$0 \le \theta_{N-1} \le 2\pi$ とする。このとき、ラプラシアンの極座標表示は以下のようになる（証明は、倭マン (2011) 参照)。

$$\begin{aligned}\triangle_N &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{\rho_i^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} + \frac{N-i-1}{\tan\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)\\ &= \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{\rho_i^2(\sin\theta_i)^{N-i-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[(\sin\theta_i)^{N-i-1}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right]\end{aligned} \tag{3.45}$$

ただし、

$$\rho_i = \begin{cases} r & (i=1)\\ r\prod_{l=1}^{i-1}\sin\theta_l & (i\ge 2)\end{cases} \tag{3.46}$$

とする。

$\triangle_N H = 0$ を満たす関数 $H$ が調和関数であり、その定義域を球面 $(r = 1)$ に限ったものが球面調和関数である。

以下、$\theta_i$ $(i \ge 2)$ に依存しない調和関数 (帯状 zonal 関数) を求めることを考える。そのような関数を $Z(r, \theta_1)$ とする。すると、必要な微分方程式は

$$\left\{\frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2(\sin\theta_1)^{N-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[(\sin\theta_1)^{N-2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right]\right\}Z = 0 \tag{3.47}$$

となる。変数分離法で解く。

$$Z(r,\theta_1) = R(r)\Theta(\theta_1) \tag{3.48}$$

とすると、

$$\frac{1}{Rr^{N-3}}\frac{d}{dr}\left(r^{N-1}\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta(\sin\theta_1)^{N-2}}\frac{d}{d\theta_1}\left[(\sin\theta_1)^{N-2}\frac{d\Theta}{d\theta_1}\right] \tag{3.49}$$

となる。左辺は $r$ のみの関数、右辺は $\theta_1$ のみの関数となるので、これは定数でなければならない。この定数を $\lambda$ とおく。

$\Theta$ が球面調和関数になるので、これを求めよう。$\Theta$ に関する微分方程式は

$$\frac{1}{(\sin\theta_1)^{N-2}}\frac{d}{d\theta_1}\left[(\sin\theta_1)^{N-2}\frac{d\Theta}{d\theta_1}\right] + \lambda\Theta = 0 \tag{3.50}$$

となる。ここで、

$$\mu = \cos\theta_1 \tag{3.51}$$

とおき、

$$M(\mu) = \Theta(\theta_1) \tag{3.52}$$

とする。すると $M$ が満たすべき微分方程式は

$$(1-\mu^2)\frac{d^2M}{d\mu^2} - (N-1)\mu\frac{dM}{d\mu} + \lambda M = 0 \tag{3.53}$$

となる。$N=5$ としたものが Chandrasekhar §61 に出てくる微分方程式である。ここで、

$$\alpha = \frac{N}{2} - 1 \tag{3.54}$$

と置くと

$$(1-\mu^2)\frac{d^2M}{d\mu^2} - (2\alpha+1)\mu\frac{dM}{d\mu} + \lambda M = 0 \tag{3.55}$$

となる。以下、$n$ を整数として、$\lambda = n(n+2\alpha)$ でなければならないことを示す。

解が

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n \tag{3.56}$$

という級数で表現できるものとする。これを元の式に代入すると

$$(1-\mu^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n\mu^{n-2} - (2\alpha+1)\mu\sum_{n=0}^{\infty} na_n\mu^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n\mu^n = 0 \tag{3.57}$$

となる。$\mu^n$ の係数がそれぞれ 0 でなければならないから、

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - (2\alpha+1)na_n + \lambda a_n = 0 \tag{3.58}$$

が得られ、これから

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n(n+2\alpha)-\lambda}{(n+2)(n+1)} \tag{3.59}$$

となることがわかる。これから、$\mu$ の偶数次と奇数次のべき乗の級数の 2 つの解があることがわかる。

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}/a_n) = 1$ なので、この級数は $|\mu| < 1$ では収束する。問題は $|\mu| = 1$ の場合である。このときの収束性のテストには Gauss のテスト（たとえば、Bressoud (2006) 参照）を使う。$u_m = a_{2m}$ とおく。すると、

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{2m(2m+2\alpha)-\lambda}{(2m+2)(2m+1)} = \frac{m^2+\alpha m-\lambda/4}{m^2+(3/2)m+1/2} \tag{3.60}$$

となる。Gauss のテストによると、分子の $m$ の係数と分母の $m$ の係数から 1 を引いた数の比較が重要で、$\alpha < 1/2$ なら収束し、$\alpha \geq 1/2$ なら収束しないことが分かる。Chandrasekhar の §61 は $\alpha = 3/2$ なので、普通では収束しないことが分かる。

ただし、$\lambda = n(n+2\alpha)$ の形をしていれば、級数が第 $n$ 項までで切れてしまって、解のうちの一方が多項式になる。つまり収束する解は $n$ 次多項式で、$n$ が偶数ならば偶数次のみの多項式、

奇数ならば奇数次のみの多項式になる。3.4 節の結果から分かるとおり、それは Gegenbauer 多項式 $C_n^\alpha(\mu)$ と定数倍を除いて等しくなる。

すなわち、$N$ 次元帯状球面調和関数は Gegenbauer 多項式 $C_n^{N/2-1}(\mu)$ となる。その意味で Gegenbauer 多項式を超球面調和多項式と呼ぶこともある。

## 3.6 母函数その 1

Gegenbauer 多項式の本来の定義となる母函数を求めておく。

いま、$\alpha \neq 0$ として、

$$w(\mu, h) = \frac{1}{(1-2\mu h + h^2)^\alpha} \tag{3.61}$$

と置く。これを微分した

$$\frac{\partial w(\mu,h)}{\partial \mu} = \frac{2\alpha h}{(1-2\mu h+h^2)^{\alpha+1}} \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial^2 w(\mu,h)}{\partial \mu^2} = \frac{4\alpha(\alpha+1)h^2}{(1-2\mu h+h^2)^{\alpha+2}} \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial w(\mu,h)}{\partial h} = -\frac{2\alpha(h-\mu)}{(1-2\mu h+h^2)^{\alpha+1}} \tag{3.64}$$

$$h^{1-2\alpha}\frac{\partial}{\partial h}\left\{h^{2\alpha+1}\frac{\partial w(\mu,h)}{\partial h}\right\} = \frac{2\alpha h\left[(2\alpha+1)\mu h^2 - 2(\mu^2\alpha+\alpha+1)h + (2\alpha+1)\mu\right]}{(1-2\mu h+h^2)^{\alpha+2}} \tag{3.65}$$

を用いると

$$(1-\mu^2)\frac{\partial^2 w(\mu,h)}{\partial \mu^2} - (2\alpha+1)\mu\frac{\partial w(\mu,h)}{\partial \mu} = -h^{1-2\alpha}\frac{\partial}{\partial h}\left\{h^{2\alpha+1}\frac{\partial w(\mu,h)}{\partial h}\right\} \tag{3.66}$$

が成立することが分かる。

さて、

$$w(\mu,h) = \frac{1}{(1-2\mu h+h^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \phi_n(\mu) \tag{3.67}$$

と展開したとする。形式的に二項定理を使って展開すると分かるとおり、$\phi_n(\mu)$ は $\mu$ の $n$ 次多項式である。これを式 (3.66) に代入すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \left\{(1-\mu^2)\frac{d^2\phi_n(\mu)}{d\mu^2} - (2\alpha+1)\mu\frac{d\phi_n(\mu)}{d\mu}\right\} = -\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2\alpha)h^n\phi_n(x) \tag{3.68}$$

となる。両辺の $h^n$ の係数が等しいと置くと

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\phi_n(\mu)}{d\mu^2} - (2\alpha+1)\mu\frac{d\phi_n(\mu)}{d\mu} + n(n+2\alpha)\phi_n(x) = 0 \tag{3.69}$$

が得られる。これは Gegenbauer 多項式が満たす式 (3.32) と全く同じだから、$\phi_n$ は Gegenbauer 多項式 $C_n^\alpha$ と定数倍を除いて等しいはずである。次にその定数を決める。式 (3.67) において

$\mu = 1$ と置くと

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} h^n \phi_n(1) &= \frac{1}{(1-h)^{2\alpha}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -2\alpha \\ n \end{pmatrix} (-h)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\alpha)(2\alpha+1)\cdots(2\alpha+n-1)}{n!} h^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\alpha)_n}{n!} h^n\end{aligned} \tag{3.70}$$

となるから、

$$\phi_n(1) = \frac{(2\alpha)_n}{n!} \tag{3.71}$$

である。これは式 (3.16) と同じだから

$$C_n^{\alpha}(\mu) = \phi_n(\mu) \tag{3.72}$$

となることがわかる。したがって、

$$\frac{1}{(1-2\mu h + h^2)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n C_n^{\alpha}(\mu) \tag{3.73}$$

となる。これが Gegenbauer 多項式の母函数を表す式であることがわかる。もともとは、これが Gegenbauer 多項式の定義なので、この形にしたときには係数が付かない。

## 3.7 母函数その 2

別のタイプの母函数も求めておく。

Goursat の公式 (1.1) を Gegenbauer 多項式

$$C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{1}{(1-\mu^2)^{\alpha}} \frac{d^n}{d\mu^n}[(1-\mu^2)^{\alpha+n}] \tag{3.74}$$

に適用する。

$$\begin{aligned}C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu) &= (-1)^n \frac{1}{2^n 2\pi i} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{1}{(1-\mu^2)^{\alpha}} \oint_C \frac{(1-t^2)^{\alpha+n}}{(t-\mu)^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \oint_C \left[\frac{(t^2-1)}{2(t-\mu)}\right]^n \left[\frac{(1-t^2)}{(1-\mu^2)}\right]^{\alpha} \frac{dt}{t-\mu}\end{aligned} \tag{3.75}$$

ここで、

$$\frac{1}{h} = \frac{t^2-1}{2(t-\mu)} \tag{3.76}$$

と置いて、変数を $t$ から $h$ に移す。

$$ht^2 - 2t + 2\mu - h = 0 \tag{3.77}$$

だから

$$t = \frac{1}{h}(1 - \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}) \tag{3.78}$$

となる。微分すると

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{dh}{h^2}(1 - \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}) + \frac{1}{h}\frac{\mu - h}{\sqrt{1 - 2\mu h + h^2}}dh \\ &= \frac{1 - \mu h - \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}}{h^2\sqrt{1 - 2\mu h + h^2}}dh \end{aligned} \tag{3.79}$$

これと

$$t - \mu = \frac{1}{h}(1 - \mu h - \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}) \tag{3.80}$$

とから

$$\frac{dt}{t - \mu} = \frac{1}{h\sqrt{1 - 2\mu h + h^2}}dh \tag{3.81}$$

を得る。さらに、

$$\frac{1 - t^2}{1 - \mu^2} = \frac{2}{1 - \mu h + \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}} \tag{3.82}$$

と計算できるから、ふたたび Goursat の公式を用いて

$$\begin{aligned} C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \\ &\quad \times \oint_{\text{around } h=0} \frac{2^\alpha}{(1 - \mu h + \sqrt{1 - 2\mu h + h^2})^\alpha \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}} \frac{dh}{h^{n+1}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \\ &\quad \times \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dh^n}\frac{2^\alpha}{(1 - \mu h + \sqrt{1 - 2\mu h + h^2})^\alpha \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}}\right]_{h=0} \end{aligned} \tag{3.83}$$

となる。したがって、テイラー展開の定理から

$$\begin{aligned} \frac{2^\alpha}{(1 - \mu h + \sqrt{1 - 2\mu h + h^2})^\alpha \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)} C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu) h^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_n}{(2\alpha+1)_n} C_n^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mu) h^n \end{aligned} \tag{3.84}$$

が成立する。書き換えると

$$\frac{2^{\alpha-1/2}}{(1-\mu h+\sqrt{1-2\mu h+h^2})^{\alpha-1/2}\sqrt{1-2\mu h+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(n+\alpha+1/2)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(n+2\alpha)}C_n^{\alpha}(\mu)h^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1/2)_n}{(2\alpha)_n}C_n^{\alpha}(\mu)h^n \tag{3.85}$$

となる。

とくに右上添え字が 1/2 のときは Legendre 多項式の母関数展開

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\mu h+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\frac{1}{2}}(\mu)h^n = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\mu)h^n \tag{3.86}$$

が得られる。

## 3.8 参考文献


- Bressoud, David M. (2006) *Gauss's Test*, Appendix to *A Radical Approach to Real Analysis*, 2nd ed., `https://www.macalester.edu/aratra/edition2/chapter4/chapt4d.pdf`
- Chandrasekhar, S. (1981, Dover edition; 1961, original) *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Dover.
- Doman, Brian George Spencer (2016) *The Classical Orthogonal Polynomials*, World Scientific の 9 章
- 犬井 鉄郎 (1962) 特殊函数, 岩波全書 252
- 倭マン (2011) ラプラシアンの極座標表示 ： n 次元, `http://wasan.hatenablog.com/entry/20110605/1307232819`

# 第 4 章

# Hermite 多項式

地球流体力学の浅水波問題や量子力学の調和振動子問題で出てくる多項式である。

## 4.1　Hermite 多項式の Rodrigues 表示

Hermite 多項式を Rodrigues 表示で定義することにすると

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \tag{4.1}$$

である（これが多項式であることの証明は略。形式的に素直に計算すればよい）。

$m = 0$ から $m = 5$ までを具体的に計算しておくと

$$\begin{align} H_0(x) &= e^{x^2} e^{-x^2} = 1 \tag{4.2a} \\ H_1(x) &= -e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = -e^{x^2}(-2xe^{-x^2}) = 2x \tag{4.2b} \\ H_2(x) &= e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{x^2}[(4x^2-2)e^{-x^2}] = 4x^2 - 2 \tag{4.2c} \\ H_3(x) &= -e^{x^2} \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = -e^{x^2}[(-8x^3+12x)e^{-x^2}] = 8x^3 - 12x \tag{4.2d} \\ H_4(x) &= e^{x^2} \frac{d^4}{dx^4} e^{-x^2} = e^{x^2}[(16x^4-48x^2+12)e^{-x^2}] = 16x^4 - 48x + 12 \tag{4.2e} \\ H_5(x) &= -e^{x^2} \frac{d^5}{dx^5} e^{-x^2} \nonumber \\ &= -e^{x^2}[(-32x^5+160x^3-120x)e^{-x^2}] = 32x^5 - 160x^3 + 120x \tag{4.2f} \end{align}$$

である。

## 4.2　直交性

Rodrigues 表示を用いると、直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_l(x) dx = 0 \qquad (m \neq l) \tag{4.3}$$

も簡単に導くことができる。

以下、$m > l$ として上の式を示す（$m < l$ のときは入れ替えればよいだけ)。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_l(x) dx \\
&= (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) H_l(x) dx \\
&= (-1)^m \left\{ \left[ \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x^2}) H_l(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x^2}) \frac{d}{dx} H_l(x) dx \right\} \\
&= (-1)^{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x^2}) \frac{d}{dx} H_l(x) dx \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2}) \frac{d^m}{dx^m} H_l(x) dx \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

最後の等式は $H_l$ が $l$ 次多項式でそれを $m(> l)$ 回微分すると 0 になることからわかる。

## 4.3 母関数

Goursat の公式 (1.1) を Hermite 多項式の Rodrigues 表示

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \tag{4.5}$$

に適用する。

$$H_m(x) = (-1)^m \frac{m!}{2\pi i} e^{x^2} \oint_C \frac{e^{-t^2}}{(t-x)^{m+1}} dt \tag{4.6}$$

ここで、

$$\zeta = x - t \tag{4.7}$$

と置いて、変数を $t$ から $\zeta$ に移すと

$$H_m(x) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\text{around } \zeta=0} \frac{e^{2x\zeta - \zeta^2}}{\zeta^{m+1}} d\zeta \tag{4.8}$$

となるから、ふたたび Goursat の公式を用いて

$$H_m(x) = \left[ \frac{d^m}{d\zeta^m} e^{2x\zeta - \zeta^2} \right]_{\zeta=0} \tag{4.9}$$

となる。したがって、テイラー展開の定理から

$$e^{2x\zeta - \zeta^2} = \sum_{m=0} \frac{H_m(x)}{m!} \zeta^m \tag{4.10}$$

が成立する。

## 4.4 Hermite の微分方程式

Rodrigues 表示で定義された Hermite 多項式が Hermite の微分方程式

$$\frac{d^2H_m}{dx^2} - 2x\frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0 \tag{4.11}$$

を満たすことを示す。

まず、準備として定義より

$$(-1)^m \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) = e^{-x^2}H_m(x) \tag{4.12}$$

とそれを 1 回微分した

$$(-1)^m \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(e^{-x^2}) = e^{-x^2}\left(-2xH_m(x) + \frac{dH_m(x)}{dx}\right) \tag{4.13}$$

を用意しておく。

その上で、$e^{-x^2}H_m(x)$ の二階微分を 2 通りの方法で計算する。一つ目は素直に計算して

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}H_m(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\left(-2xH_m(x) + \frac{dH_m(x)}{dx}\right)\right] \\
&= \left(4x^2-2\right)e^{-x^2}H_m(x) - 4xe^{-x^2}\frac{dH_m(x)}{dx} + e^{-x^2}\frac{d^2H_m(x)}{dx^2} \\
&= e^{-x^2}\left[\left(4x^2-2\right)H_m(x) - 4x\frac{dH_m(x)}{dx} + \frac{d^2H_m(x)}{dx^2}\right]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

である。もう一つは、式 (4.12) と (4.13) を用いて計算してゆく方法である。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}H_m(x)\right) &= (-1)^m\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}\left(e^{-x^2}\right) \\
&= (-1)^m\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(-2xe^{-x^2}\right) \\
&= (-1)^m\left[(m+1)(-2)\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-x^2}\right) - 2x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(e^{-x^2}\right)\right] \\
&= -2(m+1)(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-x^2}\right) - 2x(-1)^m\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(e^{-x^2}\right) \\
&= -2(m+1)e^{-x^2}H_m(x) - 2xe^{-x^2}\left(-2xH_m(x) + \frac{dH_m(x)}{dx}\right) \\
&= e^{-x^2}\left[(4x^2-2m-2)H_m(x) - 2x\frac{dH_m(x)}{dx}\right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

以上 2 つのやり方で結果が等しくなければならないから

$$\left(4x^2-2\right)H_m(x) - 4x\frac{dH_m(x)}{dx} + \frac{d^2H_m(x)}{dx^2} = (4x^2-2m-2)H_m(x) - 2x\frac{dH_m(x)}{dx} \tag{4.16}$$

整理して

$$\frac{d^2H_m}{dx^2} - 2x\frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0 \tag{4.17}$$

が成立する。

## 4.5 漸化式

### 4.5.1 Hermite 多項式に対する昇降演算子 その 1 ：母関数を用いた導出

昇降漸化式が

$$\left(2x-\frac{d}{dx}\right)H_m(x)=H_{m+1}(x) \tag{4.18}$$
$$\frac{1}{2m}\frac{d}{dx}H_m(x)=H_{m-1}(x) \tag{4.19}$$

となることを示す。

まず、上昇漸化式を示す。$e^{2x\zeta-\zeta^2}$ を $\zeta$ と $x$ で微分することから

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}e^{2x\zeta-\zeta^2}=2(x-\zeta)e^{2x\zeta-\zeta^2}=\left(2x-\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{2x\zeta-\zeta^2} \tag{4.20}$$

の関係がある。これに母関数表示の式 (4.10) を代入する。最左辺は

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\sum_{n=0}\frac{H_n(x)}{n!}\zeta^n=\sum_{n=1}\frac{H_n(x)}{(n-1)!}\zeta^{n-1}=\sum_{m=0}\frac{H_{m+1}(x)}{m!}\zeta^m \tag{4.21}$$

であり、最右辺は

$$\left(2x-\frac{\partial}{\partial x}\right)\sum_{m=0}\frac{H_m(x)}{m!}\zeta^m=\sum_{m=0}\left[\left(2x-\frac{d}{dx}\right)\frac{H_m(x)}{m!}\right]\zeta^m \tag{4.22}$$

であるので、項別に両辺を比較して

$$\left(2x-\frac{d}{dx}\right)H_m(x)=H_{m+1}(x) \tag{4.23}$$

を得る。

次に下降漸化式を示す。母関数表示の式 (4.10)

$$\sum_{m=0}\frac{H_m(x)}{m!}\zeta^m=e^{2x\zeta-\zeta^2} \tag{4.24}$$

の両辺を $x$ で微分して 2 で割ると

$$\sum_{m=1}\frac{1}{2m!}\frac{dH_m(x)}{dx}\zeta^m=\zeta e^{2x\zeta-\zeta^2}=\sum_{n=0}\frac{H_n(x)}{n!}\zeta^{n+1}=\sum_{m=1}\frac{H_{m-1}(x)}{(m-1)!}\zeta^m \tag{4.25}$$

となる。項別に両辺を比較すると

$$\frac{1}{2m}\frac{d}{dx}H_m(x)=H_{m-1}(x) \tag{4.26}$$

を得る。

### 4.5.2 Hermite 多項式に対する昇降演算子 その２：Hermite の微分方程式を用いた導出

Hermite の微分方程式

$$\frac{d^2H_m}{dx^2} - 2x\frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0 \tag{4.27}$$

が

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right)\frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0 \tag{4.28a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 2x\right)H_m + 2(m+1)H_m = 0 \tag{4.28b}$$

の２通りに書けることに注目する。昇降演算子を

$$T_+ = 2x - \frac{d}{dx} \tag{4.29}$$

$$T_- = \frac{1}{2}\frac{d}{dx} \tag{4.30}$$

と定義すると、交換関係

$$T_+T_- - T_-T_+ = -1 \tag{4.31}$$

が成り立つ。そして、Hermite の微分方程式は

$$-T_+T_-H_m + mH_m = 0 \tag{4.32a}$$

$$-T_-T_+H_m + (m+1)H_m = 0 \tag{4.32b}$$

と書ける。

まず、(4.32b) に $T_+$ を演算して交換関係を用いると、

$$-T_-T_+(T_+H_m) + (m+2)(T_+H_m) = 0 \tag{4.33}$$

となる。したがって、

$$T_+H_m \propto H_{m+1} \tag{4.34}$$

であることがわかる。同様に、(4.32a) に $T_-$ を演算して交換関係を用いると、

$$-T_+T_-(T_-H_m) + (m-1)(T_-H_m) = 0 \tag{4.35}$$

となる。したがって、

$$T_-H_m \propto H_{m-1} \tag{4.36}$$

であることがわかる。$H_m(x) = 2^m x^m + \dots$ であることから、最高次の係数を比べることにより

$$T_+H_m = H_{m+1} \tag{4.37a}$$

$$\frac{1}{m}T_-H_m = H_{m-1} \tag{4.37b}$$

となることがわかる。すなわち

$$\left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_m(x) = H_{m+1}(x) \tag{4.38}$$

$$\frac{1}{2m}\frac{d}{dx} H_m(x) = H_{m-1}(x) \tag{4.39}$$

である。

### 4.5.3 調和振動子に対する昇降演算子

$$\Phi_m(x) \equiv \frac{1}{2^{m/2}} e^{-x^2/2} H_m(x) = \frac{(-1)^m}{2^{m/2}} e^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x}) \tag{4.40}$$

と定義し、昇降演算子を

$$A_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp \frac{d}{dx} + x\right) \tag{4.41}$$

と定義すれば、

$$A_+ \Phi_m = \Phi_{m+1} \tag{4.42a}$$

$$A_- \Phi_m = \Phi_{m-1} \tag{4.42b}$$

となることがわかる。実際計算してみると

$$\begin{aligned}
A_+\Phi_m &= \frac{(-1)^{m+1}}{2^{(m+1)/2}} \frac{d}{dx}\left[e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2})\right] + \frac{(-1)^m}{2^{(m+1)/2}} x e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \\
&= \frac{(-1)^{m+1}}{2^{(m+1)/2}} e^{x^2/2}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(e^{-x^2}) + \frac{(-1)^{m+1}}{2^{(m+1)/2}} x e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \\
&\quad + \frac{(-1)^m}{2^{(m+1)/2}} x e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \\
&= \frac{(-1)^{m+1}}{2^{(m+1)/2}} e^{x^2/2}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(e^{-x^2}) \\
&= \Phi_{m+1}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
A_-\Phi_m &= \frac{(-1)^m}{2^{(m+1)/2}} \frac{d}{dx}\left[e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2})\right] + \frac{(-1)^m}{2^{(m+1)/2}} x e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \\
&= \frac{(-1)^m}{2^{(m+1)/2}} e^{x^2/2}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(e^{-x^2}) + \frac{(-1)^m}{2^{(m+1)/2}} x e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \\
&\quad + \frac{(-1)^m}{2^{(m+1)/2}} x e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \\
&= \frac{(-1)^m}{2^{(m+1)/2}} e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(-2xe^{-x^2}) + \frac{(-1)^m}{2^{(m-1)/2}} x e^{x^2/2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}) \\
&= \frac{(-1)^{m-1}}{2^{(m-1)/2}} e^{x^2/2}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(e^{-x^2}) \\
&= \Phi_{m-1}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

となり、確かめられた。

## 4.6 参考文献


- [ 本 ] 楳田登美男 (2015) 数理物理における固有値問題 (SGC ライブラリ 116), サイエンス社.
- [ 本 ] 犬井鉄郎 (1962) 特殊関数 （岩波全書 252）, 岩波書店.